Prof. Dr. Gerd Laures Steffen Wittkamp

1. Übungsblatt Mathe I für MB, BI und UTRM

Korrigiert werden die Aufgaben 2,3,5 (je Aufgabe gibt es 4 Punkte). Bitte versehen Sie Ihr Abgabenblatt deutlich und in Druckbuchstaben mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, der Nummer Ihrer Übungsgruppe, und geben Sie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters an. Werfen Sie Ihre Lösung bis **Freitag, 29.10.2010, 10 Uhr** auf Etage 02 in die entsprechenden Briefkästen vor dem Rechenzentrum (Gebäude NA) ein.

Lesen Sie: [P1] Kapitel 1, Abschnitte 1,2 und 4 und [MV1] Kapitel 1, 1-2.

Aufgabe 1.
Mit A,B,C seien im folgenden Teilmengen einer Grundmenge M bezeichnet. Veranschaulichen Sie die folgenden Mengengleichheiten indem Sie die Mengen in einem Venn-Diagramm darstellen:

i) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

ii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

iii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Aufgabe 2.
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$

Welche der folgenden Relationen treffen zu:
$B \subset A$, $C \subset A$, $A \subset B$, $C \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$.

Aufgabe 3.
Wie können Definitions- bzw. Zielbereich der folgenden Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verändert werden, damit diese

i) injektiv aber nicht surjektiv,

ii) surjektiv aber nicht injektiv,

iii) injektiv und surjektiv

sind?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2} \\ \text{b)} & f(x) = |x-1|^3 \end{array}$$

Aufgabe 4.
Das Planungsamt Bochum hat einen Bebauungsplan erstellt, in dem mehrere rechteckige Grundstücke erzeugt werden, die etwa $400m^2$ gross sind. Wie groß dürfen die Seitenlängen der Baugrundstücke sein, wenn der Umfang höchstens $100m$ sein soll. Geben Sie alle Möglichkeiten an.

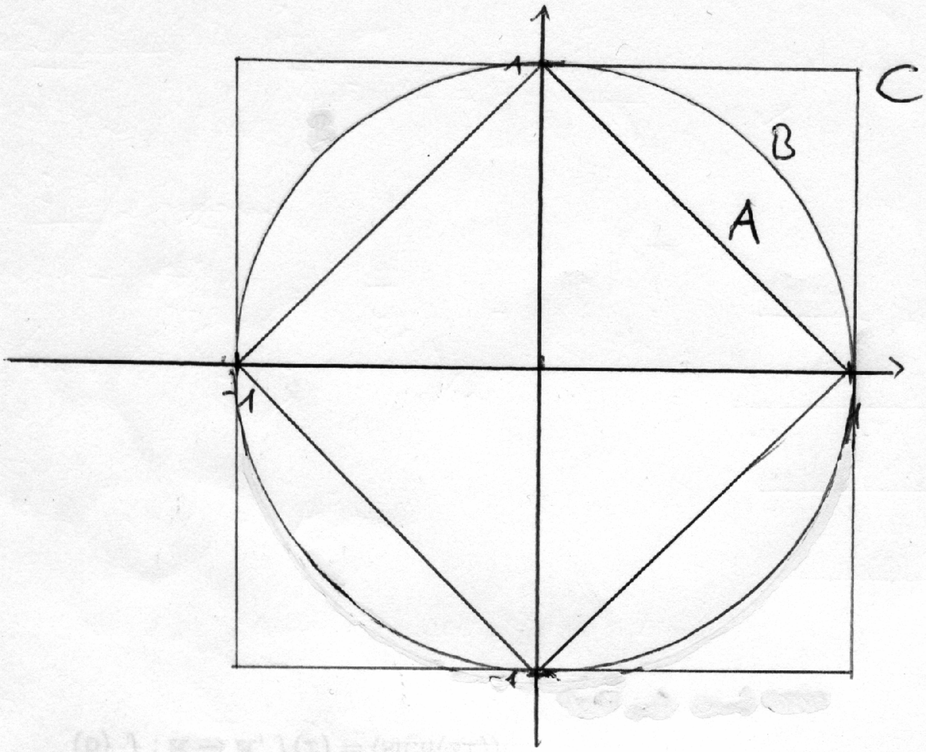
Aufgabe 5.
Benutzen Sie die vollständige Induktion, um zu zeigen, dass gilt:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. $2n + 1 < n^2 < 2^n$ für $n \geq 5$

Aufgabe 6.

1. Für die Mathematikvorlesung für Ingenieure soll ein Tafeldienst gegründet werden, der die Tafel während der Pause wischt. Es melden sich 6 Freiwillige von denen 2 die Tafel wischen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Leute für den Tafeldienst auszuwählen.
2. Im HZO 10 gibt es 841 Sitzplätze und zur Vorlesung Mathematik für Ingenieure kommen m Studenten.
   a) Sei $m < 841$, das heißt $841 - m$ Plätze bleiben leer. Wieviele verschiedene Sitzordnungen gibt es?
   b) Sei nun $m > 841$, das heißt $m - 841$ Studenten müssen stehenbleiben. Wie viele Sitzordnungen gibt es nun?

Aufgabe 2 (Musterlösung)



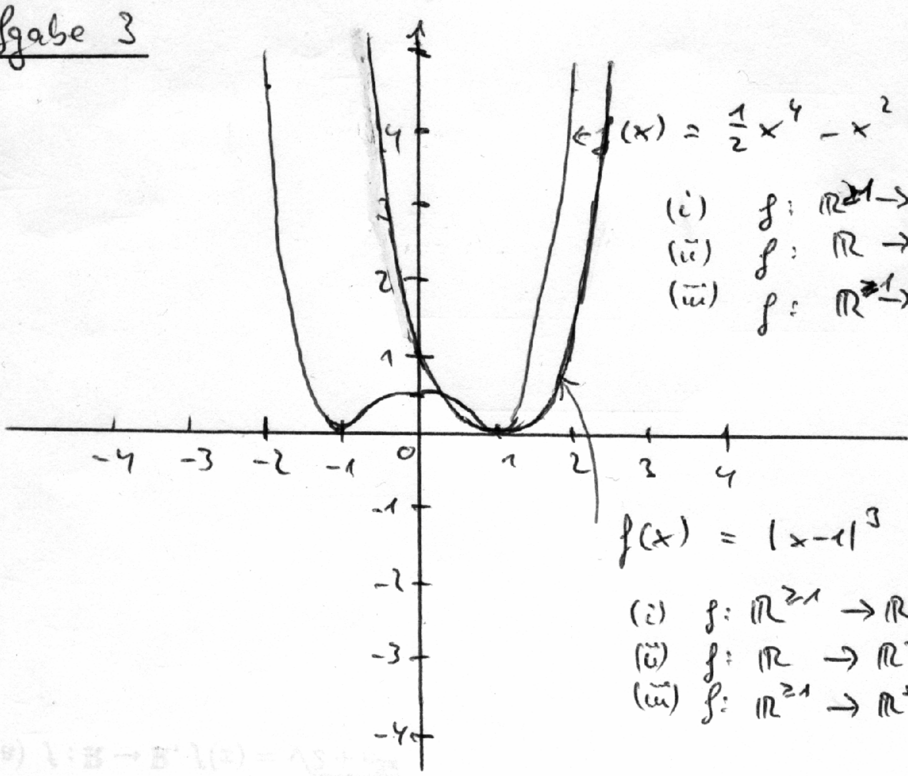
die Mengen bestehen nicht nur aus dem Rand, sondern auch aus dem Flächeninhalt.

$\Rightarrow$ $A \subset B \subset C$

d.h. $A \subset B$
$A \subset C$
$A \subset B$

die anderen Relationen sind nicht korrekt.

Aufgabe 3



$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}$

(i) $f: \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}$
(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
(iii) $f: \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}^+$

$f(x) = |x-1|^3$

(i) $f: \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}$
(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
(iii) $f: \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}^+$

Aufgabe 5

(1) Z.z: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

IA: $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

IS: $n \to n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

$\Rightarrow$ die Aussage ist gezeigt $\forall\ n \in \mathbb{N}$

(2) Z.z: $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

IA: $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} = 1(1+1) = 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ ✓

IS: $n \to n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) + (n+1)(n+2)$$

$$\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$= (n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]$$

$\Rightarrow$ die Aussage ist gezeigt $\forall\ n \in \mathbb{N}$

(3) Z.z: $2n+1 < n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$

IA: $n=5$

$$2\cdot 5+1 = 11 < \overset{5^2}{25} < 32 = 2^5 \checkmark$$

IS: $n \to n+1$

$$2(n+1)+1 = 2n+2+1 = (2n+1)+2$$

$$\overset{IV}{<} n^2 + 2$$

$2n+1 > 2$ $\forall\ n \geq 5$ ✓

$$< n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$\overset{IV}{<} 2^n + 2n + 1$$

$$\overset{IV}{<} 2^n + 2^n$$

$$= 2\cdot 2^n$$

$$= 2^{n+1}$$

$\Rightarrow$ die Aussage wurde gezeigt $\forall\ n \geq 5$ $(n \in \mathbb{N})$