3. Arbeitsgemeinschaft (25.11.2002)

6. Portfolio-Selection (2-Wertpapier-Fall)

Zur Erinnerung: unter *naiver Diversifikation* versteht man das Zusammenfassen einer „großen“ Anzahl von Investitionen, so daß eine Risikominderung wahrscheinlich durch die Nutzung von (nicht näher analysierten) Risikoverbundeffekten erreicht wird.
Hier soll aber eine intelligente Risikodiversifikation statt finden, d.h. eine bewußte Zusammenstellung einer „hinreichenden“ Anzahl von Investitionen, deren Renditeverläufe möglichst wenig positiv korreliert sind.
Wenn n Wertpapiere im Portfolio sind, man also n Varianzen/Standardabweichungen hat, so kann man die Beziehungen zwischen den Wertpapieren durch $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kovarianzen beschreiben.

Ausgangsdaten

Wertpapier A: $E(r_A) = 5; \sigma_A = 6$

Wertpapier B: $E(r_B) = 3; \sigma_B = 2$

Zunächst wird eine Korrelationsbeziehung zwischen den Wertpapieren von $\rho_{A,B} = -0{,}65$ (Abweichend von der Aufgabenstellung) angenommen.
Das Mischungsverhältnis der Wertpapiere wird zuerst bestimmt. Dabei ist x der Anteil von Wertpapier A und 1-x der Anteil von Wertpapier B am Portfolio. Gesucht ist das Mischungsverhältnis der Wertpapiere, bei dem das Risiko des Portfolios, gemessen mit der Standardabweichung, minimal ist.

Formel 7: $$\sigma_P = \sqrt{x^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-x)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot \operatorname{cov}(r_A, r_B)}$$

In obiger Formel sind alle Teile unter der Wurzel positiv, bis auf die Kovarianz. Sie stellt rechentechnisch die einzige Größe dar, die negativ werden kann und somit eine Senkung des Portfoliorisikos bewirken kann. Indem man die Kovarianz in Formel 7 anders ausdrückt, läßt sich die Senkung des Risikos einzig auf die Korrelation der Wertpapiere zurückführen.

Formel 8: $$\sigma_P = \sqrt{x^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-x)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot \rho_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B}$$

In diesem Ausdruck ist nun einzig der Korrelationskoeffizient eine Größe die negative Werte annehmen kann. Nun soll die Kombination der Wertpapiere gefunden werden, die das Risiko minimiert. Hierzu wird Formel 8 nach x abgeleitet.

$$\sigma_P = \sqrt{x^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-x)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot \rho_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B} \rightarrow \min!$$

$$\frac{d\sigma_P}{dx} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}}}_{\text{Äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{2x\sigma_A^2 - 2(1-x)\sigma_B^2 + 2(1-x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B - 2x\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}_{\text{Innere Ableitung}} \overset{!}{=} 0$$

Die im Nenner stehende äußere Ableitung braucht im folgenden nicht mehr berücksichtigt werden. Wenn der Zähler denn Wert null annimmt, ist der gesamte Bruch gleich null:

$$\frac{1}{2}\cdot 2\left(x\sigma_A^2-(1-x)\sigma_B^2+(1-x)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B-x\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\sigma_A^2-\sigma_B^2+x\sigma_B^2+\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B-x\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B-x\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B=0 \quad \left|-\left(-\sigma_B^2+\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B\right)\right.$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B\right)=\sigma_B^2-\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \quad \left|\cdot 1/\left(\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B\right)\right.$$

Formel 9: $$x=\frac{\sigma_B^2-\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B} \text{ bzw. } x=\frac{\sigma_B^2-\mathrm{cov}(r_A,r_B)}{\left[\sigma_A^2-\mathrm{cov}(r_A,r_B)\right]+\left[\sigma_B^2-\mathrm{cov}(r_A,r_B)\right]}$$

Für den angenommen Korrelationskoeffizienten $\rho_{A,B}=-0{,}65$ ergibt sich folgende Zusammenstellung:

$$x_A=\frac{2^2-(-0{,}65)\cdot 6\cdot 2}{6^2+2^2-2\cdot(-0{,}65)\cdot 6\cdot 2}=\frac{9{,}8}{55{,}6}=0{,}2122$$

$$x_B=1-x_A=1-0{,}2122=0{,}7878$$

Für diese Portfoliozusammenstellung lassen sich nun Rendite und Risiko berechnen:

Formel 10: $$E(r_P)=\sum_{j=1}^{m}x_j\cdot E(r_j)$$

$$E(r_P)=0{,}2122\cdot 5+0{,}7878\cdot 3=3{,}4244$$

$$\sigma_P=\sqrt{0{,}2122^2\cdot 6^2+0{,}7878^2\cdot 2^2+2\cdot 0{,}2122\cdot 0{,}7878\cdot(-0{,}65)\cdot 6\cdot 2}=\sqrt{1{,}4957}\approx 1{,}2230$$

Für $\rho_{A,B}=-0{,}65$ wurden zusammenfassend folgende Werte festgestellt:
$\sigma_P=1{,}22;\quad \mu_P=3{,}42;\quad x_A=0{,}21;\quad x_B=0{,}79$.

Nun aber zur eigentlichen Aufgabe: Gefragt ist nach dem Mischungsverhältnis bei perfekt positiver und bei perfekt negativer Korrelation.
Zunächst wird der letztere Fall behandelt, also $\rho_{A,B}=-1$. Unter dieser Annahme läßt sich die Formel 9 erheblich vereinfachen:

$$x=\frac{\sigma_B^2-\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}=\frac{\sigma_B^2+\sigma_A\sigma_B}{\underbrace{\sigma_A^2+2\sigma_A\sigma_B+\sigma_B^2}_{\text{1. binomische Formel}}}=\frac{\sigma_B\cdot(\sigma_A+\sigma_B)}{(\sigma_A+\sigma_B)^2}=\frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}$$

Formel 11: $$x=\frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B} \quad \text{bzw.} \quad 1-x=\frac{\sigma_A}{\sigma_A+\sigma_B} \text{ bei } \rho_{A,B}=-1$$

Damit ergibt sich das Mischverhältnis wie folgt:

$$x=\frac{2}{2+6}=0{,}25 \quad \text{bzw.} \quad 1-x=\frac{6}{2+6}=0{,}75$$

Nach Formel 10 läßt sich die Rendite bestimmen:

$$E(r_P)=0{,}25\cdot 5+0{,}75\cdot 3=3{,}5$$

Nach Formel 8 errechnet sich die Standardabweichung des Portfolios:

$$\sigma_P=\sqrt{0{,}25^2\cdot 6^2+0{,}75^2\cdot 2^2+2\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75\cdot(-1)\cdot 6\cdot 2}=0$$

Durch eine geschickte Wahl der Anteile kann bei perfekt negativer Korrelation eine Standardabweichung des Portfolios von null erreicht werden.

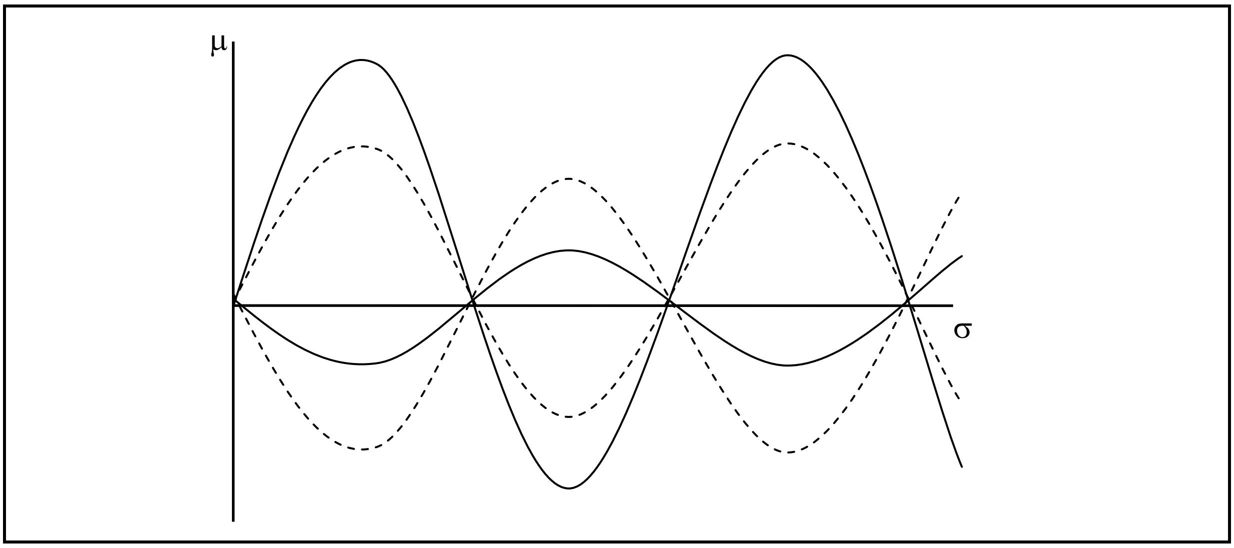

Abb. 7: Beeinflussung von Korrelationsbeziehungen durch Gewichte

Abb. 7 verdeutlicht, was eigentlich bei perfekt negativer Korrelation passiert. Gegenläufige Wertpapierrenditeverläufe, die sich nur in ihrem „Ausschlag" unterscheiden (durchgezogene Linien), werden durch Gewichte zu perfekt gegenläufigen Anteilen (gestrichelte Linien).

Als Ergebnis bei vollständig/perfekt *negativer* Korrelation ist festzuhalten:

- Das Portfoliorisiko läßt sich nicht nur mindern, sondern vollständig eliminieren.
- Die Rendite hat keinen Einfluß auf das Mischverhältnis der Anteile.
- Die risikominimale Lösung ist nur dann optimal für den einzelnen Investor, wenn sie der individuellen Risikopräferenz entspricht. Annahme hier: Risikoaverser Investor.

Jetzt zum Fall mit $\rho_{A,B} = 1$, also der perfekt positiven Korrelation. Auch unter dieser Annahme läßt sich die Formel 9 vereinfachen:

$$x = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B}{\underbrace{\sigma_A^2 - 2\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2}_{\text{2. binomische Formel}}} = \frac{-\sigma_B \cdot \left(-\sigma_B + \sigma_A\right)}{\left(\sigma_A - \sigma_B\right)^2} = -\frac{\sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}$$

Formel 12: $x = -\frac{\sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}$ bzw. $1 - x = \frac{\sigma_A}{\sigma_A - \sigma_B}$ bei $\rho_{A,B} = 1$

Damit ergibt sich das Mischverhältnis wie folgt:

$$x = -\frac{2}{6-2} = -0{,}5 \quad \text{bzw.} \quad 1 - x = \frac{6}{6-2} = 1{,}5$$

Nach Formel 10 läßt sich die Rendite bestimmen:

$$E(r_P) = -0{,}5 \cdot 5 + 1{,}5 \cdot 3 = 2$$

Nach Formel 8 errechnet sich die Standardabweichung des Portfolios:

$$\sigma_P = \sqrt{(-0{,}5)^2 \cdot 6^2 + 1{,}5^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-0{,}5) \cdot 1{,}5 \cdot (+1) \cdot 6 \cdot 2} = 0$$

Zu diesem Ergebnis ist aber noch einiges Anzumerken.

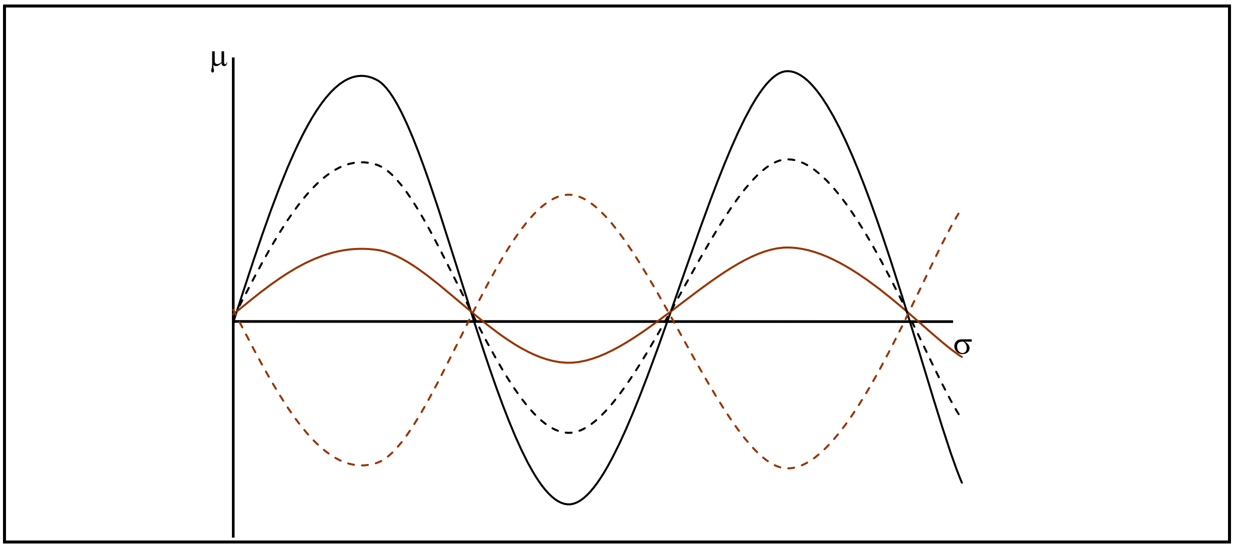

Abb. 8: Beeinflussung von Korrelationsbeziehungen durch Short Sales

Zunächst laufen beide Wertpapiere gleich. Durch Short Sales, also durch negative Anteile im Portfolio bzw. negative Gewichte, wird dieser Gleichlauf wieder in einen perfekten Gegenlauf verändert. Das Wertpapier, das durch die rote durchgezogene Linie charakterisiert ist wird leer verkauft, also negativ im Portfolio gewichtet, was in dem rot gestrichelten Verlauf resultiert.
Bei Short Sales werden Anteile verkauft, die man gar nicht besitzt. Der Risikoreduktionseffekt wird dadurch erzeugt, daß der Anteil eines Wertpapiers durch die Erträge aus dem Leerverkauf des anderen erhöht wird.
Betrachtet man die Rendite des Portfolios, so ist festzustellen, das diese geringer ist als die Einzelrenditen. Es ist fragwürdig, ob ein Investor dieses Portfolio bilden würde. Dies ist natürlich wieder abhängig von den individuellen Risikopräferenzen.

Als Ergebnis bei vollständig/perfekt *positiver* Korrelation ist festzuhalten:

- Das Portfoliorisiko läßt sich auch hier nicht nur mindern, sondern vollständig eliminieren, analog zur perfekt negativen Korrelation.
- Die Eliminierung des Portfoliorisikos wird durch Einbezug von Negativanteilen (Leerverkäufe) erreicht.
- Positiv korrelierte Wertpapiere lassen sich durch Short Positionen in negativ korrelierte umwandeln. Statt von steigenden Kursen zu profitieren ergeben sich bei Kurssteigerungen dann aber Verluste.
- Die Wertentwicklung des leerverkauften Wertpapiers ist der des gekauften/gehaltenen genau entgegengesetzt.

Die folgenden Aufgaben der AG sind nicht Prüfungsrelevant, werden daher auch nicht hier behandelt. Material zu diesen Aufgaben wird vermutlich auf den Web-Sites des Lehrstuhl angeboten.