

# **Verteilung der Rückstaulängen an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen**

von PD Dr.-Ing. Ning Wu

(Veröffentlicht in *Straßenverkehrstechnik*, Heft 8/1997.  
Kirschbaum Verlag GmbH, Bonn, 1997)

## **Kurzfassung:**

Die Länge des Rückstaus der wartenden Fahrzeuge an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen ist ein wichtiger Parameter zur Beurteilung der Qualität der Verkehrsanlagen. Während die mittlere Rückstaulänge die Leistungsfähigkeit der Knotenpunkte widerspiegelt, werden die so genannte 95%- und 99%-Rückstaulänge für die Dimensionierung der Länge der Abbiegespuren verwendet, damit die Blockierung der Fahrstreifen des geradeaus fahrenden Verkehrs ausbleibt. Bei Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen ist dies für die Linksabbiegerspur auf der vorfahrtberechtigten Straße von besonderer Bedeutung, da hier die Blockierung der Hauptstraße nach sich zieht und damit Unfälle provoziert würde.

In diesem Aufsatz wird theoretisch - empirischen Formeln angegeben, die die Verteilung der Rückstaulängen an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen darstellen. Mit diesen Formeln können Percentilen der Rückstaulängen leicht ermittelt werden. Zwei Nomogramme werden für Anwendung in der Praxis angegeben.

## Schlüsselwörter:

Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen  
Rückstaulänge  
Percentilen der Rückstaulänge  
stationärer und instationärer Verkehr

## Verfasseranschrift:

Dr.-Ing. Ning Wu  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Verkehrswesen  
44 780 Bochum  
ning.wu@rub.de

# Verteilung der Rückstaulängen an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen

von Dr.-Ing. Ning Wu

## 1. Einführung

Die Länge des Rückstaus der wartenden Fahrzeuge an Knotenpunkten des Straßennetzes ist ein wichtiger Parameter zur Beurteilung der Qualität der Verkehrsanlagen. Dies gilt sowohl für die durch Lichtsignalanlagen geregelten Knotenpunkte als auch für die vorfahrtgeregelten Knotenpunkte. Die Berechnung der mittleren Rückstaulänge - vielmals auch die Berechnung der Percentilen der Rückstaulänge - ist dann besonders von Bedeutung, wenn der zur Verfügung stehenden Stau- (Abstell-) Platz am Knotenpunkt begrenzt ist. Z. B. ist dies bei der Linksabbiegerspur oft der Fall. Bei der Dimensionierung der Linksabbiegerspur ist es wünschenswert, daß eine Überlastung vermieden wird. Damit kann die Behinderung der gradeausfahrenden Fahrzeuge in Grenzen gehalten werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Linksabbiegerspur überlastet wird, soll vielfach auf 5% bzw. 1% begrenzt werden. Mit anderen Worten: die Linksabbiegerspur soll nicht kürzer als die 95%- bzw. die 99%-Rückstaulänge dimensioniert werden. Zur Berechnung der 95%- und 99%-Rückstaulänge an Lichtsignalanlagen wurden in /15//16/ mehrere Annäherungs - Formeln angegeben, die für verschiedene Verkehrsbedingungen angewendet werden können. In /17//18/ wurde ein Verfahren entwickelt, das zum ersten Mal die Percentilen der Rückstaulängen an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen als stetige Funktion angibt.

Bis dahin war keine einfache Formel zur Berechnung der 95%- bzw. 99%-Rückstaulänge bei den vorfahrtgeregelten Knotenpunkten bekannt. Es gibt zwar einige theoretische Herleitungen zur Ermittlung der Verteilung der Rückstaulängen an vorfahrtgeregelten Knotenpunkte unter stationärem Verkehr /4//7/, die mathematisch unter den vorgegebenen Bedingungen als exakt betrachtet werden können. Sie enthalten aber so komplizierte rekursive Operationen, daß eine Lösung nach der 95%- bzw. nach der 99%-Rückstaulänge rechnerisch sehr schwer ist. Für den instationären wurde in /17//18/ ein Verfahren entwickelt, das die Percentilen der Rückstaulängen als stetige Funktion darstellt. Allerdings wurden dort die Percentilen der Rückstaulängen als implizite Funktion angegeben. Sie sind für die praktische Anwendung sehr unhandlich. Deswegen wurden auch umfangreiche Nomogramme erstellt, die für verschiedene Verkehrsbedingungen in der Praxis angewendet werden können. Diese Nomogramme wurden in «Highway Capacity Manual (HCM)» /8/ und in «Verfahren für die Berechnung der Leistungsfähigkeit und Qualität des Verkehrs auf Straßen (D-HCM)» /3/ verwendet. Somit gelten diese als Standardwerte zur Berechnung der 95%- und 99%-Rückstaulänge an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen. Auch Akcelik /1/ hat ein Verfahren zur Ermittlung der 80%-, 90%- und 95%-Rückstaulänge angegeben. Sein Verfahren betrachtet die Percentilen der Rückstaulängen als ein Vielfach der mittleren Rückstaulänge. Dies ist nur bei stationärem Verkehrs plausibel. Bei instationärem Verkehrs - insbesondere bei einem Auslastungsgrad  $x \geq 1$  - überschätzt Akcelik's Verfahren die betrachteten Percentilen der Rückstaulängen.

In diesem Aufsatz wird das Verfahren, das in /17//18/ entwickelt wurde, vereinfacht dargestellt und für die praktische Anwendungen weiter entwickelt. Ein explizite Funktion zur Ermittlung von Percentilen der Rückstaulängen wird angegeben. Mit dieser Funktion können

die 95%-, 99%- und andere Percentilen der Rückstaulänge auf die einfachste Weise berechnet werden. Außerdem werden hier zwei der wichtigsten Nomogramme zur Ermittlung der 95%-Rückstaulängen angegeben, die für manuelle Berechnungen in der Praxis einfach zu benutzen sind.

In diese Aufsatz werden folgende Symbole verwendet:

$q_h$	= Verkehrsstärke des vorfahrtberechtigten Stroms (Hauptstrom)	(Fz/s)
$q_n$	= Verkehrsstärke der wartepflichtigen Stroms (Nebenstrom)	(Pkw-E/s)
$t_g$	= Grenzzeitlücke	(s)
$t_f$	= Folgezeitlücke	(s)
$q_{n,max}$	= maximale Verkehrsstärke des wartepflichtigen Stroms (Nebenstrom)	(Pkw-E/s)
$x$	= Auslastungsgrad	
$\bar{x}$	= $q_n / q_{n,max}$	(-)
$\bar{q}_h$	= mittlere Verkehrsstärke des vorfahrtberechtigten Stroms (Hauptstrom) im betrachteten Zeitintervall bei instationärem Verkehr	(Fz/s)
$\bar{q}_n$	= mittlere Verkehrsstärke des wartepflichtigen Stroms (Nebenstrom) im betrachteten Zeitintervall bei instationärem Verkehr	(Pkw-E/s)
$\bar{q}_{n,max}$	= mittlere maximale Verkehrsstärke des wartepflichtigen Stroms (Nebenstrom) im betrachteten Zeitintervall bei instationärem Verkehr	(Pkw-E/s)
$\bar{x}$	= mittlerer Auslastungsgrad im betrachteten Zeitintervall bei instationärem Verkehr	
	= $\bar{q}_n / \bar{q}_{n,max}$	(-)
$L$	= Leistungsfähigkeit in der Spitzenstunde	
	= $3600 \cdot \bar{q}_{n,max}$	(Pkw-E/h)
$n$	= Rückstaulänge im Wartesystem	(Pkw-E)
$p(n)$	= Wahrscheinlichkeitsdichte der Rückstaulängen $n$	(-)
$P(n)$	= Verteilungsfunktion der Rückstaulängen $n$	(-)
$P_{ii}(n)$	= $P(X > n)$ : Überlastungswahrscheinlichkeit, = Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Rückstaulänge größer als $n$ ist	(-)
$P_{ii}$	= $P_{ii}(0)$ : Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Rückstaulänge größer als 0 ist	(-)
$N_{95}$	= Rückstaulänge, die in 95% aller Fälle nicht überschritten wird	(Pkw-E)
$N_{99}$	= Rückstaulänge, die in 99% aller Fälle nicht überschritten wird	(Pkw-E)
$N$	= Rückstaulänge, die in % aller Fälle nicht überschritten wird = Sicherheit gegen Überschreiten einer vorgegebenen Schlangenlänge	(Pkw-E) (%)
$T$	= Dauer der betrachteten Spitzenstunde beim instationärem Verkehr	(s)
$QT$	= $\bar{q}_{n,max} T$ = Summe der Leistungsfähigkeiten des betrachteten Zeitintervalls beim instationärem Verkehr	(Pkw-E)

## 2. Theoretische Grundlage

Die 95%-Rückstaulänge  $N_{95}$  bzw. die 99%-Rückstaulänge  $N_{99}$  kann ermittelt werden, wenn die Verteilung der Rückstaulängen bekannt ist. Zusätzlich muß die Funktion der Rückstau - Verteilung nach  $N_{95}$  bzw. nach  $N_{99}$  aufgelöst werden können. Für das M/M/1-System - was auch vielfach als eine Annäherung des Wartesystems der vorfahrtsregelten Knotenpunkte eingesetzt wird - gilt folgende Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte (vgl. /11/):

- Wahrscheinlichkeitsdichte der Staulänge im M/M/1-System:

$$p(0) = 1 - x \quad (1a)$$

$$p(n) = (1 - x) \cdot x^n \quad (1b)$$

- Verteilungsfunktion der Staulänge im M/M/1-System:

$$P(n) = \sum_{i=0}^n p(i) = 1 - x \cdot x^n = 1 - x^{n+1} \quad (2)$$

In der Sprechweise der Warteschlangentheorie ist  $n$  die Anzahl der Fahrzeuge in Bedienung (d.h. erste Warteposition) und der Fahrzeuge, die dahinter warten. Aus der Verteilungsfunktion (Gl.2) kann die Überlastungswahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Rückstaulänge größer als  $n$  ist) beim M/M/1-System ermittelt werden:

$$P_{ii}(n) = x^{n+1} \quad (3)$$

Die Perzentilen der Rückstaulänge beim M/M/1-System ergeben sich durch Auflösen der Gl.2 oder 3 nach  $n$  zu:

$$N_{\alpha} = \frac{\ln(P_{ii}(N_{\alpha}))}{\ln(x)} - 1 = \frac{\ln(1 - P(N_{\alpha}))}{\ln(x)} - 1 = \frac{\ln(1 - \frac{\alpha}{100})}{\ln(x)} - 1 \quad (4a)$$

Die 95%-Rückstaulänge kann z.B. wie folgt dargestellt werden:

$$N_{95} = \frac{\ln(1 - \frac{95}{100})}{\ln(x)} - 1 = \frac{\ln(0.05)}{\ln(x)} - 1 \quad (4b)$$

Die Gl.4 zeigt die erste - und die einfachste - Annäherungsformel zur Ermittlung der Perzentilen der Rückstaulänge an vorfahrtsregelten Knotenpunkten unter der Annahme, daß das Wartesystem an vorfahrtsregelten Knotenpunkten durch ein M/M/1-System angenähert werden kann. Bei dieser Annahme wird unterstellt, daß die Ankünfte der wartepflichtigen Fahrzeuge poisson - verteilt und die Bedienungszeiten der wartepflichtigen Fahrzeuge negativ - exponential - verteilt sind. Die Poisson - Verteilung der Ankünfte kann unter normalen Verkehrsbedingungen (freier Verkehr) als angebracht angesehen werden. Die negative Exponential - Verteilung der Bedienungszeiten erweist sich aber als nicht immer zutreffend.

### 3. Verteilungsfunktion der Rückstaulänge an Knotenpunkten ohne LSA

Für den stationären Verkehr kann eine theoretisch - empirische Annäherungsformel zur Beschreibung der Verteilung der Rückstaulängen an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten vorgestellt werden, die die exakten - aber komplizierten - Herleitungen unter stationärem Verkehr so angleicht, daß die Abweichungen für die praktischen Anwendungen vernachlässigt werden können. Auch die Verteilung der Rückstaulängen unter instationärem Verkehr an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten kann anhand der Transformationstechnik von Kimber und Hollis (vgl. /10/) ermittelt werden. Nach diesen Annäherungsformeln können dann beliebige Perzentilen der Rückstaulängen unter stationärem und instationärem Verkehr leicht berechnet werden.

Für den tatsächlichen Verkehrsablauf der Verkehrsströme an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten (M/G2/1-System) hat Heidemann /7/ anhand der von Tanner /14/ entwickelten erzeugenden Funktion der Rückstaulängen die Wahrscheinlichkeitsdichte der Rückstaulängen angeben können. Das Ergebnis gilt an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten exakt unter den Bedingungen, daß

- die Verkehrsstärke über die Zeit konstant ist,
- die Zeitlücken im vorfahrtberechtigten Hauptstrom ( $q_h$ ) negativ - exponential - verteilt sind,
- die Grenzzeitlücke  $t_g$  und die Folgezeitlücke  $t_f$  für den wartepflichtigen Nebenstrom ( $q_n$ ) feste Werte besitzen und
- die Ankünfte des wartepflichtigen Fahrzeuge poisson - verteilt sind.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Rückstaulängen an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten nach Heidemann lautet:

$$p(0) = h_1 \cdot h_3 \cdot (q_h + q_n) \quad (5a)$$

$$p(1) = p(0) \cdot h_3 \cdot q_n \cdot \left[ \exp(q_n \cdot t_f) - (t_g - t_f) \cdot h_2 \right] - q_n \cdot h_1 \cdot h_3$$

$$p(n) = p(n-1) \cdot h_3 \cdot q_n \cdot \left[ \exp(q_n \cdot t_f) - (t_g - t_f) \cdot h_2 \right] - h_3 \cdot \sum_{m=0}^{n-2} p(m) \cdot \left[ h_2 \cdot \frac{((t_g - t_f) \cdot q_n)^{n-m}}{(n-m)!} + \frac{(-q_n \cdot t_f)^{n-m} \cdot \exp(q_n \cdot t_f)}{t_f \cdot (n-m-1)!} \right] \quad (5b)$$

für  $n \geq 2$

mit

$$h_1 = \exp(-q_h \cdot t_g) + (\exp(-t_f \cdot q_h) - 1) \cdot \frac{q_n}{q_h}$$

$$h_2 = q_h \cdot \exp(-q_h \cdot t_g - q_n \cdot (t_g - t_f))$$

$$\frac{1}{h_3} = h_2 \cdot q_n \cdot \exp(-t_f \cdot q_h)$$

(In die Veröffentlichung von Heidemann (1991) hat sich ein Druckfehler eingeschlichen (dort Gl. 4.2: im letzten Glied fehlt  $h_3$ ; Gl. 4.3: m muß an 2 Stellen als Potenz geschrieben werden:  $n-m$ )).

Die Verteilungsfunktion kann durch die Summation der Wahrscheinlichkeitsdichte (Gl.5) gebildet werden:

$$P(n) = \sum_{i=0}^n p(i) \quad (5c)$$

Die Verteilungsfunktion der Rückstaulängen an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten nach Heidemann (Gl.5) kann erst durch mehrfache Rekursionen errechnet werden. Eine Auflösung nach der Rückstaulänge ist analytisch nicht möglich. Die 95%- bzw. 99%-Rückstaulänge kann demnach nicht direkt ermittelt werden.

In /17//18/ wurde - in Anlehnung an das M/M/1-System - eine Annäherungsformel durch Regression bestimmt, die die Ergebnisse von Heidemann genau genug annähert und dennoch einfach genug ist, um die 95%- bzw. die 99%-Rückstaulänge an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten zu ermitteln.

Die durch Regression bestimmte Verteilungsfunktion der Rückstaulängen lautet

$$\begin{aligned} P(n) &= \sum_{i=0}^n p(i) \\ &= 1 - x^a \cdot x^{a \cdot b \cdot n} \\ &= 1 - x^{a \cdot (b \cdot n + 1)} \end{aligned} \quad (6)$$

$(\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = 1)$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1 + k1 \cdot \frac{t_g - t_f}{t_f} \cdot q_h} \quad \text{mit } k1 = 0.45 \\ b &= \frac{k2}{1 + k3 \cdot \frac{t_g}{t_f} \cdot q_h} \quad \text{mit } k2 = 1.51, k3 = 0.68 \end{aligned} \quad (7a)$$

Wenn  $a$  und  $b$  gleich 1 gesetzt werden, geht die Lösung über in das M/M/1-System. Wenn  $t_g = t_f$  nähert sich die Lösung an das M/G/1-System.  $k1$ ,  $k2$  und  $k3$  sind durch Regression aus den mit der Formel von Heidemann berechneten Rückstau - Wahrscheinlichkeiten aus ca. 30 000 Datenpunkten ermittelt worden.

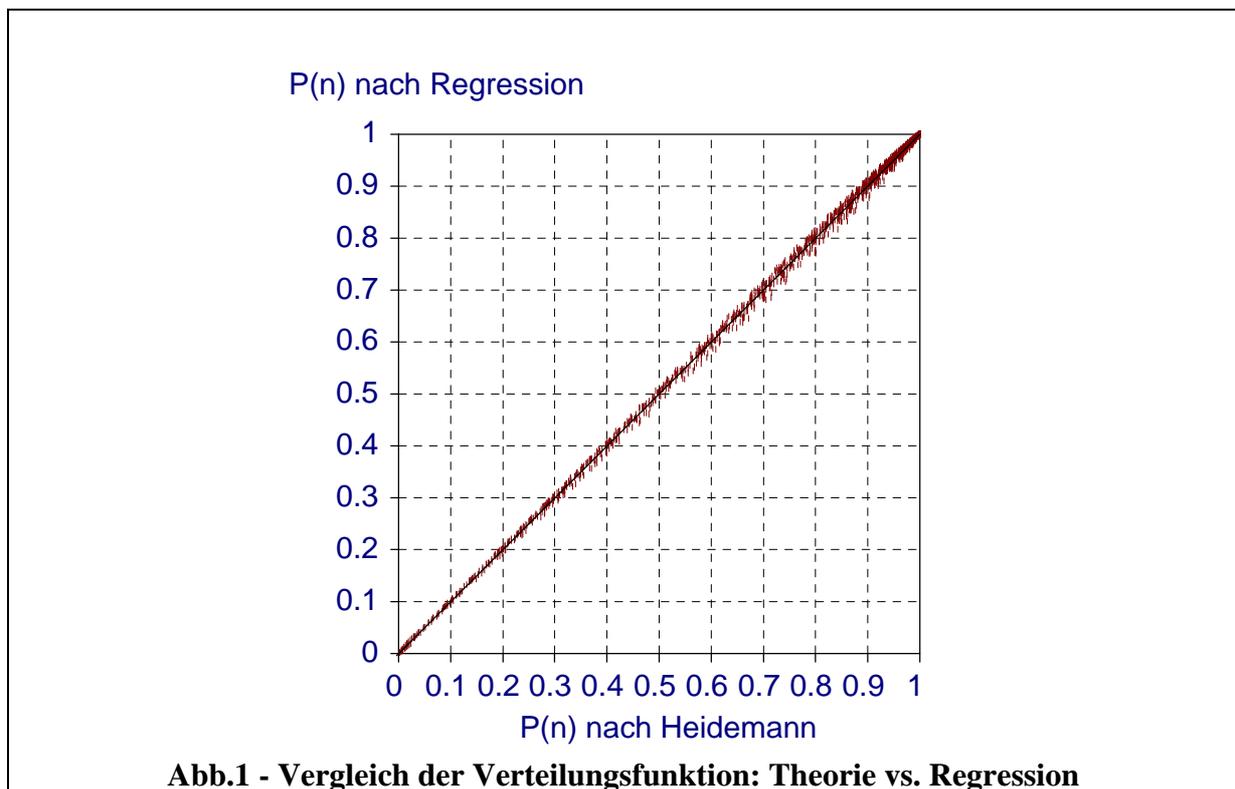
Vielfach gilt an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen (nicht jedoch an Kreisverkehr):

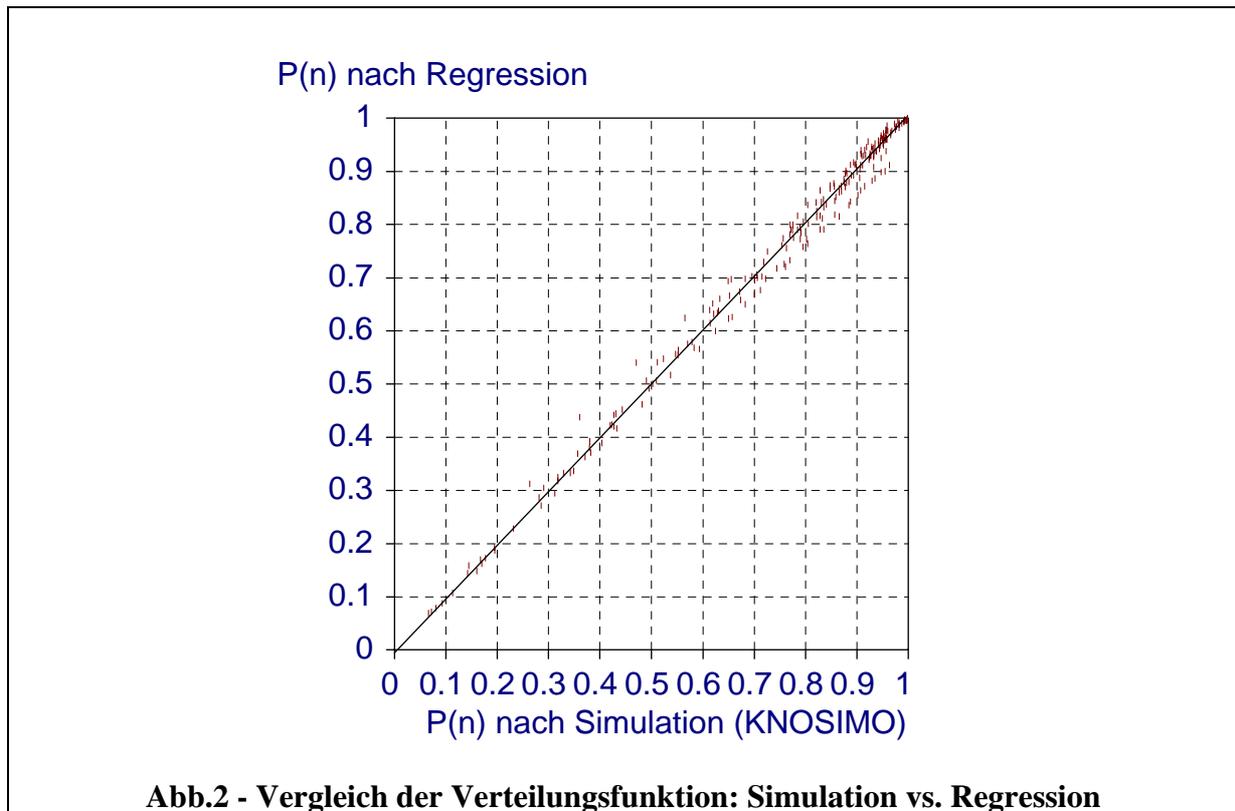
$$t_f \approx 0.6 \cdot t_g$$

Setzt man dies in Gl.7a ein, erhält man

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{1}{1+0.3 \cdot q_h} \\ b &\approx \frac{1.51}{1+1.13 \cdot q_h} \end{aligned} \quad (7b)$$

Die Ergebnisse der Annäherungsformel als Verteilungsfunktion (Gl.6) und die Ergebnisse nach Heidemann (Gl.5) sind in Abb.1 gegenübergestellt. Die Übereinstimmung kann als sehr gut beurteilt werden.





Es wurden zur Kontrolle die Ergebnisse nach der Annäherungsformel (Gl.6) auch mit Simulationsergebnissen (KNOSIMO /12/) verglichen. Der Vergleich ist in Abb.2 dargestellt. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die relativ größere Abweichung zwischen den Annäherungsergebnissen und den Simulationsergebnissen ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß bei der Simulation

- die Zeitlücken im Hauptstrom hyper - erlang - verteilt sind,
- die Grenz- und Folgezeitlücken für den Nebenstrom verschoben - erlang - verteilt sind,
- die Anzahl und die Dauer der Simulationen begrenzt sind und
- die Simulation naturgemäß mit stochastischen Schwankungen behaftet sind.

Insofern unterscheiden sich die mathematischen Voraussetzungen zwischen den Annahmen, die Heidemann getroffen hat und den realistischen Bedingungen des Modells KNOSIMO.

Für den instationären Verkehrs wurde in /17//18/ anhand der Transformationstechnik von Kimber und Hollis (vgl. /10/) die folgende Verteilungsfunktion der Rückstaulängen ermittelt:

$$P(n) = \begin{cases} 1 - \left(\bar{x} - \frac{2 \cdot n}{QT}\right)^{a \cdot (b \cdot n + 1)} & \text{für } \bar{x} - \frac{2 \cdot n}{QT} \geq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8)$$

#### 4. Anwendungsmöglichkeiten der Annäherungsformel

Die Annäherungsformel zur Beschreibung der Verteilungsfunktion der Rückstaulängen an vorfahrtgeregelten Knotenpunkten (Gl.6) kann für folgende Anwendungsmöglichkeiten eingesetzt werden:

##### - Unter stationärem Verkehr

1. Überlastungswahrscheinlichkeit der Linksabbiegerspur mit  $n$  Stauplätzen  $P_{ii}(n)$ :

$$P_{ii}(n) = 1 - P(n) = x^{a \cdot (b \cdot n + 1)} \quad (9)$$

2. Auslastungsgrad  $x$  mit vorgegebenem Perzentilen  $N$ :

$$x = (1 - P(N_\alpha))^{1/a \cdot (b \cdot N_\alpha + 1)} = \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)^{1/a \cdot (b \cdot N_\alpha + 1)} \quad (10)$$

Z. B.: wenn während 95% aller Zeit die Rückstaulänge von  $N=10$  Fz nicht überschritten darf - d.h.:  $N_{95}=10$  - muß

$$x \leq (1 - 0.95)^{1/a \cdot (b \cdot 10 + 1)} = (0.05)^{1/a \cdot (b \cdot 10 + 1)}$$

eingehalten werden.

3. Perzentilen der Rückstaulänge  $N$ :

$$N_\alpha = \left(\frac{\ln(P_{ii}(N_\alpha))}{a \cdot \ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{1}{b} = \left(\frac{\ln(1 - P(N_\alpha))}{a \cdot \ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{1}{b} = \left(\frac{\ln(1 - \frac{\alpha}{100})}{a \cdot \ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{1}{b} \quad (11a)$$

Z. B.: die Rückstaulänge, die während 95% aller Zeit nicht überschritten wird:

$$N_{95} = \left(\frac{\ln(1 - \frac{95}{100})}{a \cdot \ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{1}{b} = \left(\frac{\ln(0.05)}{a \cdot \ln(x)} - 1\right) \cdot \frac{1}{b} \quad (11b)$$

##### - Unter instationärem Verkehr

Unter instationärem Verkehr versteht man den Verkehrszustand, bei dem die Verkehrsstärke über die Zeit nicht konstant bleibt. Die Rückstaulängen aller Arten (mittlere, 95%- und 99%-Rückstaulänge) sind demnach auch von der Zeit abhängig. Die Betrachtungsweise der Instationarität wird darauf beschränkt, daß nur ein bestimmter Zeitabschnitt (z.B. die Spitzenstunde) behandelt wird. Die mittleren Werte der Rückstaulängen werden dann über diesen Zeitabschnitt ermittelt.

1. Überlastungswahrscheinlichkeit der Linksabbiegerspur mit  $n$  Stauplätzen  $P_{ii}(n)$ :

$$P_{ii}(n) = 1 - P(n) = \begin{cases} \left(\bar{x} - \frac{2 \cdot n}{QT}\right)^{a \cdot (b \cdot n + 1)} & \text{für } \bar{x} - \frac{2 \cdot n}{QT} \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (12)$$

2. Auslastungsgrad  $\bar{x}$  mit vorgegebenem Perzentilen  $N$ :

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot N_\alpha}{QT} + (P_{ii}(N_\alpha))^{\frac{1}{a \cdot (b \cdot N_\alpha + 1)}} = \frac{2 \cdot N_\alpha}{QT} + (1 - P(N_\alpha))^{\frac{1}{a \cdot (b \cdot N_\alpha + 1)}} = f(N_\alpha) \quad (13)$$

3. Perzentilen der Rückstaulänge  $N$ :

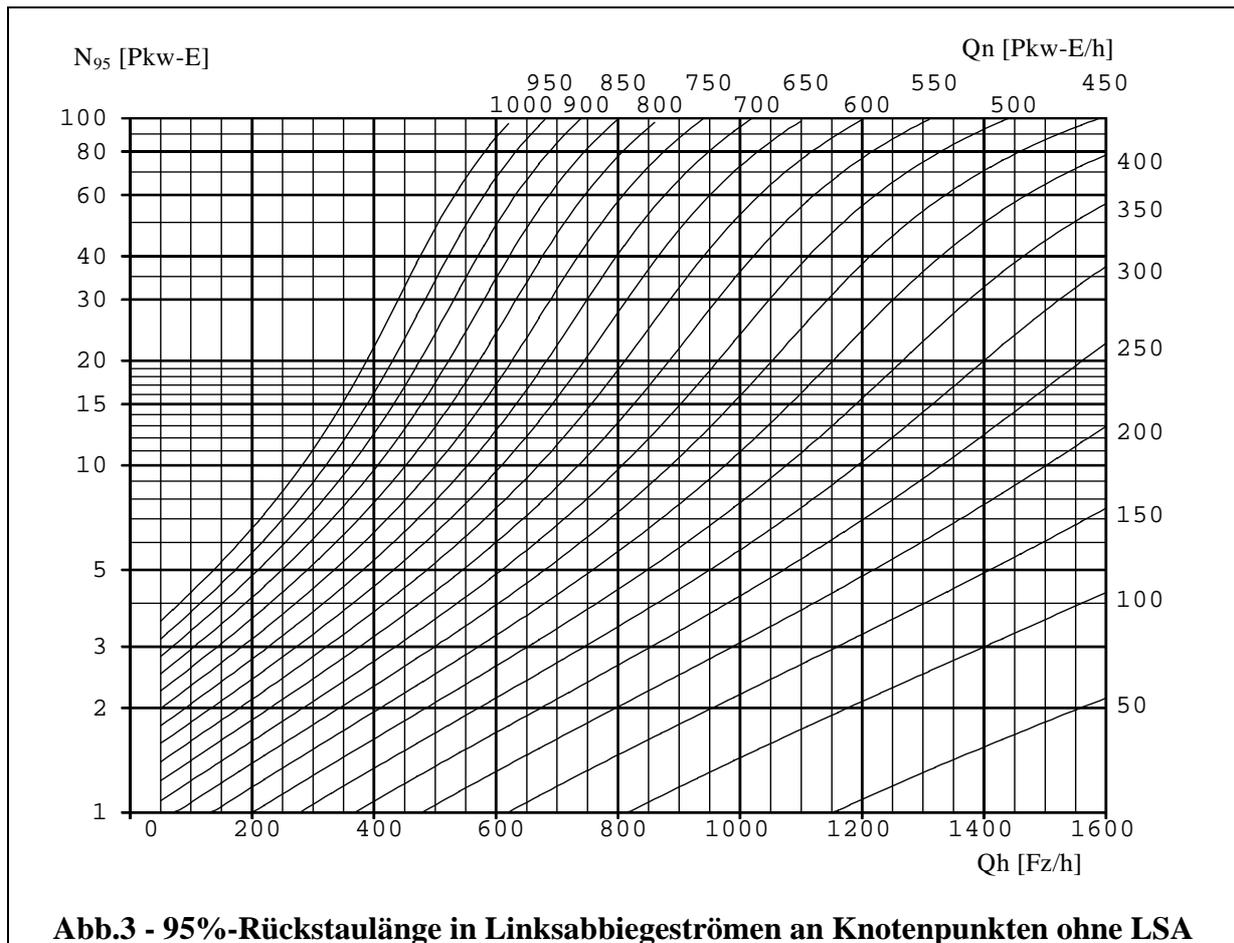
$$N_\alpha = f^{-1}(N_\alpha) = g(\bar{x}(N_\alpha)) \quad (14)$$

Die Gl.14 ist die Umkehrfunktion von Gl.13. Da die Gl.13 nach  $N$  nicht auflösbar ist, kann  $N$  nicht als eine explizite Funktion von  $\bar{x}$  dargestellt werden.  $N$  ist aber durch die Gl.13 eindeutig implizit definiert. So können mit Hilfe der Gl.13 Nomogramme zur Ermittlung der 95%- bzw. 99%-Rückstaulänge hergestellt werden.

In den Gl.9 bis 14 sind die Parameter  $a$  und  $b$  nach Gl.7 einzusetzen.

## - Ströme zweiten Rangs

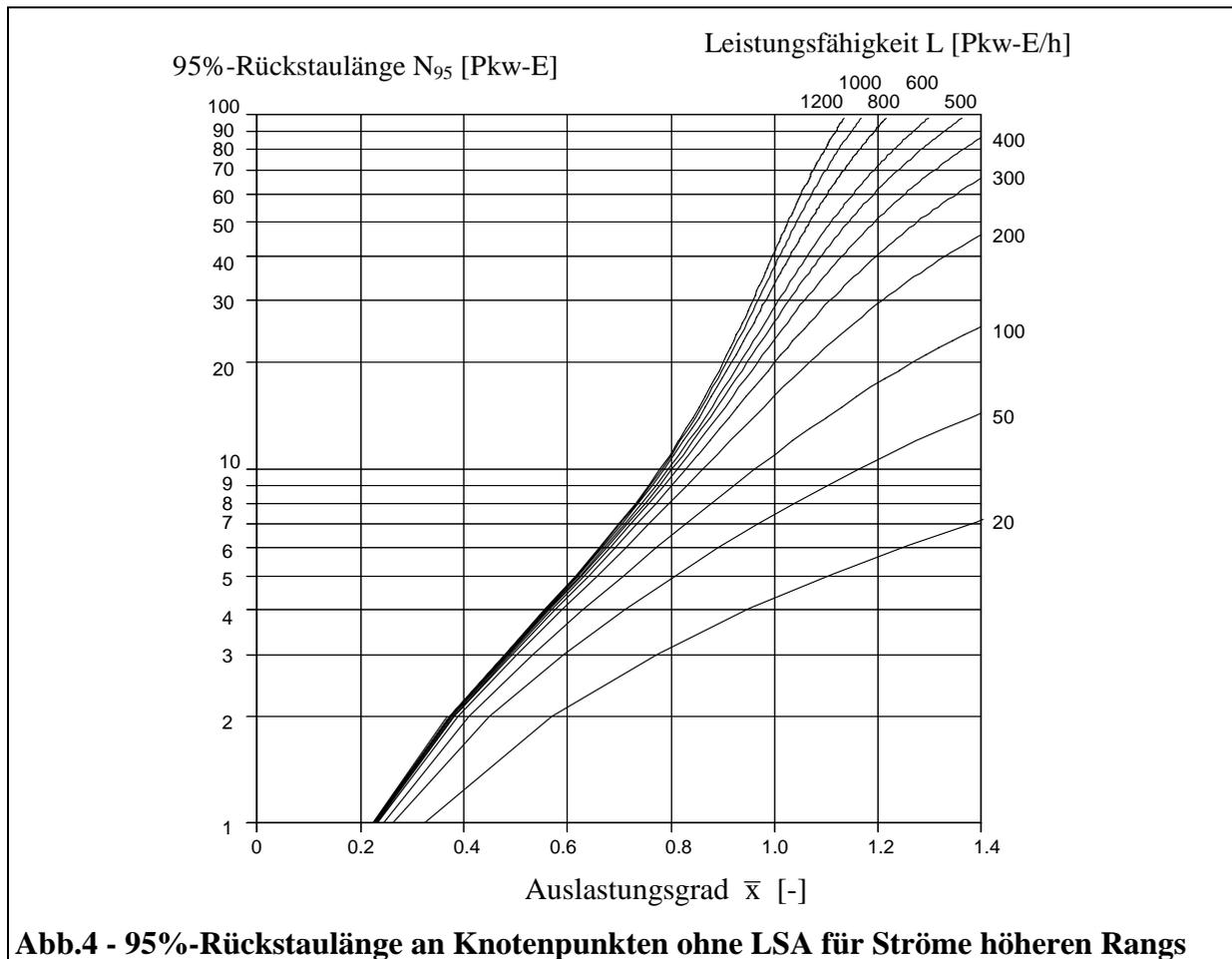
Die vorhergehenden Herleitungen konzentrieren sich auf einen Haupt- und einen Nebenstrom. Sie gelten demnach nur für Ströme des Rangs 2 (im Sinne von /12/ und /13/) an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen. Die so hergeleiteten Formeln können im exakten Sinne nur für die Linksabbiegeströme auf den Hauptstraße und die Rechtseinbieger auf der Nebenstraße verwendet werden. Für die 95%- und 99%-Rückstaulänge in Strömen zweiten Rangs werden Nomogramme hergestellt, die bei der praktischen Anwendung leicht benutzt werden können. Abb.3 zeigt ein Nomogramm zur Ermittlung der 95%-Rückstaulängen in Linksabbiegeströmen auf der Hauptstraße. Dieses Nomogramm wurde mit  $t_g$ - und  $t_f$ -Werten von Harders /5/ für den Linksabbieger bei der Geschwindigkeit auf der Hauptstraße  $V=50$  km/h erstellt. Da nach den neusten Kenntnissen die  $t_g$ - und  $t_f$ -Werte bei allen anderen Geschwindigkeit auf der Hauptstraße ungefähr die gleichen Werte annehmen wie bei  $V=50$  km/h, ist dieses Nomogramm auch allgemein für andere Geschwindigkeiten verwendbar.



### - Ströme höheren Rangs

Die vorhergehenden Herleitungen konzentrieren sich auf einen Haupt- und einen Nebenstrom. Sie gelten demnach nur für Ströme des Rangs 2. Eine Beurteilung der Rückstaulängen in Strömen höheren Rangs (Linkseinbieger und Geradeausfahrer aus der untergeordneten Straße) oder gar in Mischströmen ist mit diesen Formeln noch nicht möglich.

Durch die Zunahme der Komplexität der Verkehrsbedingungen (mehrere Hauptströme und unterschiedliche Grenz- und Folgezeitlücken) nähert sich das Wartesystem zunehmend an das M/M/1-System an. Deshalb können zur Berechnung der Rückstaulänge der Ströme höheren Rangs die Formeln für das M/M/1-System als Annäherung verwendet werden. Die dadurch zu erwartende Abweichung der Rückstaulänge ist normalerweise in der Größenordnung von einem Fahrzeug. Ersetzt man die Parameter  $a$  und  $b$  in allen vorhergehenden Formeln mit dem Wert 1, erhält man automatisch die vereinfachten Formeln zur Berechnung der Rückstaulänge unter stationärem und instationärem Verkehr. In Abb.4 ist ein Nomogramm zur Ermittlung der 95%-Rückstaulänge bei einem M/M/1-System dargestellt. Man kann mit vorgegebenen Auslastungsgrad des Nebenstroms  $x$  und mit der vorgegebenen gesamten Leistungsfähigkeit des Nebenstroms in der Spitzenstunde  $L$  (in Fz/h) auf der y-Achse die zu ermittelnde Rückstaulänge ablesen. In diesem Nomogramm wurde ein Spitzenintervall  $T=1h$  verwendet.



**Abb.4 - 95%-Rückstaulänge an Knotenpunkten ohne LSA für Ströme höheren Rangs**

Für das M/M/1 - System kann die Gl.13 vereinfacht werden in:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot N_{\alpha}}{QT} + (P_{ii}(N_{\alpha}))^{\frac{1}{N_{\alpha}+1}} \quad (15)$$

Entwickelt man das zweite Glied in eine Taylor - Reihe und nimmt man als Vereinfachung nur die ersten zwei Glieder, erhält man eine Annäherung von Gl.15:

$$\bar{x} \approx \frac{2 \cdot N_{\alpha}}{QT} + 1 + \ln(P_{ii}(N_{\alpha})) \cdot \frac{1}{N_{\alpha}+1} \quad (16)$$

Löst man diese Gleichung nach  $N_{\alpha}$  auf, erhält man die erste Annäherungsgleichung

$$N_{\alpha,1} \approx \frac{QT}{4} \left\{ \bar{x} - 1 - \frac{2}{QT} + \sqrt{\left[ \frac{2}{QT} - (1 - \bar{x}) \right]^2 - \frac{8 \ln(P_{ii}(N_{\alpha}))}{QT}} \right\} \quad (17)$$

Da das Glied  $2/QT$  im Vergleich zu  $(1 - x)$  immer sehr kleine Werte annimmt, kann man es ebenfalls vernachlässigen. So erhält man die zweite Annäherungsgleichung

$$N_{\alpha,2} \approx \frac{QT}{4} \left\{ \bar{x} - 1 + \sqrt{(1 - \bar{x})^2 - \frac{8 \ln(P_{ii}(N_\alpha))}{QT}} \right\} \quad (18)$$

Die Gl.18 weist relativ große Abweichung bei  $\bar{x} < 1$  im Vergleich zu den exakten Werten (implizit definiert durch die Gl.13) auf (vgl. Abb.5). Um diese Abweichung auszugleichen, wird das zweite Glied unter der Wurzel aus rein pragmatischen Gründen mit dem Auslastungsgrad  $\bar{x}$  multipliziert. Die dritte und endgültige Annäherungsgleichung lautet dann

$$N_{\alpha,3} \approx \frac{QT}{4} \left\{ \bar{x} - 1 + \sqrt{(1 - \bar{x})^2 + \frac{8\bar{x}}{QT} \cdot [-\ln(P_{ii}(N_\alpha))]} \right\} \quad (19a)$$

Die 95%-Rückstaulänge lautet demnach

$$N_{95} \approx \frac{QT}{4} \left\{ \bar{x} - 1 + \sqrt{(1 - \bar{x})^2 + \frac{8\bar{x}}{QT} \cdot [-\ln(0.05)]} \right\} \quad (19b)$$

$$\approx \frac{QT}{4} \left\{ \bar{x} - 1 + \sqrt{(1 - \bar{x})^2 + 3.0 \cdot \frac{8\bar{x}}{QT}} \right\}$$

Die Gl.19 entspricht der Vereinfachung, daß unter stationärer Bedingung

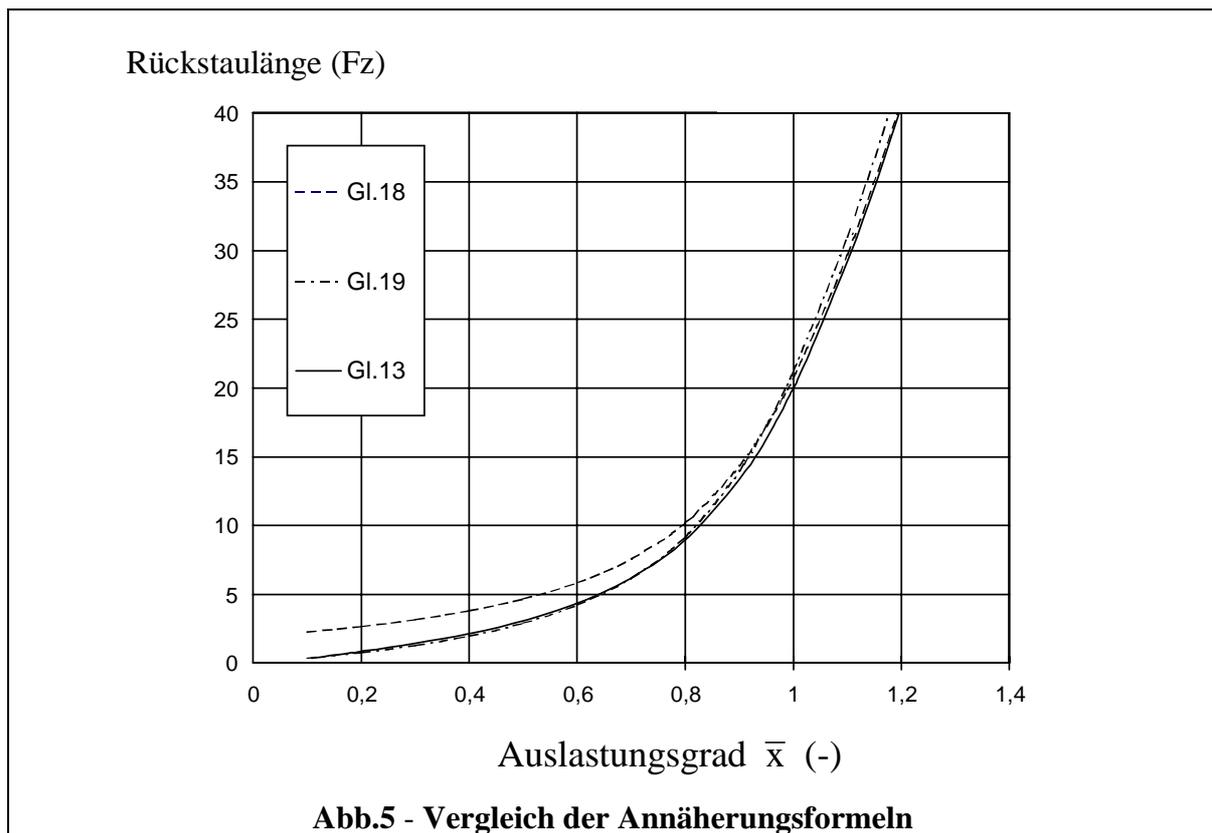
$$N_{\alpha,3,stat.} \approx \frac{x}{1-x} [-\ln(P_{ii}(N_\alpha))] \approx \bar{N} \cdot [-\ln(P_{ii}(N_\alpha))] \quad (20a)$$

und

$$N_{95,stat.} \approx \bar{N} \cdot [-\ln(0.05)] \approx 3 \cdot \bar{N} \quad (20b)$$

eingesetzt wird. Praktisch kann man diese Gleichung z.B. so verstehen: Die 95%-Rückstaulänge an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen ist unter stationärer Verkehrsbedingung etwa 3 mal so groß wie der mittlere Rückstau.

Abb.5 zeigt den Vergleich zwischen den Gl.13, 18 und 19. Es zeigt sich daß die Gl.19 eine gute Annäherung der Gl.13 ist. Die Abweichung liegt im allen Bereichen unter 1 Fz oder unter 5%.



## 5. Zusammenfassung und Offene Fragen

### - Zusammenfassung

Es wurden Verteilungsfunktionen der Rückstaulängen an Knotenpunkten ohne Signalanlagen annäherungsweise für stationären (Gl.6) und instationären (Gl.8) Verkehr angegeben. Demnach können weitere Parameter, die auf die Rückstaulänge bezogen sind, ermittelt werden. Z. B. können die Percentilen der Rückstaulänge berechnet werden (Gl.11 und Gl.14).

Zur Erleichterung von Handarbeit in der Praxis wurden Nomogramme zur Ermittlung der 95%-Rückstaulänge hergestellt. Abb.3 ist das Nomogramm zur Ermittlung der 95%-Rückstaulänge der Linksabbiegeströme auf der bevorrechtigten Straße. Dies kann für die Dimensionierung der Linksabbiegespuren verwendet werden. In diesem Nomogramm kann man die Rückstaulänge auf der y-Achse ablesen. Die Ausgangsparameter sind

- Verkehrsbelastung des Hauptstroms ( $q_h$ ) in Fz/h
- Verkehrsbelastung des Nebenstroms (Linksabbieger) ( $q_n$ ) in Pkw-E/h

Die ermittelte 95%-Rückstaulänge wird in Pkw-E angegeben.

Zur Berechnung der 95%-Rückstaulänge in Strömen höheren Rangs oder in Mischströmen wird empfohlen, die Formeln, die auf der Basis eines M/M/1-Systems ermittelt wurden, zu verwenden. Diese Formeln kann man leicht herleiten, indem man in allen Formeln, die auf der Basis eines M/G2/1-Systems ermittelt wurden,  $a$  und  $b$  mit dem Wert 1 ersetzt. Abb.4

ist das Nomogramm zur Ermittlung der Rückstaulängen höheren Rangs. In diesem Nomogramm wird die Rückstaulänge auf der y-Achse abgelesen. Die Ausgangsparameter sind

- Auslastungsgrad des Nebenstroms  $x$
- Leistungsfähigkeit des Nebenstroms in der Spitzenstunde  $L$  in Pkw-E/h

Die ermittelte 95%-Rückstaulänge wird in Pkw-E angegeben.

Die Gl.19 bietet eine explizite Funktion zur Ermittlung der Percentilen der Rückstaulängen für Ströme höheren Rangs unter instationärem Verkehr.

Da das Nomogramm in Abb.4 und die Gl.19 nur von der Leistungsfähigkeit des Nebenstroms in der Spitzenstunde  $QT$  und vom Auslastungsgrad des Nebenstroms  $x$  abhängig sind, kann es auch bei der Ermittlung der 95%-Rückstaulänge der Ströme des 2. Rangs angewendet werden, falls dort nur die Leistungsfähigkeit und die Verkehrsbelastung des Nebenstroms bekannt sind. Die dadurch entstehenden Abweichungen - die liegen im normalen Fall in der Größenordnung von einem Fahrzeug - müssen dann in Kauf genommen werden.

### - Offene Fragen

Die Ergebnisse eines M/G2/1-Systems nach Heidemann sind von den Bedingungen ausgegangen, daß

- die Zeitlücken im vorfahrtsberechtigten Hauptstrom ( $q_h$ ) **negativ - exponential - verteilt**
- die Grenzzeitlücke  $t_g$  und die Folgezeitlücke  $t_f$  für den wartepflichtigen Nebenstrom ( $q_n$ ) **feste Werte** und
- die Ankünfte des wartepflichtigen Fahrzeuge **poisson - verteilt**

sind.

Es bleiben deswegen folgende Fragen zur Berechnung der Rückstaulängen bei einem M/G2/1-System offen:

1. Der Einfluß der Teilgebundenheit im Hauptstrom.  
Z. B.: die Zeitlücken im Hauptstrom sind nicht **negativ - exponential** - sondern **hyper - erlang - verteilt**.
2. Der Einfluß der Verteilung der Grenzzeitlücken  $t_g$  und der Folgezeitlücken  $t_f$ .  
Z. B.: die Zeitlücken  $t_g$  und  $t_f$  sind keine **feste Werte** sondern **verschoben - erlang - verteilt**.
3. Der Einfluß der Teilgebundenheit im Nebenstrom.  
Z. B.: die Zeitlücken im Nebenstrom sind nicht **negativ - exponential** - (entspricht **poisson - verteilten** Ankünften) sondern **hyper - erlang - verteilt**.

Die 3 Fragen können zuerst nur qualitativ beantwortet werden:

1. Die Teilgebundenheit des Hauptstroms mindert die Leistungsfähigkeit des Nebenstroms und erhöht demnach die Rückstaulängen aller Arten im Nebenstrom /2/.
2. Die Verteilung der Grenzzeitlücken  $t_g$  mindert die Leistungsfähigkeit des Nebenstroms und erhöht demnach die Rückstaulängen aller Arten; die Verteilung der Folgezeitlücken  $t_f$  erhöht die Leistungsfähigkeit des Nebenstroms und verkürzt demnach die die Rückstaulängen aller Arten /2//7/.

3. Die Teilgebundenheit des Nebenstroms verkürzt die mittlere Rückstaulänge im Nebenstrom /7//9/ und verkürzt demnach auch die Rückstaulänge.

Betrachtet man die o. g. 3 Einflüsse zusammen, kann man feststellen, daß sich diese Einflüsse hinsichtlich der Rückstaulänge weitergehend gegenseitig aufheben /7//9/. So könnte man davon ausgehen, daß die Überlagerung der 3 Einflüsse, wie sie der Wirklichkeit entspricht, insgesamt nur unbedeutende Abweichungen von der dargestellten Formel bewirken.

Die Berechnung der Rückstaulängen für die Ströme höheren Rangs kann nicht abschließend behandelt werden. Es wurde lediglich eine pragmatische Lösung vorgeschlagen, die auf der Annahme eines M/M/1-System basiert. Diese Lösung liefert jedoch für die Praxis ausreichende Genauigkeit für die Beurteilung der Verkehrsqualität.

Abschließend bleibt festzustellen: Mit den hier gegebenen Herleitungen wird eine praxisnahe und realistische Berechnungsmethode für die Lösung des Rückstaus an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen aufgezeigt.

Es wird empfohlen: bei Ermittlung der 95%-Rückstaulänge in Linksabbiegeströmen auf der Hauptstraße soll das Nomogramm in Abb.3 verwendet werden; bei allen anderen Strömen sollte das Nomogramm in Abb.4 eingesetzt werden. Die Gl.19 kann als Annäherung bei Ermittlung aller Perzentilen der Rückstaulängen unter allgemeinen Verkehrsbedingungen verwendet werden.

Beim Bedarf können auch zwei Nomogramme zur Ermittlung der 99%-Rückstaulänge beim Autor angefordert werden.

### Literaturverzeichnis

- 1). Akcelik, R.; Chung, E.: Traffic Performance Model for Unsignalised Intersections and Fixed-Time Signal. Proceedings of the Second International Symposium on Highway Capacity, Sydney, 1994, Akcelik, R. (ed.), Volume 1, pp.21-50.
- 2). Ashworth, R.: The Capacity of Priority-Type Intersections with a Non-Uniform Distribution of Critical Acceptance Gaps. Transportation Research, Vol. 3, 1969.
- 3). Brilon, W. et al.: Verfahren für die Berechnung der Leistungsfähigkeit und Qualität des Verkehrsablaufs auf Straßen (D-HCM). Schriftenreihe Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik. Heft 669, 1994.
- 4). Dorfwirth, J.R.: Wartezeit und Rückstau von Kraftfahrzeugen an nicht signalgeregelten Verkehrsknoten. Forschungsarbeiten aus dem Straßenwesen, Neue Folge, Heft 43, Kirschbaum Verlag, 1961.
- 5). Harders, J.: Leistungsfähigkeit nicht signalgeregelter städtischer Verkehrsknoten. Schriftenreihe Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 76, 1968.
- 6). Harders, J.: Grenz- und Folgezeitlücken als Grundlage für die Berechnung der Leistungsfähigkeit von Landstraßen. Schriftenreihe Straßenbau und Straßenverkehrstechnik, Heft 216, Bonn, 1976.
- 7). Heidemann, D.: Queue length and waiting-time distributions at priority intersections. Transportation Research B Vol. 25B, (4) pp. 163-174, 1991.
- 8). Highway Capacity Manual (HCM). Special Report 209, Third Edition, Transportation Research Board, National Research Council, Washington, 1994..
- 9). Großmann, M.: Methoden zur Berechnung und Beurteilung von Leistungsfähigkeit und Verkehrsqualität an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen (Dissertation). Schriftenreihe des Lehrstuhls für Verkehrswesen der Ruhr-Universität Bochum, Heft 8, 1991.
- 10). Kimber, R.M.; Hollis, E.M.: Traffic queue and delays at road junctions. TRRL Laboratory Report, LR 909, 1979.
- 11). Kleinrock, L.: Queuing System, Vol. 1: Theory. John Wiley + Sons, New York.
- 12). KNOSIMO: Simulationsprogramm für Knotenpunkte ohne Lichtsignalanlagen. Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Verkehrswesen. 1991.
- 13). Merkblatt zur Berechnung der Leistungsfähigkeit von Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen. Herausgeber: Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen. 1991.
- 14). Tanner, J.C.: A theoretical analysis of delays at an uncontrolled intersection. Biometrika, 49, 163-170, 1962.
- 15). Wu, N.: Rückstaulängen an Lichtsignalanlagen unter verschiedenen Verkehrsbedingungen. Arbeitsblatt des Lehrstuhls für Verkehrswesen der Ruhr-Universität Bochum, Nr. 6, 1992.
- 16). Wu, N.: Rückstaulängen an Lichtsignalanlagen unter verschiedenen Verkehrsbedingungen. Straßenverkehrstechnik, Heft 5, 1996.
- 17). Wu, N.: Rückstaulängen an Knotenpunkten ohne Lichtsignalanlagen. Arbeitsblatt des Lehrstuhls für Verkehrswesen der Ruhr-Universität Bochum, Nr. 7, 1992.
- 18). Wu, N.: An Approximation for the Distribution of Queue Lengths at Unsignalised intersections. Proceedings of the Second International Symposium on Highway Capacity, Sydney, 1994, Akcelik, R. (ed.), Volume 2, pp.717-736.