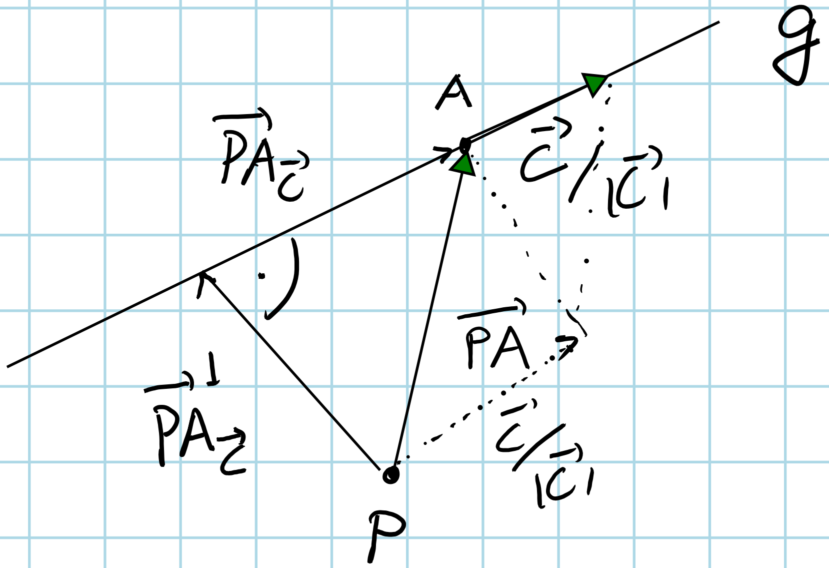
5. Vorlesung 3.11.10

1.5 Geraden und Ebenen

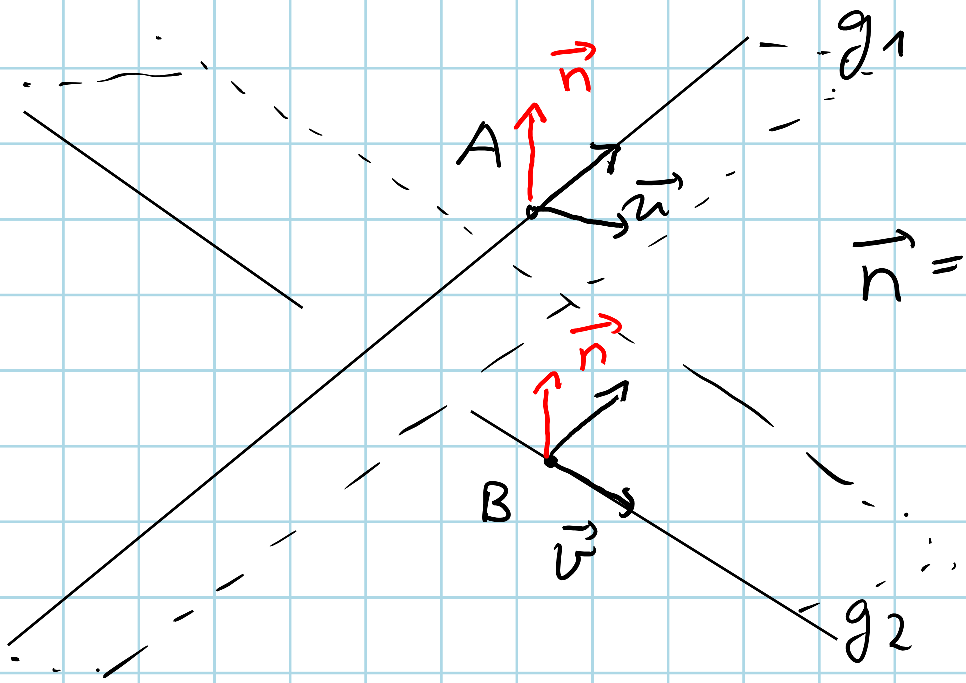


Abstand eines Punktes zu einer Geraden

$$d = \underbrace{\left|\overrightarrow{PA}^{\perp}_{\vec{c}}\right|}_{\substack{\text{Fläche des} \\ \text{Rechtecks} \\ \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|},\ \overrightarrow{PA}^{\perp}_{\vec{c}}}} = \underbrace{\left|\overrightarrow{PA} \times \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|}_{\substack{\text{Fläche des} \\ \text{Parallelogramms} \\ \overrightarrow{PA},\ \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}}$$

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{c}|}{|\vec{c}|}.}$$

Abstand Gerade – Gerade



$$\vec n = \frac{\vec u \times \vec v}{|\vec u \times \vec v|}$$

$$d = |\vec{AB}_{\vec n}| = |(\vec{AB}\cdot\vec n)\,\vec n|$$

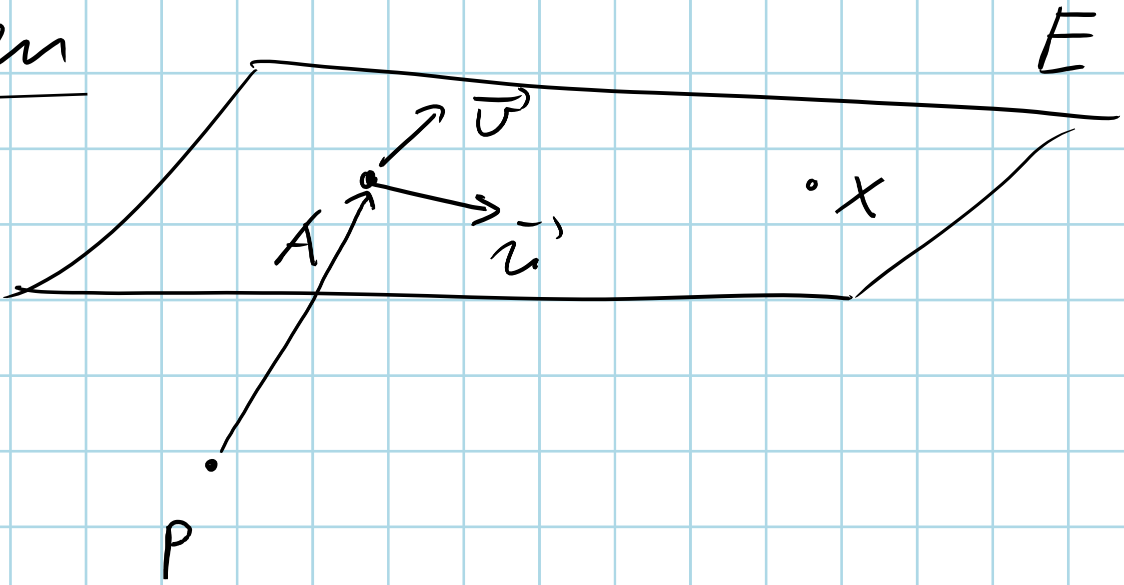
$$= |\vec{AB}\,\vec n| = \vec{AB}\cdot\frac{\vec u \times \vec v}{|\vec u \times \vec v|}$$

Der Abstand d der Geraden durch A in Richtung $\vec u$ zu der Geraden durch B in Richtung $\vec v$ ist

$$d = \begin{cases} \frac{|\vec{AB}\times\vec u|}{|\vec u|} & \text{falls } \vec u \text{ und } \vec v \text{ parallel sind,} \\ \frac{|[\vec{AB},\vec u,\vec v]|}{|\vec u\times\vec v|} & \text{falls } \vec u\times\vec v \neq 0. \end{cases}$$

— Formel von oben

Ebenen



$$E = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA} + s\vec{u} + t\vec{v} \text{ für ein } s,t \in \mathbb{R} \}$$

Im Koordinaten

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.}$$

$P = O$

$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Drei-Punkte-Gleichung von E:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Parameterfreie Darstellung:

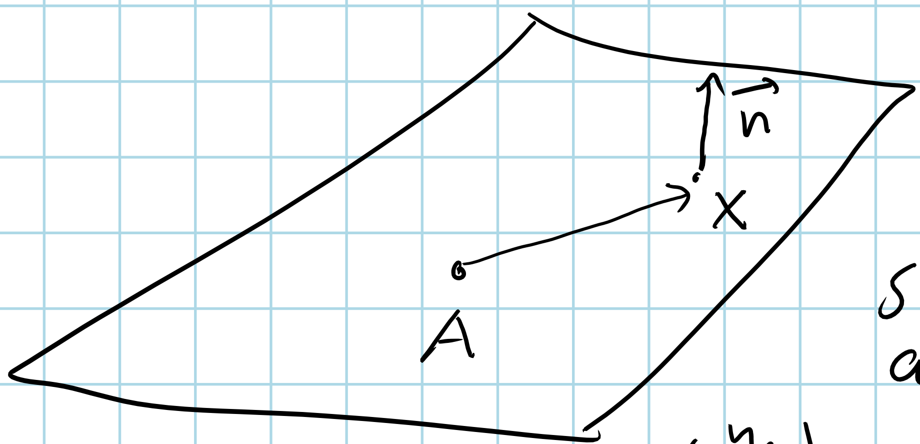
$$E = \Big\{ X \;\Big|\; \boxed{\underbrace{[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}_{\text{Spatvolumen}} = 0.} \Big\}$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \perp (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

Normalengleichung

$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$ $\quad$ A Punkt in E, $\vec{n}$ Normalenvektor von E



E

Normalenvektoren stehen senkrecht auf allen Vektoren der Ebene

$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 \quad a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = (x_1 - a_1) n_1 + (x_2 - a_2) n_2 + (x_3 - a_3) n_3$$

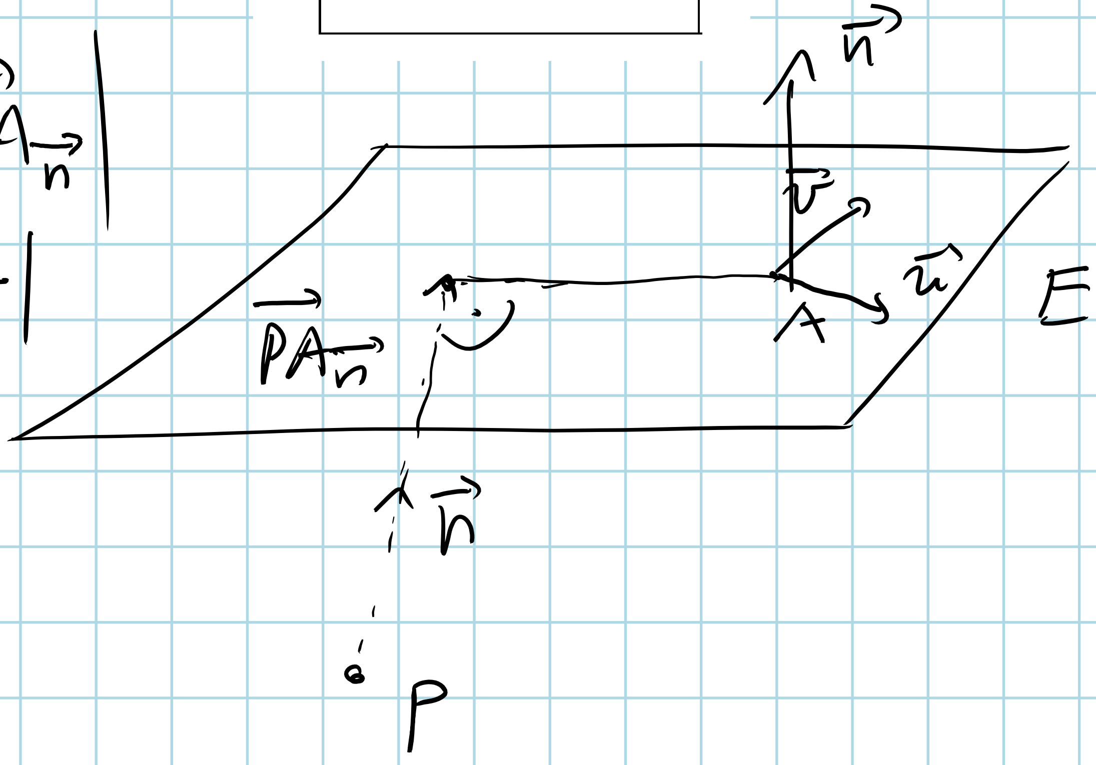
$$\Rightarrow \boxed{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = c \quad \text{mit } c = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3.}$$

Hessesche Normalform für $|\vec{n}| = 1$

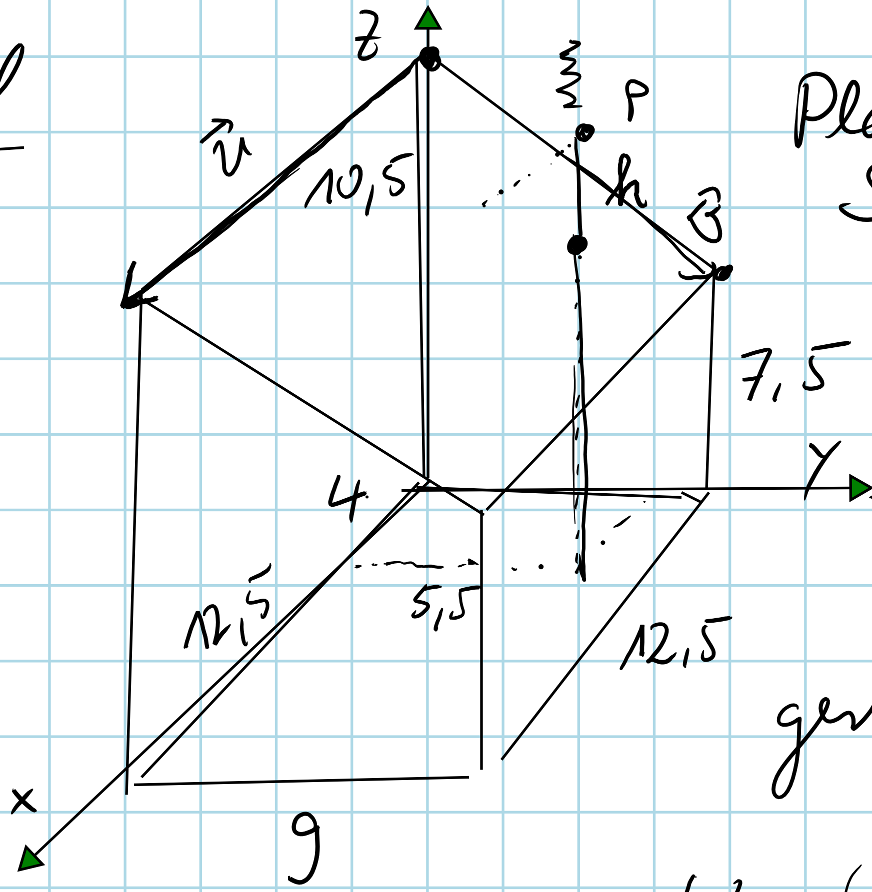
Abstand eines Punktes zur Ebene

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

$$d = \left| \overrightarrow{PA}_{\vec{n}} \right| = \left| \overrightarrow{PA} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$



Beispiel



Planung Schornstein

Mindestabst. zum Dach $\geq 1,5$

gesucht h minimal

$$P = (4, 5,5, h)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 12,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12,5 \cdot (-3) \\ 12,5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 37,5 \\ 112,5 \end{pmatrix}$$

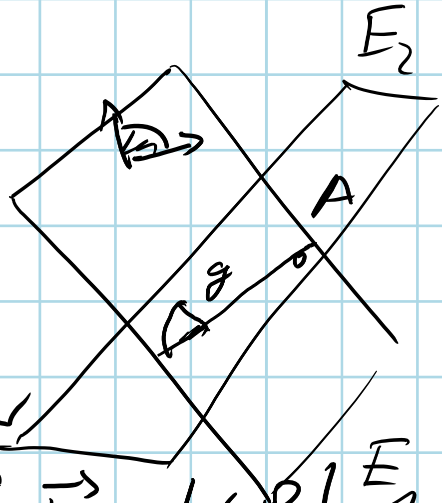
$$|\vec{n}| = \sqrt{37,5^2 + 112,5^2} = 118,6$$

$$d = \left| \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 5,5 \\ h - 10,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 37,5 \\ 112,5 \end{pmatrix}}{118,6} \right| \overset{!}{=} 1,5$$

umformen $\Rightarrow$ $h = 10,3$

Schnitt zweier Ebenen

$$E_1 : \qquad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = c_1$$
$$E_2 : \qquad m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = c_2$$



gesucht Schnittgerade

$\vec{n} \times \vec{m}$ liegt in E_1 und E_2

$\Rightarrow \vec{n} \times \vec{m}$ ist Richtungsvektor

$$g = \{ X \mid \vec{OX} = \vec{OA} + t\, \vec{n} \times \vec{m},\ t \in \mathbb{R} \}$$

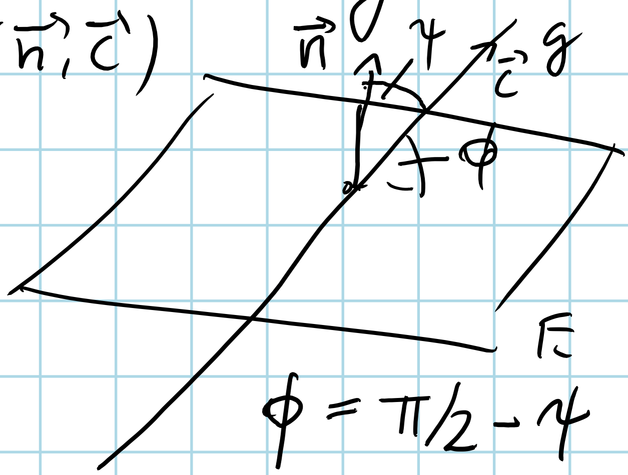
Winkel zwischen Ebenen

= Winkel zwischen Normalenvektoren

$$\Rightarrow \boxed{\cos\phi_1 = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}, \quad 0 \le \phi_1 \le \frac{\pi}{2}}$$

Winkel zwischen Ebene und Geraden

$\varphi = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{c})$

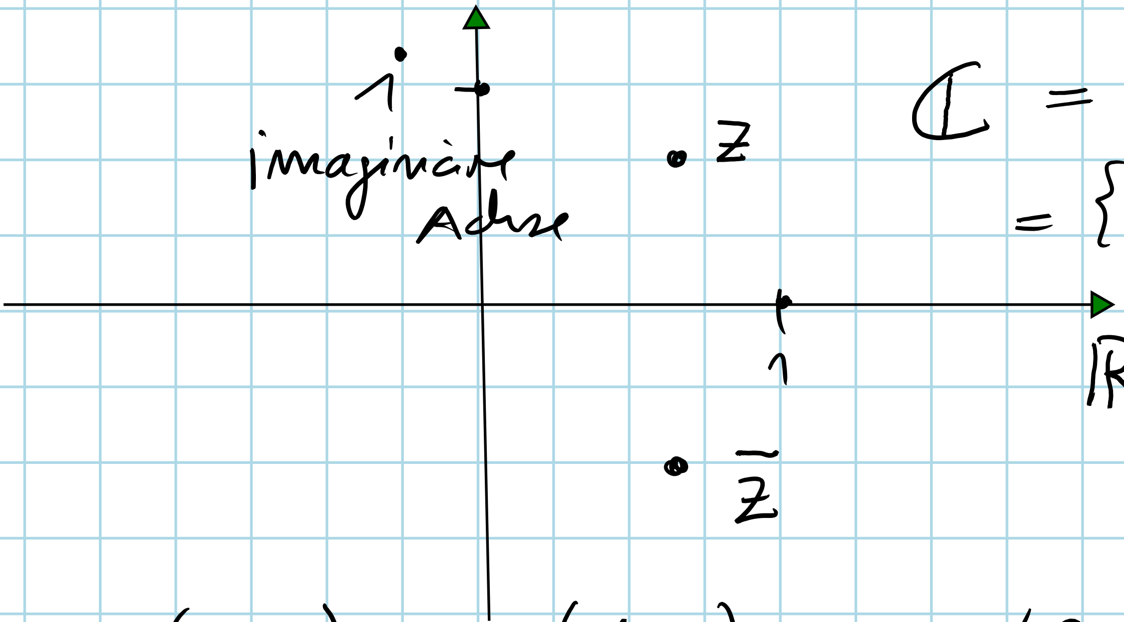


$$\cos(\varphi) = \boxed{\sin\phi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{c}|}{|\vec{n}||\vec{c}|}.}$$

$\phi = \pi/2 - \varphi$

Exkurs:

1.6 Die komplexen Zahlen



$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$z = (x,y) = \underbrace{(1,0)}_{1}\cdot x + \underbrace{(0,1)}_{i}\cdot y = 1\cdot x + iy = x + iy$$

$$\mathbb{C} = \{\underbrace{x}_{\text{Realteil}} + i\underbrace{y}_{\text{Imaginärteil}} \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$ Gaußsche Ebene

$$\boxed{\operatorname{Re}(x+iy) = x, \quad \operatorname{Im}(x+iy) = y.}$$

Der Betrag

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Das Konjugieren = Spiegeln an der x-Achse

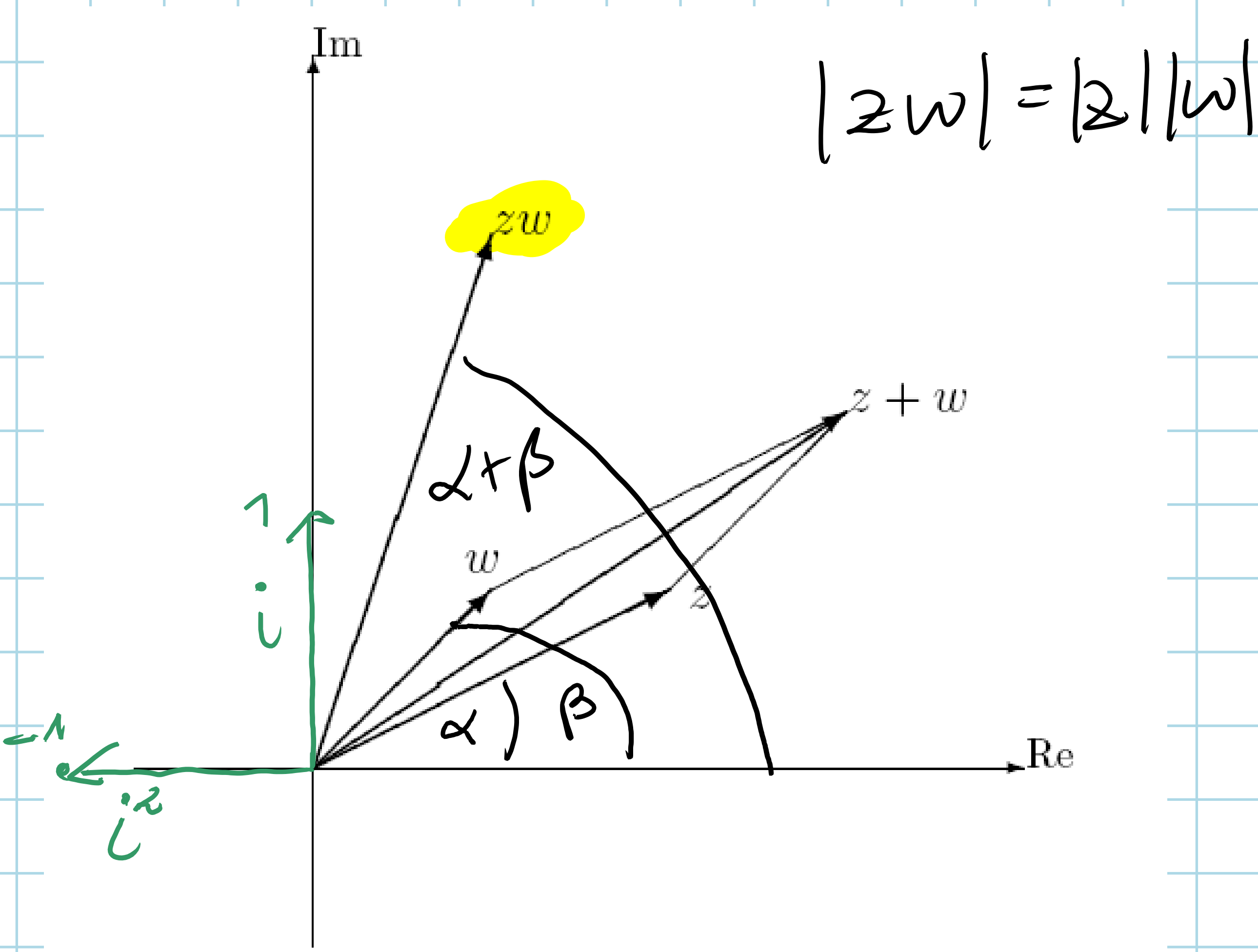
$$\underbrace{\overline{x+iy}}_{\text{konjugiert}} = x - iy$$

Die Addition (wie bei Vektoren)

$$(x+iy)+(u+iv) = (x+u)+i(y+v)$$

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}.$$

Die Multiplikation



Merke: Beim Produkt zweier komplexer Zahlen addieren sich die Winkel und multiplizieren sich die Längen

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

In Koordinaten:

$$\boxed{\underbrace{(x+iy)\cdot(u+iv)}_{xu+iy\cdot u+xiv+iyiv} = (xu-yv)+i(xv+yu)}$$

$$xu+iy\cdot u+xiv+iyiv = (xu+\underbrace{i^2 yv}_{-yv})+i(yu+xv)$$

Division:

$$(u+iv)(u-iv) = u^2 - i^2 v^2 = u^2+v^2$$

$$\begin{aligned}\frac{x+iy}{u+iv} &= \frac{(x+iy)\cdot(u-iv)}{u^2+v^2}\\ &= \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{-xv+yu}{u^2+v^2}\end{aligned}$$

einfache Regeln:

$$\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

$$|z\cdot w| = |z||w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$