О разрешимости уравнения Пелля - подход с помощью непрерывных дробей

а также: о теореме Эйлера-Мюира и эквипалиндромических числах

Лукас Стеенфоорт

14 июля 2025 г.

1. Введение

В своей дипломной работе я собираюсь исследовать разрешимость *уравнения Пелля* с помощью теории непрерывных дробей и обсудить теорему Эйлера-Мюира.

1.1. Что такое уравнение Пелля?

Уравнение Пелля (в честь Джона Пелля[1]) имеет вид

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где d – фиксированное положительное целое число, и вопрос состоит в том, существуют ли целочисленные решения (x, y), то есть это *Диофантово уравнение*.

Очевидно, что $(x, y) = (1, 0)$ тривиальное решение, которое мы не будем обсуждать далее. В общем случае мы увидим, что это уравнение имеет бесконечно много нетривиальных решений, если d не является совершенным квадратом.

Отрицательное уравнение Пелля – это связанное с ним диофантово уравнение

$$x^2 - dy^2 = -1,$$

где d – фиксированное целое положительное число.

Это уравнение не имеет тривиального решения, за исключением случая $d = 1$, когда $(x, y) = (0, 1)$ решает уравнение. Критерии разрешимости отрицательного уравнения Пелля слишком сложны для введения и будут рассмотрены в 3.2.

Далее заметим, что если (x, y) решает одно из приведенных выше уравнений, то из $n^2 = (-n)^2$ следует, что $(x, -y)$, $(-x, y)$ и $(-x, -y)$ также являются решениями, поэтому в дальнейшем мы будем допускать только положительные значения для x, y.

1.2. Что такое непрерывная дробь?

Непрерывная дробь – это конечное или бесконечное выражение

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}};$$

мы называем непрерывную дробь *простой*, если все a_k – целые числа.

Каждая простая дробь (каждое рациональное число) может быть преобразована в простую конечную непрерывную дробь, а каждое иррациональное число имеет простое представление в виде бесконечной непрерывной дроби, как мы увидим позже в этой работе – например,

$$\frac{17}{3} = [5, 1, 2] = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}] = [3, 3, 6, 3, 6, \ldots] = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \ldots}}.$$

[1] ошибочно, поскольку Википедия утверждает, что Пелль никогда не анализировал разрешимость этого уравнения, более подходящим названием было бы *уравнение Ферма*, поскольку Ферма был первым европейцем, обсудившим его разрешимость, хотя это уравнение уже было известно индийским математикам *Брахмагупта* в VII и *Бхаскара II.* в XII веке

1.3. Что связывает эти темы?

Мы докажем, что разрешимость (классического или отрицательного) уравнения Пелля

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

связана с представлением непрерывной дроби $\sqrt{d}$, с помощью которого можно не только ответить на вопрос о разрешимости, но и непосредственно вычислить все нетривиальные решения.

Как мы увидим далее в этой работе, представление бесконечной непрерывной дроби $\sqrt{d}$ является периодическим, если d не является совершенным квадратом – в приведенном выше примере

$$\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}] = [3, 3, 6, 3, 6, \ldots] = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \ldots}}$$

с длиной периода 2, а решения $x^2 - 11y^2 = 1$ находятся следующим образом:

$$\frac{x_1}{y_1} = [3, 3] = \frac{10}{3}, \qquad 10^2 - 11 \cdot 3^2 = 100 - 99 = 1;$$

$$\frac{x_2}{y_2} = [3, 3, 6, 3] = \frac{199}{60}, \qquad 199^2 - 11 \cdot 60^2 = 39601 - 39600 = 1;$$

$$\frac{x_3}{y_3} = [3, 3, 6, 3, 6, 3] = \frac{3970}{1197}, \qquad 3970^2 - 11 \cdot 1197^2 = 15760900 - 15760899 = 1$$

и так далее. Заметим, что для $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_m}]$ с длиной периода $m \geq 1$, только конвергенты $[a_0, a_1, \ldots, a_{km-1}]$ с $k \in \mathbb{N}$ дают решения обобщенного уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = (-1)^m$, например, у нас $[3, 3, 6] = 63/19$, но

$$63^2 - 11 \cdot 19^2 = 3969 - 3971 = -2 \neq 1.$$

Отрицательное уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = -1$ разрешимо только тогда, когда период в непрерывном дробном разложении $\sqrt{d}$ имеет нечетную длину - для $d = 11$ длина периода равна 2, поэтому $x^2 - 11y^2 = -1$ не имеет решений. С другой стороны, у нас есть $\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ с длиной периода 5, и отрицательное уравнение Пелля $x^2 - 13y^2 = -1$ разрешимо:

$$\frac{x_1}{y_1} = [3, 1, 1, 1, 1] = \frac{18}{5}, \qquad 18^2 - 13 \cdot 5^2 = 324 - 325 = -1.$$

1.4. Что такое теорема Эйлера-Мюира?

Период в непрерывном дробном разложении $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_m}]$, кроме последней записи, *палиндромический* – у нас $a_k = a_{m-k}$ для $1 \leq k \leq m/2$:

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, a_m}],$$

кроме того, у нас $a_m = 2a_0$. Теорема Эйлера-Мюира позволяет нам, задав палиндром

$$(a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1),$$

вычислить три коэффициента квадратичного многочлена

$$f(n) = An^2 + Bn + C,$$

таких, что для всех $n \in \mathbb{N}$ непрерывное дробное представление $\sqrt{f(n)}$ содержит этот палиндром и для всех d, которые имеют этот палиндром в непрерывном дробном разложении их квадратного корня, существует n такое, что $d = f(n)$:

$$\sqrt{f(n)} = \left[\lfloor \sqrt{f(n)} \rfloor, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2\lfloor \sqrt{f(n)} \rfloor}\right].$$

Многочлен Эйлера-Мюира для палиндрома $(1, 1, 1)$ равен $f(n) = 9n^2 - 2n$, и мы имеем

$$\sqrt{f(1)} = \sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}], \qquad \sqrt{f(2)} = \sqrt{32} = [5, \overline{1, 1, 1, 10}],$$

$$\sqrt{f(3)} = \sqrt{75} = [8, \overline{1, 1, 1, 16}], \qquad \sqrt{f(4)} = \sqrt{136} = [11, \overline{1, 1, 1, 22}] \text{ и так далее.}$$

2. Теория непрерывных дробей

Дефиниция 1 (непрерывная дробь)**.**
Для $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ с $a_k > 0$ для $k \geq 1$ мы индуктивно определяем

$$\text{(i)} \quad [a_0] := a_0, \qquad \text{(ii)} \quad [a_0, \dots, a_n] := \left[a_0, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right].$$

Если $a_k \in \mathbb{Z}$ для всех k, мы называем непрерывную дробь *простой*.

Примечание 1.1. У нас есть

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \qquad \Longrightarrow \qquad [a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}.$$

Примечание 1.2. Для $a_0, \dots, a_n$ у нас есть

$$[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_n - 1, 1].$$

Доказательство.

$$[a_0, \dots, a_n - 1, 1] = \left[a_0, \dots, a_n - 1 + \frac{1}{1}\right] = [a_0, \dots, a_n].$$

□

Дефиниция 2 (Последовательности для оценки непрерывных дробей, [2, уравнение 7.6])**.**
Пусть $(a_n)_{n\geq 0}$ – последовательность, где $a_n \geq 1$ для $n \geq 1$. Определим $(h_n)_{n\geq -2}$ и $(k_n)_{n\geq -2}$ через

$$h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2}, \quad k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2} \quad \text{для } n \geq 0, \qquad h_{-1} = k_{-2} = 1, \quad h_{-2} = k_{-1} = 0,$$

или записанные с помощью матриц,

$$\begin{pmatrix} h_n & h_{n-1} \\ k_n & k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} \\ k_{n-1} & k_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для } n \geq 0, \qquad \begin{pmatrix} h_{-1} & h_{-2} \\ k_{-1} & k_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *У нас* $1 = k_0 \leq k_1$ *и* $k_n < k_{n+1}$ *для* $n \geq 1$*. Также у нас есть граница* $k_n \geq n$*.*

Доказательство. Рекурсивно k_n определяются следующим образом:

$$k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2},$$

в частности, у нас есть

$$k_0 = a_0 k_{-1} + k_{-2} = k_{-2} = 1, \qquad k_1 = a_1 k_0 + k_{-1} = a_1 \geq 1.$$

База индукции определяется

$$k_2 = a_2 k_1 + k_0 \geq k_1 + k_0 > k_1$$

и используя $k_{n-1} > k_{n-2}$ для шага индукции, мы имеем $k_{n-1} > 0$, поэтому мы можем заключить

$$\forall\, n \geq 1: \quad k_{n+1} = a_n k_n + k_{n-1} > a_n k_n \geq k_n.$$

Граница $k_n \geq n$ верна для $n \in \{0, 1\}$ и индуктивно следует для $n \geq 2$ по формуле

$$k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2} \geq 1 \cdot (n-1) + k_0 = (n-1) + 1 = n.$$

□

Теорема 4 ([2, теорема 7.3]). *Для любого $x \in \mathbb{R}_+$ имеем*

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}, x] = \frac{xh_{n-1} + h_{n-2}}{xk_{n-1} + k_{n-2}}.$$

Доказательство (по индукции). Для $n = 0$ имеем

$$\frac{xh_{-1} + h_{-2}}{xk_{-1} + k_{-2}} = \frac{x \cdot 1 + 0}{x \cdot 0 + 1} = x = [x].$$

Используя уравнение для фиксированного n в качестве гипотезы индукции, мы можем заключить

$$[a_0, \ldots, a_n, x] = \left[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x}\right] = \frac{\left(a_n + \frac{1}{x}\right) h_{n-1} + h_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{x}\right) k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2} + \frac{1}{x} h_{n-1}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2} + \frac{1}{x} k_{n-1}}$$
$$= \frac{h_n + \frac{1}{x} h_{n-1}}{k_n + \frac{1}{x} k_{n-1}} = \frac{xh_n + h_{n-1}}{xk_n + k_{n-1}}.$$

□

Следствие 5 ([2, теорема 7.4]). *При $r_n := [a_0, \ldots, a_n]$ для $n \geq 0$, имеем $r_n = h_n/k_n$.*

Доказательство.

$$r_n = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{h_n}{k_n}.$$

□

Лемма 6 (вычисление непрерывной дроби с помощью матричного умножения). *Мы можем оценить $[a_0, \ldots, a_n]$ с помощью умножения матриц: для*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} := \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{мы имеем} \quad [a_0, \ldots, a_n] = \frac{A}{C}.$$

.

Доказательство. С одной стороны, из рекурсивного определения 2 следует:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} h_n & h_{n-1} \\ k_n & k_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} \\ k_{n-1} & k_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h_{n-2} & h_{n-3} \\ k_{n-2} & k_{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
&= \begin{pmatrix} h_{-1} & h_{-2} \\ k_{-1} & k_{-2} \end{pmatrix} \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

с другой стороны, мы показали в следствии 5, что

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{h_n}{k_n} = \frac{A}{C}.$$

□

Лемма 7 (обратные непрерывные дроби, [2, упражнение 7.5]). *Если* $a_0 \geq 1$, *то имеем*

$$\frac{h_n}{h_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_0] \quad \textit{для } n \geq 0, \qquad \frac{k_n}{k_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_1] \quad \textit{для } n \geq 1.$$

Доказательство. Мы докажем эти утверждения с помощью индукции.
База индукции задается следующим образом

$$\frac{h_0}{h_{-1}} = \frac{a_0}{1} = [a_0] \qquad \text{и} \qquad \frac{k_1}{k_0} = \frac{a_1}{1} = [a_1],$$

шаг индукции определяется

$$\frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{h_{n-1}} = a_n + \frac{1}{h_{n-1}/h_{n-2}} = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, \ldots, a_0]} = [a_n, \ldots, a_0]$$

и

$$\frac{k_n}{k_{n-1}} = \frac{a_n k_{n-1} + k_{n-2}}{k_{n-1}} = a_n + \frac{1}{k_{n-1}/k_{n-2}} = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, \ldots, a_1]} = [a_n, \ldots, a_1].$$

□

Теорема 8 ([2, теорема 7.5]). *Для* $n \geq 0$ *имеем*

$$h_n k_{n-1} - h_{n-1} k_n = (-1)^{n-1}, \qquad h_n k_{n-2} - h_{n-2} k_n = (-1)^n a_n.$$

Доказательство (по индукции). Для $n = 0$ мы можем проверить эти уравнения:

$$\begin{aligned} h_0 k_{-1} - h_{-1} k_0 &= h_0 \cdot 0 - 1 \cdot k_0 = (-1) \cdot 1 = (-1)^{0-1}, \\ h_0 k_{-2} - h_{-2} k_0 &= h_0 \cdot 1 - 0 \cdot k_0 = a_0 = (-1)^0 a_0. \end{aligned}$$

Используя первое уравнение для фиксированного n в качестве гипотезы индукции, получаем

$$\begin{aligned} h_{n+1} k_n - h_n k_{n+1} &= (a_{n+1} h_n + h_{n-1}) k_n - h_n (a_{n+1} k_n + k_{n-1}) \\ &= h_{n-1} k_n - h_n k_{n-1} \\ &= (-1) \cdot (h_n k_{n-1} - h_{n-1} k_n) \\ &= (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n, \\ h_{n+1} k_{n-1} - h_{n-1} k_{n+1} &= (a_{n+1} h_n + h_{n-1}) k_{n-1} - h_{n-1} (a_{n+1} k_n + k_{n-1}) \\ &= a_{n+1} (h_n k_{n-1} - h_{n-1} k_n) \\ &= a_{n+1} (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1} a_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Следствие 9 ([2, теорема 7.5]). *У нас есть*

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{k_n k_{n-1}} \quad \textit{для } n \geq 1, \qquad r_n - r_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{k_n k_{n-2}} \quad \textit{для } n \geq 2.$$

Если $a_n \in \mathbb{Z}$ *для всех* $n \geq 0$, *то имеем* $\text{НОД}(h_n, k_n) = \text{НОД}(h_n, h_{n+1}) = \text{НОД}(k_n, k_{n+1}) = 1$.

Доказательство. Эти уравнения можно получить, разделив уравнения из предыдущей теоремы на $k_n k_{n-1}$ и $k_n k_{n-2}$ соответственно. Если $a_n \in \mathbb{Z}$ для всех $n \geq 0$, то можно заключить, что $h_n, k_n \in \mathbb{Z}$ для $n \geq 0$, а если $d \in \mathbb{N}$ делит $\text{НОД}(h_n, k_n)$, $\text{НОД}(h_n, h_{n+1})$ или $\text{НОД}(k_n, k_{n+1})$, из теоремы 8 следует, что

$$d \mid (h_{n+1} k_n - h_n k_{n+1}) = (-1)^{n-1},$$

поэтому у нас должно быть $d = 1$. □

Теорема 10 ([2, теорема 7.6]).
Последовательность $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к числу* $\xi \in \mathbb{R}$ *и мы имеем*

$$r_0 < r_2 < r_4 < \ldots < \xi < \ldots < r_5 < r_3 < r_1.$$

Доказательство. По лемме 3 имеем $k_n > 0$ для всех $n \geq 0$. Для $n \geq 2$ мы имеем $a_n > 0$, поэтому выражение для $r_n - r_{n-2}$ из следствия 9 имеет тот же знак, что и $(-1)^n$, что дает нам

$$r_{n-2} < r_n \quad \text{если } 2 \mid n, \qquad r_n < r_{n-2} \quad \text{если } 2 \nmid n.$$

Кроме того, выражение для $r_n - r_{n-1}$ из следствия 9 имеет тот же знак, что и $(-1)^{n-1}$, поэтому мы имеем $r_n < r_{n-1}$ для $2 \mid n$ и можем заключить для $l \geq 1$ и $m \geq 0$, что

$$r_{2m} < r_{2m+2l} < r_{2m+2l-1} \leq r_{2l-1}.$$

Поэтому подпоследовательность $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно возрастает и ограничена сверху r_1, поэтому она сходится. Аналогично, подпоследовательность $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает и ограничена снизу r_0, поэтому она сходится. Используя ограничение из леммы 3, мы видим, что выражение для $r_n - r_{n-1}$ из следствия 9 стремится к нулю, поэтому обе подпоследовательности, а также сама последовательность $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся к одному и тому же пределу $\xi \in \mathbb{R}$. Поскольку подпоследовательности строго монотонны, этот предел никогда не будет достигнут, так как должно существовать такое n, что $r_n = r_{n+2}$. □

Дефиниция 11 (бесконечная непрерывная дробь, [2, дефиниция 7.1]).
Для $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с $a_n \geq 1$ для $n \geq 1$ мы определяем *бесконечную непрерывную дробь*

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] := \lim_{n\to\infty} r_n$$

и назовем r_n n-ым *конвергентом* из $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.
Если существуют $l \geq 1$ и $N \geq 0$ такие, что

$$a_n = a_{n+l} \qquad \forall\, n \geq N,$$

мы называем непрерывную дробь *периодической* и пишем

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] =: [a_0, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}].$$

Мы называем бесконечную непрерывную дробь *простой*, если $a_n \in \mathbb{Z}\ \forall\, n \geq 0$.

Лемма 12 ([2, теорема 7.15]).
Если $x > 1$ *при* $x = [a_0, a_1, \ldots]$ *и если* h_n/k_n *является* n*-ым конвергентом* x*, то* $(n+1)$*-ый конвергент* $1/x = [0, a_0, a_1, \ldots]$ *является взаимно обратным значением* k_n/h_n.

Доказательство.
Вычисляя n-ю конвергенту x с помощью матричного умножения, получаем

$$\begin{pmatrix} h_n & h_{n-1} \\ k_n & k_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценивая $(n+1)$-ю конвергенту $1/x$ с помощью матричного умножения, получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\prod_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_n & h_{n-1} \\ k_n & k_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n & k_{n-1} \\ h_n & h_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $(n+1)$-ый конвергент $1/x$ действительно равен k_n/h_n. □

С этого момента мы предполагаем, что $a_n \in \mathbb{Z}$ для $n \geq 0$.

Лемма 13 ([2, теорема 7.13]).
Если $|\xi b - a| < |\xi k_n - h_n|$ *для* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ *и* $n \geq 0$, *то имеем* $b \geq k_{n+1}$.

Доказательство.
Мы предполагаем, что $b < k_{n+1}$ и рассматриваем систему линейных уравнений

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} h_n & h_{n+1} \\ k_n & k_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 8, мы видим, что детерминант A равен

$$h_n k_{n+1} - h_{n+1} k_n = (-1)^{n+1},$$

поэтому обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} k_{n+1} & -h_{n+1} \\ -k_n & h_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система линейных уравнений имеет решение

$$x = (-1)^{n+1}(k_{n+1}a - h_{n+1}b), \qquad y = (-1)^{n+1}(h_n b - k_n a),$$

но нас интересует только тот факт, что $x, y \in \mathbb{Z}$.
Мы не можем иметь $x = 0$, так как это означало бы

$$b = k_{n+1} y \overset{b, k_{n+1} \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} y \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad b \geq k_{n+1},$$

что противоречит нашему предположению.
С другой стороны, мы не можем иметь $y = 0$, так как это означало бы

$$(a, b) = (x h_n, x k_n) \qquad \Longrightarrow \qquad |\xi b - a| = |x| \cdot |\xi k_n - h_n| \geq |\xi k_n - h_n|.$$

Если $y < 0$, то, как видно из

$$0 < b = k_n x + k_{n+1} y,$$

что $x > 0$. С другой стороны, если $y > 0$, то из нашего предположения следует, что

$$b < k_{n+1} \leq k_{n+1} y = b - k_n x \qquad \Longrightarrow \qquad x < 0.$$

Это доказывает, что x и y имеют разные знаки. Мы имеем

$$\xi b - a = \xi(k_n x + k_{n+1} y) - (h_n x + h_{n+1} y) = x(\xi k_n - h_n) + y(\xi k_{n+1} - h_{n+1}),$$

и из теоремы 10 можно заключить, что $\xi k_n - h_n$ и $\xi k_{n+1} - h_{n+1}$ имеют разные знаки, как $\xi - r_n$ и $\xi - r_{n+1}$ имеют разные знаки. Таким образом, мы можем заключить, что $x(\xi k_n - h_n)$ и $y(\xi k_{n+1} - h_{n+1})$ имеют разные знаки, но это означает, что

$$|\xi b - a| = |x(\xi k_n - h_n) + y(\xi k_{n+1} - h_{n+1})| = |x| \cdot |\xi k_n - h_n| + |y| \cdot |\xi k_{n+1} - h_{n+1}| \geq |\xi k_n - h_n|,$$

что противоречит нашему предположению, поэтому мы действительно должны иметь

$$b \geq k_{n+1}.$$

□

Теорема 14 ([2, теорема 7.14]).
Если $|\xi - a/b| < 1/2b^2$ *для* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *то существует* $n \geq 1$ *такое, что* $a/b = r_n = h_n/k_n$.

Доказательство. Поскольку $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ строго монотонно возрастает и неограничен, существует единственное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $k_n \leq b < k_{n+1}$. Из леммы 13 следует, что

$$|\xi k_n - h_n| \leq |\xi b - a| < \frac{1}{2b}.$$

Теперь предположим, что $a/b \neq h_n/k_n \;\Rightarrow\; |a k_n - b h_n| \geq 1$. Это приводит к противоречию

$$1 \leq |a k_n - b h_n| \leq |\xi b k_n - a k_n| + |\xi b k_n - b h_n| = k_n |\xi b - a| + b |\xi k_n - h_n| < \frac{k_n}{2b} + \frac{b}{2b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

□

Следствие 15. *ξ иррационально.*

Доказательство. Для $\xi = p/q$ при $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ имеем $|\xi q - p| = 0 < 1/2q^2$, поэтому предыдущая теорема дает нам $n \in \mathbb{N}$ такое, что $r_n = p/q = \xi$, что противоречит теореме 10. □

Лемма 16. *Записывая $\overline{x + y\sqrt{d}} := x - y\sqrt{d}$, мы имеем $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ и $\overline{\alpha/\beta} = \overline{\alpha}/\overline{\beta}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}\overline{a + b\sqrt{d}} \cdot \overline{A + B\sqrt{d}} = (a - b\sqrt{d})(A - B\sqrt{d}) &= (aA + bBd) - (aB + Ab)\sqrt{d} \\ &= \overline{(aA + bBd) + (aB + Ab)\sqrt{d}} \\ &= \overline{(a + b\sqrt{d})(A + B\sqrt{d})}\end{aligned}$$

и

$$\overline{1/(a + b\sqrt{d})} = \overline{(a - b\sqrt{d})/(a^2 - b^2 d)} = (a + b\sqrt{d})/(a^2 - b^2 d) = 1/(a - b\sqrt{d}) = 1/\overline{(a + b\sqrt{d})}.$$

□

Теорема 17 ([2, теорема 7.19])**.**
Каждой простой периодической непрерывной дроби соответствует число

$$[a_0, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}] = \xi = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$$

с $a, c \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ и $c \neq 0$, где b не является совершенным квадратом. И наоборот, любое такое число $(a + \sqrt{b})/c$ может быть развито в простую периодическую непрерывную дробь.

Доказательство ($\Rightarrow$). Записывая $\theta := [\overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}]$, мы имеем

$$\theta = [a_N, \ldots, a_{N+l-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}] = [a_N, \ldots, a_{N+l-1}, \theta]$$

и теорема 4 подразумевает, что существуют $H, H', K, K' \in \mathbb{Z}$ с $K \geq 1$ и $K' \geq 0$, такие, что

$$\theta = \frac{\theta H + H'}{\theta K + K'} \qquad \Longrightarrow \qquad K\theta^2 + K'\theta = H\theta + H' \qquad \Longrightarrow \qquad K\theta^2 + (K' - H)\theta - H' = 0.$$

Квадратичная формула дает решения

$$\theta \in \left\{ \frac{(H - K') + \sqrt{(K' - H)^2 + 4KH'}}{2K}, \frac{(H - K') - \sqrt{(K' - H)^2 + 4KH'}}{2K} \right\},$$

и оба случая могут быть выражены как

$$\theta = \frac{A + \sqrt{B}}{C}$$

при $A, C \in \mathbb{Z}$, $B \in \mathbb{N}$ и $C \neq 0$. Снова используя теорему 4, получим $h, h', k, k' \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\begin{aligned}\xi = [a_0, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}] &= [a_0, \ldots, a_{N-1}, \theta] \\ &= \frac{\theta h + h'}{\theta k + k'} \\ &= \frac{(A + \sqrt{B})h + Ch'}{(A + \sqrt{B})k + Ck'} \\ &= \frac{(Ah + Ch') + \sqrt{B}h}{(Ak + Ck') + \sqrt{B}k} \\ &= \frac{((Ah + Ch') + h\sqrt{B})((Ak + Ck') - k\sqrt{B})}{(Ak + Ck')^2 - Bk^2} \\ &= \frac{((Ah + Ch')(Ak + Ck') - Bhk) + C(hk' - h'k)\sqrt{B}}{(Ak + Ck')^2 - Bk^2} \\ &= \frac{((Ah + Ch')(Ak + Ck') - Bhk) + \sqrt{(C(hk' - h'k))^2 B}}{(Ak + Ck')^2 - Bk^2}\end{aligned}$$

и используя подходящие $a, c \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ и $c \neq 0$, мы можем написать

$$\xi = \frac{a + \sqrt{b}}{c},$$

где b не может быть совершенным квадратом, так как в этом случае ξ будет рациональным, что противоречит следствию 15. □

Доказательство ($\Leftarrow$, *по индукции*).
Мы определяем $m_0 := a|c|$, $d = bc^2$ и $q_0 = c|c|$ и показываем, что алгоритм, заданный

$$a_n = \lfloor \xi_n \rfloor, \quad \xi_n = \frac{m_n + \sqrt{d}}{q_n}, \quad m_{n+1} = a_n q_n - m_n, \quad q_{n+1} = \frac{d - m_{n+1}^2}{q_n} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

вычисляет представление непрерывной дроби $(a + \sqrt{b})/c$, т.е. для $n \geq 0$ мы должны иметь

$$\frac{a + \sqrt{b}}{c} = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \xi_n].$$

Мы получаем базовый случай $n = 0$, умножая числитель и знаменатель на $|c| = \sqrt{c^2}$:

$$\frac{a + \sqrt{b}}{c} = \frac{a|c| + \sqrt{bc^2}}{c|c|} = \frac{m_0 + \sqrt{d}}{q_0} = \xi_0 = [\xi_0].$$

Для шага индукции мы получаем

$$\xi_n - a_n = \frac{m_n + \sqrt{d} - a_n q_n}{q_n} = \frac{\sqrt{d} - m_{n+1}}{q_n} = \frac{d - m_{n+1}^2}{q_n(\sqrt{d} + m_{n+1})} = \frac{q_{n+1}}{m_{n+1} + \sqrt{d}} = \frac{1}{\xi_{n+1}},$$

поэтому, используя гипотезу индукции, мы видим, что

$$\frac{a + \sqrt{b}}{c} = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \xi_n] = \left[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}\right] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, \xi_{n+1}]\,.$$

Осталось доказать, что $q_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ для всех $n \geq 0$. Из-за

$$q_{n+1} = \frac{d - m_{n+1}^2}{q_n} = \frac{d - (a_n q_n - m_n)^2}{q_n} = \frac{d - m_n^2}{q_n} + 2a_n m_n - a_n^2 q_n$$

мы должны показать, что $(d - m_n^2)/q_n$ – целое число для $n \geq 0$.
Для $n = 0$ это ясно из определения, потому что

$$\frac{d - m_0^2}{q_0} = \frac{bc^2 - (a|c|)^2}{c|c|} = \frac{bc^2 - a^2c^2}{c|c|} = \frac{c}{|c|}(b - a^2),$$

для $n \geq 1$ следует из

$$\frac{d - m_n^2}{q_n} = \frac{d - m_n^2}{q_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} = q_n \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} = q_{n-1} \in \mathbb{Z},$$

и мы всегда имеем $q_n \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $d = m_n^2$, подразумевая, что b – совершенный квадрат. Теорема 4 дает нам

$$\xi_0 = \frac{a + \sqrt{b}}{c} = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \xi_n] = \frac{\xi_n h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n k_{n-1} + k_{n-2}}$$

и используя $\xi_n' := \overline{\xi_n} = (m_n - \sqrt{d})/q_n$, лемма 16 дает уравнение

$$\begin{aligned} \xi_0' = \frac{\xi_n' h_{n-1} + h_{n-2}}{\xi_n' k_{n-1} + k_{n-2}} \quad &\Longrightarrow \quad \xi_n'(\xi_0' k_{n-1} - h_{n-1}) = h_{n-2} - \xi_0' k_{n-2} \\ &\Longrightarrow \quad \xi_n' = \frac{h_{n-2} - \xi_0' k_{n-2}}{\xi_0' k_{n-1} - h_{n-1}} = -\frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \left(\frac{\xi_0' - h_{n-2}/k_{n-2}}{\xi_0' - h_{n-1}/k_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Для $n \to \infty$ и числитель, и знаменатель дроби в скобках стремятся к $\xi_0' - \xi_0 \neq 0$, поэтому указанная дробь стремится к 1. Следовательно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что дробь в скобках становится положительной при $n \geq n_0$, делая ξ_n' отрицательной. С другой стороны, для $n \geq 0$ имеем

$$\xi_n - a_n = \frac{1}{\xi_{n+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n} = \frac{1}{\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor} > 1$$

и, следовательно, для всех $n \geq n_0$ имеем:

$$0 < \xi_n - \xi_n' = \frac{m_n + \sqrt{d}}{q_n} - \frac{m_n - \sqrt{d}}{q_n} = \frac{2\sqrt{d}}{q_n} \qquad \Longrightarrow \qquad q_n > 0.$$

Из определения m_n и q_n можно сделать вывод, что для $n \geq n_0$:

$$1 \leq q_n \leq q_n q_{n+1} = d - m_{n+1}^2 \leq d, \qquad m_{n+1}^2 < m_{n+1}^2 + q_n q_{n+1} = d, \tag{2.1}$$

но поскольку d фиксировано и $m_n, q_n \in \mathbb{Z}$, пары (m_n, q_n) могут принимать только конечное число значений, поэтому $\exists\, N \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}$ с $(m_N, q_N) = (m_{N+l}, q_{N+l})$. Поскольку

$$\xi_N = \frac{m_N + \sqrt{d}}{q_N} = \frac{m_{N+l} + \sqrt{d}}{q_{N+l}} = \xi_{N+l}$$

и $(\xi_{n+1}, m_{n+1}, q_{n+1})$ вычисляется исключительно из (ξ_n, m_n, q_n), то индуктивно следует, что

$$\forall\, n \geq N : a_n = \lfloor \xi_n \rfloor = \lfloor \xi_{n+l} \rfloor = a_{n+l} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a + \sqrt{b}}{c} = [a_0, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l-1}}].$$

□

Теорема 18 (непрерывное дробное представление квадратных корней, [2, теорема 7.21]). *Если $d \in \mathbb{N}$ не является совершенным квадратом, то представление непрерывной дроби $\sqrt{d}$ имеет вид*

$$\sqrt{d} = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}]$$

и имеем $(a_1, \ldots, a_l) = (a_l, \ldots, a_1)$ при $l \in \mathbb{N}_0$, следовательно, $a_k = a_{l-k+1}$ для $1 \leq k \leq l$.

Доказательство. Теорема 17 дает представление

$$\lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d} = [a_0, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+l}}]$$

и, используя обозначения из этой теоремы, имеем $(a, b, c) = (\lfloor \sqrt{d} \rfloor, d, 1)$. Пишем

$$\xi_n = \frac{m_n + \sqrt{d}}{q_n}, \qquad \xi_n' = \frac{m_n - \sqrt{d}}{q_n}$$

и, используя лемму 16, мы видим, что

$$\frac{1}{\xi_{n+1}} = \xi_n - a_n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\xi_{n+1}'} = \xi_n' - a_n.$$

Теперь мы покажем, что $-1 < \xi_n' < 0$ для всех $n \geq 0$. Для $n = 0$ это ясно из

$$\xi_0' = \lfloor \sqrt{d} \rfloor - \sqrt{d},$$

и индуктивно следует из $a_0 = \lfloor \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d} \rfloor = 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor \geq 2$ и $a_n \geq 1$ для $n \geq 1$ через

$$\frac{1}{\xi_{n+1}'} = \xi_n' - a_n < 0 - 1 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad -1 < \xi_{n+1}' < 0.$$

Теперь мы сделаем вывод для всех $n \geq 0$:

$$a_n = \xi_n' - \frac{1}{\xi_{n+1}'} \qquad \Longrightarrow \qquad -1 - \frac{1}{\xi_{n+1}'} < a_n < -\frac{1}{\xi_{n+1}'} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \left\lfloor -\frac{1}{\xi_{n+1}'} \right\rfloor.$$

Поэтому, если существуют индексы $j < k$ с $\xi_j = \xi_k$, то из $\xi'_j = \xi'_k$ следует, что

$$a_{j-1} = \left\lfloor -\frac{1}{\xi'_j} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\xi'_k} \right\rfloor = a_{k-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \xi_{j-1} = a_{j-1} + \frac{1}{\xi_j} = a_{k-1} + \frac{1}{\xi_k} = \xi_{k-1},$$

и по индукции получаем $a_n = a_{n+(k-j)}$ для всех $n \geq 0$. Поскольку $\xi_N = \xi_{N+l+1}$, получаем

$$\lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d} = \overline{[2\lfloor \sqrt{d} \rfloor, a_1, \ldots, a_l]} = [2\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}]$$

и из этого следует, что

$$\sqrt{d} = (\lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d}) - \lfloor \sqrt{d} \rfloor = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}].$$

Теперь заметим, что по теореме 4, $\xi := \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d}$ удовлетворяет квадратичному уравнению

$$\xi = [a_0, \ldots, a_l, \xi] = \frac{\xi h_l + h_{l-1}}{\xi k_l + k_{l-1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k_l \xi^2 + (k_{l-1} - h_l)\xi - h_{l-1} = 0.$$

Обозначим теперь n-ые конвергенты $\theta := [\overline{a_l, \ldots, a_0}]$ через H_n/K_n, где эти дроби полностью сократимы и $K_n \in \mathbb{N}$. Из леммы 7 теперь следует, что

$$\frac{H_l}{K_l} = [a_l, \ldots, a_0] = \frac{h_l}{h_{l-1}}, \qquad \frac{H_{l-1}}{K_{l-1}} = [a_l, \ldots, a_1] = \frac{k_l}{k_{l-1}},$$

а поскольку H_l/K_l, h_l/h_{l-1}, H_{l-1}/K_{l-1} и k_l/k_{l-1} имеют положительные знаменатели и полностью сократимы по следствию 9, мы имеем равенства

$$H_l = h_l, \qquad K_l = h_{l-1}, \qquad H_{l-1} = k_l, \qquad K_{l-1} = k_{l-1}.$$

Из теоремы 4 следует, что

$$\begin{aligned} & \theta = [a_l, \ldots, a_0, \theta] = \frac{\theta H_l + H_{l-1}}{\theta K_l + K_{l-1}} = \frac{\theta h_l + k_l}{\theta h_{l-1} + k_{l-1}} \\ \Longrightarrow \quad & h_{l-1}\theta^2 + (k_{l-1} - h_l)\theta - k_l = 0 \\ \overset{\cdot(-1),\,/\theta^2}{\Longrightarrow} \quad & k_l \left(\frac{-1}{\theta}\right)^2 + (k_{l-1} - h_l)\left(\frac{-1}{\theta}\right) - h_{l-1} = 0, \end{aligned}$$

поэтому $-1/\theta$ удовлетворяет тому же квадратному уравнению, что и ξ. Но так как $-1/\theta < 0 < \xi = \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d}$, а два решения квадратного уравнения всегда имеют вид $(A \pm \sqrt{B})/C$, мы заключаем, что

$$\frac{-1}{\theta} = \lfloor \sqrt{d} \rfloor - \sqrt{d} \qquad \Longrightarrow \qquad [\overline{a_l, \ldots, a_1, a_0}] = \theta = \frac{1}{\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor}.$$

С другой стороны, у нас есть

$$\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor = (\lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d}) - 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor = \xi - a_0 = [0, \overline{a_1, \ldots, a_l, a_0}] = \frac{1}{[\overline{a_1, \ldots, a_l, a_0}]}$$

и поэтому,

$$\frac{1}{\sqrt{d} - \lfloor \sqrt{d} \rfloor} = [\overline{a_1, \ldots, a_l, a_0}].$$

Поскольку представление непрерывных дробей по теореме 17 единственное, следует, что

$$(a_1, \ldots, a_l) = (a_l, \ldots, a_1).$$

□

Теорема 19 ([2, теорема 7.22]). *Если $d \in \mathbb{N}$ не является совершенным квадратом,*

$$\sqrt{d} = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}]$$

и l минимально, то при q_n как в теореме 17, имеем

$$h_n^2 - dk_n^2 = (-1)^{n-1} q_{n+1} \qquad \textit{for } n \geq -1,$$

где $q_{n+1} = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $(l+1) \mid (n+1)$ и мы никогда не имеем $q_{n+1} = -1$.

Доказательство. При ξ_n, m_n и q_n, как в теореме 17, мы имеем

$$\begin{aligned}
\sqrt{d} &= \frac{\xi_{n+1} h_n + h_{n+1}}{\xi_{n+1} k_n + k_{n+1}} \\
&= \frac{(m_{n+1} + \sqrt{d}) h_n + q_{n+1} h_{n+1}}{(m_{n+1} + \sqrt{d}) k_n + q_{n+1} k_{n+1}} \\
&= \frac{(m_{n+1} h_n + q_{n+1} h_{n+1}) + \sqrt{d} h_n}{(m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) + \sqrt{d} k_n} \\
&= \frac{((m_{n+1} h_n + q_{n+1} h_{n+1}) + \sqrt{d} h_n)((m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) - \sqrt{d} k_n)}{((m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) + \sqrt{d} k_n)((m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) - \sqrt{d} k_n)} \\
&= \frac{((m_{n+1} h_n + q_{n+1} h_{n+1})(m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) - d h_n k_n) + q_{n+1}(h_{n+1} k_n - h_n k_{n+1})\sqrt{d}}{(m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1})^2 - d k_n^2}.
\end{aligned}$$

Поскольку это уравнение имеет вид $A + B\sqrt{d} = A' + B'\sqrt{d}$ с $A, B, A', B' \in \mathbb{Q}$, то, в частности, мы должны иметь $A = A'$ и $B = B'$. Сравнение коэффициентов дает два уравнения

$$(m_{n+1} h_n + q_{n+1} h_{n+1})(m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) - d h_n k_n = 0, \tag{I}$$

$$(m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1})^2 - d k_n^2 = q_{n+1}(h_{n+1} k_n - h_n k_{n+1}). \tag{II}$$

Для $n = -1$ мы можем легко проверить это утверждение: при c как в 17, мы имеем

$$h_{-1}^2 - d k_{-1}^2 = 1^2 - d \cdot 0^2 = 1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot c|c| = (-1)^{-2} q_0.$$

Для $n \geq 0$ имеем $h_n, k_n \neq 0$, и умножение (I) на k_n / h_n дает

$$0 = \left(m_{n+1} k_n + q_{n+1} \frac{h_{n+1} k_n}{h_n} \right) (m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) - d k_n^2.$$

Для всех A, B, C выполняется следующее равенство:

$$(A + C)(A + B) = (A + B)^2 - (A + B)^2 + (A + C)(A + B) = (A + B)^2 + (A + B)(C - B),$$

используя которое, мы можем переписать (I) в виде

$$\begin{aligned}
0 &= (m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1})^2 - d k_n^2 + (m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}) q_{n+1} \left(\frac{h_{n+1} k_n}{h_n} - k_{n+1} \right) \\
&= (m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1})^2 - d k_n^2 + \frac{m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}}{h_n} q_{n+1}(h_{n+1} k_n - h_n k_{n+1}).
\end{aligned}$$

Подставляя (II) в (I) и сокращая $q_{n+1}(h_{n+1} k_n - h_n k_{n+1})$, получаем

$$0 = 1 + \frac{m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}}{h_n} \qquad \Longrightarrow \qquad -h_n = m_{n+1} k_n + q_{n+1} k_{n+1}. \tag{$*$}$$

Подставляя этот результат в (II) и применяя теорему 8, получаем

$$\begin{aligned} h_n^2 - dk_n^2 &= (-h_n)^2 - dk_n^2 \\ &\overset{(*)}{=} (m_{n+1}k_n + q_{n+1}k_{n+1})^2 - dk_n^2 \\ &\overset{\text{(II)}}{=} q_{n+1}(h_{n+1}k_n - h_n k_{n+1}) \\ &\overset{8}{=} (-1)^n q_{n+1} \end{aligned}$$

и из этого следует утверждение.
Мы никогда не можем иметь $q_{n+1} = -1$, так как это означает, что $n+1 > 0$ и, следовательно,

$$1 < \xi_{n+1} = -m_{n+1} - \sqrt{d},$$

с другой стороны, $-1 < \xi'_{n+1} = -m_{n+1} + \sqrt{d} < 0$, как в теореме 18, что приводит к противоречию

$$0 < \sqrt{d} < m_{n+1} < -1 - \sqrt{d} < 0.$$

Если $(l+1) \mid (n+1)$, то периодичность подразумевает, что $q_{n+1} = q_0 = 1$. И наоборот, $q_{n+1} = 1$ подразумевает, что $\xi_{n+1} = m_{n+1} + \sqrt{d}$, а из $-1 < \xi'_{n+1} = m_{n+1} - \sqrt{d} < 0$ следует, что $m_{n+1} = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$ и, следовательно, $\xi_{n+1} = \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \sqrt{d} = \xi_0$, а минимальность l обуславливает необходимость $(l+1) \mid (n+1)$. □

Следствие 20. *Мы имеем $h_n^2 - dk_n^2 = \pm 1$ тогда и только тогда, когда существует $r \in \mathbb{N}_0$ такое, что $n = r(l+1) - 1$. В частности, $h_n^2 - dk_n^2 = -1$ может быть только в том случае, если $2 \mid l$.*

Доказательство. Мы имеем $h_n^2 - dk_n^2 = \pm 1$ тогда и только тогда, когда $q_{n+1} = 1$, т.е. для $(l+1) \mid (n+1)$. Если $2 \nmid l$, то имеем

$$h_n^2 - dk_n^2 = (-1)^{n-1} = (-1)^{r(l+1)-2} = 1^{r((l+1)/2)-1} = 1.$$

□

Следствие 21. *Для $\sqrt{d} = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}]$, l минимального, мы имеем $\lfloor \sqrt{d} \rfloor \geq a_k$ для $1 \leq k \leq l$.*

Доказательство. При N, n_0, a_k, m_k, q_k, как в доказательстве 17, имеем $N = 1$, $n_0 = 0$ и, подобно (2.1), имеем

$$m_n^2 < d \qquad \Longrightarrow \qquad m_n < \sqrt{d} \qquad \overset{m_n \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \qquad m_n \leq \lfloor \sqrt{d} \rfloor \tag{2.2}$$

для $n \geq 1$. С другой стороны, мы имеем

$$m_n + m_{n+1} = m_n + (a_n q_n - m_n) = a_n q_n$$

и мы показали в (2.1), что

$$1 \leq q_n \leq d, \tag{2.3}$$

что в сочетании с (2.2) означает, что

$$a_n q_n \leq 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \leq \frac{2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}{q_n}.$$

Наконец, мы покажем, что $q_n \geq 2$ для $1 \leq n \leq l$, так как из этого следует неравенство

$$a_n \leq \lfloor \sqrt{d} \rfloor.$$

Теорема 19 гласит, что $q_n = 1$ может выполняться только для $(l+1) \mid n$, что в сочетании с (2.3) доказывает утверждение. □

2.1. Теорема Эйлера-Мюира и эквипалиндромические числа

Следующий раздел был вдохновлен сайтом [4], который описывает теорему Эйлера-Мюира без доказательства. Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма 22. *Для $a_1, \dots, a_l$ с $l \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \mathbb{N}$, $a_k = a_{l-k+1}\ \forall\, k$ и A, B, C, D даны следующие условия*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

имеем $B = C$ и $B^2 = AD - (-1)^l$, кроме того, $A \geq B$ ($A > B$ для $l \neq 1$) и $A \geq D$.

Доказательство. Мы докажем это утверждение с помощью индукции по $\lfloor l/2 \rfloor$. Если $l = 0$ (пустое произведение), то имеем

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = 0^2 = 0 = 1 - 1 = AD - (-1)^0;$$

если $l = 1$, то

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = 1^2 = 1 = a_1 \cdot 0 - (-1) = AD - (-1)^1,$$

в обоих случаях мы имеем $B = C$, $A \geq B$ ($A > B$ для $l = 0$) и $A \geq D$. Для

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{l-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

возьмем $\bar{B}^2 = \bar{A}\bar{D} - (-1)^{l-2}$ и $\bar{B} = \bar{C}$ в качестве гипотезы индукции и заключим

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2\bar{A} + 2a_1\bar{B} + \bar{D} & a_1\bar{A} + \bar{B} \\ a_1\bar{A} + \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}, \qquad B = C,$$

$$B^2 = (a_1\bar{A} + \bar{B})^2 = a_1^2\bar{A}^2 + 2a_1\bar{A}\bar{B} + \bar{B}^2 = (a_1^2\bar{A} + 2a_1\bar{B} + \bar{D})\bar{A} - (-1)^{l-2} = AD - (-1)^l.$$

Далее для $l \geq 2$ мы получаем границы

$$B = a_1\bar{A} + \bar{B} < a_1^2\bar{A} + 2a_1\bar{B} + \bar{D} = A, \qquad D = \bar{A} \leq a_1^2\bar{A} < a_1^2\bar{A} + 2a_1\bar{B} + \bar{D} = A,$$

так как мы имеем $\bar{A} > 0$ и либо $\bar{B} > 0$, либо $\bar{D} > 0$. □

Теорема 23 (Эйлер-Мюир).
Для $a_1, \dots, a_l$ с $l \in \mathbb{N}_0$, $a_k = a_{l-k+1}\ \forall\, k$, мы определяем A, B, D через

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$m = (((-1)^{l+1}(A+1)BD + \max a_k) \mod 2A') - \max a_k, \qquad A' = \begin{cases} A & \text{если } 2 \nmid A, \\ A/2 & \text{если } 2 \mid A. \end{cases}$$

Если $l = 0$ (пустое произведение), то приведенное выше умножение матриц дает матрицу тождества.
Тогда числа d в $\mathbb{N}^*$, множестве целых положительных чисел, которые не являются совершенными квадратами, с

$$\sqrt{d} = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \dots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}]$$

где l минимально, т.е. $2\lfloor \sqrt{d} \rfloor > \max a_k$[1] (см. следствие 21), определяются параметрами

$$\left\{ (A')^2 n^2 + \left(\frac{2A'}{A} B - mA' \right) n + \frac{D - mB}{A} + \left(\frac{m}{2} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\},$$

и не существует таких чисел, если $2 \nmid BD$. Многочлен из этого описания множества называется многочленом Эйлера-Мюира *для палиндрома $(a_1, \dots, a_l)$.*

[1] у нас $\max \varnothing = -\infty$, поэтому это утверждение верно для $l = 0$; для дальнейших вычислений я буду использовать 0 вместо $-\infty$, то есть $a > \max\{0\} \cup \{a_k : 1 \leq k \leq l\}$, поскольку $a > 0$ и $a_k \geq 1$.

Доказательство.
Непрерывное дробное представление $\sqrt{d}$ с палиндромом $(a_1, \ldots, a_l)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{d} = [\lfloor\sqrt{d}\rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor}] \\ \iff \qquad & \lfloor\sqrt{d}\rfloor + \sqrt{d} = [\overline{2\lfloor\sqrt{d}\rfloor, a_1, \ldots, a_l}]. \end{aligned}$$

Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $x = [\overline{a, a_1, \ldots, a_l}]$ при $a > a_k$ для всех k. Тогда

$$x = [a, a_1, \ldots, a_l, x] = a + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_l, x]}.$$

Используя лемму 6, мы оцениваем знаменатель с помощью матричного умножения:

$$\left(\prod_{i=1}^{l} \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + B & A \\ Bx + D & B \end{pmatrix},$$

поэтому $[a_1, \ldots, a_l, x] = (Ax + B)/(Bx + D)$ и мы заключаем

$$\begin{aligned} & x = a + \frac{Bx + D}{Ax + B} \\ \iff \qquad & (Ax + B)x = (Ax + B)a + (Bx + D) \\ \iff \qquad & Ax^2 + Bx = Aax + Ba + Bx + D \\ \iff \qquad & Ax^2 - Aax - (Ba + D) = 0 \\ \overset{x>0}{\iff} \qquad & x = \frac{Aa + \sqrt{(Aa)^2 + 4A(Ba + D)}}{2A} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{A^2a^2 + 4A(Ba + D)}{4A^2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $x = y + \sqrt{z}$ справедливо для $y, z \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда

$$y = \frac{a}{2} \in \mathbb{N} \qquad \iff \qquad a \in 2\mathbb{N} \qquad \iff \qquad a \equiv 0 \pmod 2 \quad \wedge \quad a > 0,$$

и

$$z = \frac{A^2a^2 + 4A(Ba + D)}{4A^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{Ba + D}{A} \in \mathbb{N} \qquad \overset{a\in 2\mathbb{N}}{\iff} \qquad A \mid (Ba + D).$$

Согласно лемме 22, имеем $B^2 \equiv (-1)^{l-1} \pmod A$, поэтому последнее условие дает

$$Ba + D \equiv 0 \pmod A \quad \overset{\cdot(-1)^{l-1}B,\ -(-1)^{l-1}BD}{\iff} \quad a \equiv (-1)^l BD \pmod A,$$

с другой стороны, у нас есть $B^2 \equiv AD + 1 \pmod 2$, так что если $2 \nmid BD \Leftrightarrow B \equiv D \equiv 1 \pmod 2$, то мы будем иметь

$$1 \equiv A + 1 \pmod 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 \mid A,$$

но из $2 \mid a$ следует $2 \nmid (Ba + D)$ и, следовательно, $A \nmid (Ba + D)$, поэтому мы должны иметь $2 \mid BD$. Если $2 \nmid A$, то китайская теорема об остатках[2] дает решение

$$a \equiv (-1)^l(A + 1)BD \pmod{2A} \qquad \iff \qquad a \equiv (-1)^l(A + 1)BD \pmod{2A'}.$$

Если $2 \mid A$, то из $2 \mid BD$ следует, что из второй конгруэнции вытекает первая, поэтому имеем

$$a \equiv (-1)^l BD \pmod A \qquad \iff \qquad a \equiv (-1)^l(A + 1)BD \pmod{2A'}.$$

Кроме того, мы должны иметь $y = a/2 = \lfloor\sqrt{z}\rfloor$, так как $(a/2)^2 \leq z$ тривиальна и мы имеем

$$\begin{aligned} & z = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{Ba + D}{A} < \left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a + 1 \\ \iff \qquad & (B - A)a < A - D \qquad (*) \end{aligned}$$

[2] см. [1]

и по лемме 22 могут возникнуть два случая – мы можем иметь $A = B$, что происходит только если $l = 1$ и $a_1 = 1$, тогда $A - D = 1 - 0 = 1$, сводя вышеприведенное неравенство к $0 < 1$, что верно, или мы имеем $A > B$ и $(*)$ эквивалентно

$$a > \frac{A - D}{\underbrace{B - A}_{\leq 0 \text{ из-за } A \geq D}},$$

и это верно как $a \in \mathbb{N}$, так что действительно имеем $\lfloor \sqrt{z} \rfloor = a/2 = y$.

Теперь нам нужно задать параметры этих решений – мы хотим, чтобы $n \in \mathbb{N}$ давал нам

$$2(n-1)A' + m' = 2nA' - 2A' + m' = 2nA' - (2A' - m')$$

где m' – наименьшее решение $a > \max a_k$ приведенной выше конгруэнции. Имеем

$$\max a_k < m' \leq 2A' + \max a_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq 2A' - m' + \max a_k < 2A'$$

и, следовательно

$$2A' - m' + \max a_k = ((-1)^{l+1}(A+1)BD + \max a_k) \mod 2A';$$

таким образом, при $m := (((-1)^{l+1}(A+1)BD + \max a_k) \mod 2A') - \max a_k$ мы получаем параметризацию

$$a = 2nA' - (2A' - m') = 2nA' - m$$

а возможные значения для z можно вычислить с помощью

$$\begin{aligned} f(n) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{Ba + D}{A} &= \left(nA' - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{B(2nA' - m) + D}{A} \\ &= (A')^2 n^2 - mA'n + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{2A'}{A} Bn + \frac{D - mB}{A} \\ &= (A')^2 n^2 + \left(\frac{2A'}{A} B - mA'\right) n + \frac{D - mB}{A} + \left(\frac{m}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Пример 23.1. Для $(a_1, \ldots, a_l) = (1, 1, 1)$ имеем $(A, B, D) = (3, 2, 1)$ и, следовательно, $A' = 3$. Наименьшее решение > 1 из

$$a \equiv (-1)^l (A+1)BD \pmod{2A'},$$

это $m' = 4$, и действительно, наша формула для m дает нам

$$m = (((-1)^{l+1}(A+1)BD + \max a_k) \mod 2A') - \max a_k = 3 - 1 = \boxed{2} = 6 - 4 = 2A' - m',$$

дающий многочлен Эйлера-Мюира

$$f(n) = 3^2 n^2 + \left(\frac{2 \cdot 3}{3} \cdot 2 - 2 \cdot 3\right) n + \frac{1 - 2 \cdot 2}{3} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 9n^2 - 2n;$$

действительно, имеем $f(1) = 7$ с $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$; $f(2) = 32$ с $\sqrt{32} = [5, \overline{1, 1, 1, 10}]$; $f(3) = 75$ с $\sqrt{75} = [8, \overline{1, 1, 1, 16}]$ и так далее. Мы называем числа $f(n)$ *эквипалиндромическими*, так как непрерывные дробные представления их квадратных корней содержат один и тот же палиндром $(a_1, \ldots, a_l)$.

Примечание 23.2. Таблицу с многочленами для $d \leq 400$ можно найти в приложении.

Код 23.3 (Python). Этот код вычисляет многочлен Э.-М., заданный палиндромом.

```
def euler_muir(P): # P is the given palindrome, for example [1, 1, 1] -> (9, -2, 0)
  A, B, C, D = 1, 0, 0, 1
  p = [a for a in P] # create a copy so P doesn't change
  while len(p) > 0:
    a = p.pop()
    A, B, C, D = a * A + C, a * B + D, A, B
  if B * D % 2 == 1: # unsolvable if B * D = 1 (mod 2)
    return
  A_ = A if A % 2 == 1 else A // 2
  M = max([0] + P)
  m = ((-1) ** (len(P) + 1) * (A + 1) * B * D + M) % (2 * A_) - M
  X, Y, Z = A_ ** 2, (2 * A_ // A) * B - m * A_, (D - B * m) // A + (m // 2) ** 2
  return X, Y, Z
```

Код 23.4 (Python). Этот код вычисляет палиндром $(a_1, \ldots, a_l)$ из $\sqrt{d}$, ср. доказательство 17.

```
def continued_fraction_sqrt_palindrome(d):
  import math
  a_n, m_n, q_n, A = math.floor(math.sqrt(d)), 0, 1, []
  while a_n != 2 * math.floor(math.sqrt(d)):
    A += [a_n]
    m_n = a_n * q_n - m_n
    q_n = (d - m_n ** 2) // q_n
    xi_n = (m_n + math.sqrt(d)) / q_n
    a_n = math.floor(xi_n)
  return A[1:]
```

Лемма 24. *Если l четно и $(a_1, \ldots, a_l)$ – палиндром, то есть $a_k = a_{l-k+1}\ \forall\, k$ и*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то имеем $A+BD \equiv 1 \pmod 2$. В частности, мы имеем $2 \nmid A$, если $\sqrt{d} = [\lfloor\sqrt{d}\rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor}]$.

Доказательство. Мы докажем это утверждение с помощью индукции по $l/2$. Для $l = 0$ (пустое произведение) матричное произведение дает матрицу тождества, то есть

$$A = D = 1 \qquad \text{и} \qquad B = 0,$$

и мы имеем

$$A + BD = 1 + 0 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 2.$$

Для

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{l-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

пусть гипотеза индукции будет $\bar{A} + \bar{B}\bar{D} \equiv 1 \pmod 2$. Имеем

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2\bar{A} + 2a_1\bar{B} + \bar{D} & a_1\bar{A} + \bar{B} \\ a_1\bar{A} + \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix},$$

кроме того, из леммы 22 следует, что $B \equiv AD + 1 \pmod 2$, поэтому имеем

$$A + BD \equiv A + (AD + 1)D \equiv A(1 + D) + D \equiv (a_1\bar{A} + \bar{D})(1 + \bar{A}) + \bar{A} \pmod 2.$$

Если $\bar{A} \equiv 0 \pmod 2$, то из гипотезы индукции следует, что $\bar{D} \equiv 1 \pmod 2$, и мы заключаем

$$A + BD \equiv (0 + 1)(1 + 0) + 0 \equiv 1 \pmod 2,$$

если $\bar{A} \equiv 1 \pmod 2$, то мы заключаем

$$A + BD \equiv (a_1 + \bar{D})(1 + 1) + 1 \equiv 1 \pmod 2.$$

По теореме 23, если $\sqrt{d} = [\lfloor\sqrt{d}\rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor}]$, то имеем $2 \mid BD$ и, следовательно, $2 \nmid A$. □

Дефиниция 25.
Для минимального d, содержащего данный палиндром в непрерывном дробном представлении $\sqrt{d}$, обозначим соответствующий многочлен Эйлера-Мюира через $f_d(n)$; имеем

$$f_d(1) = d.$$

Лемма 26. *Для нечетного a имеем $a^3 \equiv a \pmod{2a}$.*

Доказательство. Имеем

$$a^3 \equiv a \pmod{2a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \equiv a^3 - a \equiv a(a^2-1) \pmod{2a}$$

и это верно, так как a^2-1 четно и, следовательно, $\in 2\mathbb{Z}$, что означает $a(a^2-1) \in 2a\mathbb{Z}$. □

Теорема 27.
Для нечетного $a \geq 1$ многочлен Э.-М., соответствующий палиндрому (a), имеет вид

$$f_{a^2+2}(n) = a^2n^2 + 2n$$

и для нечетного $a \geq 3$, мн. Э.-М., соответствующий палиндрому $(1, a-2, 1)$, имеет вид

$$f_{a^2-2}(n) = a^2n^2 - 2n.$$

Для четного $a \geq 2$, то многочлен Э.-М., соответствующий палиндрому (a), имеет вид

$$f_{a^2+2}(n) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{a^2}{2}+1\right) n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$$

и для четного $a \geq 4$, мн. Э.-М., соответствующий палиндрому $(1, a-2, 1)$, имеет вид

$$f_{a^2-2}(n) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{a^2}{2}-1\right) n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1.$$

Доказательство. Мы рассмотрим нечетный случай: для $(a_1, \ldots, a_l) = (a)$ мы имеем

$$(A, B, D) = (a, 1, 0), \qquad A' = A = a$$

и формула для m дает

$$m = (((-1)^{1+1}(a+1)\cdot 1 \cdot 0 + a) \mod 2a) - a = (a \mod 2a) - a = a - a = 0,$$

что дает нам многочлен Эйлера-Мюира

$$f(n) = a^2n^2 + \left(\frac{2a}{a}\cdot 1 - 0\cdot a\right) n + \frac{0 - 0\cdot 1}{a} + \left(\frac{0}{2}\right)^2 = a^2n^2 + 2n$$

и мы имеем $f(1) = a^2 + 2$. Для $(a_1, \ldots, a_l) = (1, a-2, 1)$ мы вычисляем

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a-2 \end{pmatrix}, \quad A' = A = a$$

и формула для m дает

$$\begin{aligned} m &= (((-1)^{3+1}(a+1)\cdot(a-1)\cdot(a-2) + (a-2)) \mod 2a) - (a-2) \\ &= (((a^2-1)(a-2) + (a-2)) \mod 2a) - (a-2) \\ &= ((a^2(a-2) \mod 2a) - (a-2) \\ &= ((a^3 - 2a^2) \mod 2a) - (a-2) \\ &\overset{26}{=} a - (a-2) \\ &= 2, \end{aligned}$$

что дает нам многочлен Эйлера-Мюира

$$f(n) = a^2n^2 + \left(\frac{2a}{a}\cdot(a-1) - 2\cdot a\right) n + \underbrace{\frac{(a-2) - 2\cdot(a-1)}{a}}_{=-a/a=-1} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = a^2n^2 - 2n$$

и мы имеем $f(1) = a^2 - 2$.

Теперь рассмотрим четный случай. Для $(a_1, \ldots, a_l) = (a)$ мы имеем

$$(A, B, D) = (a, 1, 0), \qquad A' = \frac{A}{2} = \frac{a}{2}$$

и формула для m дает

$$m = (((-1)^{1+1}(a+1) \cdot 1 \cdot 0 + a) \mod a) - a = (a \mod a) - a = 0 - a = -a,$$

что дает нам многочлен Эйлера-Мюира

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{2(a/2)}{a} \cdot 1 - (-a) \cdot \frac{a}{2}\right) n + \frac{0 - (-a) \cdot 1}{a} + \left(\frac{-a}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right) n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

и мы имеем

$$f(1) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1 = a^2 + 2.$$

Для $(a_1, \ldots, a_l) = (1, a-2, 1)$ мы вычисляем, как указано выше,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a-2 \end{pmatrix}, \quad A' = \frac{A}{2} = \frac{a}{2}$$

и формула для m дает

$$\begin{aligned} m &= (((-1)^{3+1}(a+1) \cdot (a-1) \cdot (a-2) + (a-2)) \mod a) - (a-2) \\ &= (((a^2-1)(a-2) + (a-2)) \mod a) - (a-2) \\ &= ((a^2(a-2)) \mod a) - (a-2) \\ &= 0 - (a-2) \\ &= 2 - a, \end{aligned}$$

что дает нам многочлен Эйлера-Мюира

$$\begin{aligned} f(n) &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{2(a/2)}{a} \cdot (a-1) - (2-a) \cdot \frac{a}{2}\right) n + \frac{(a-2) - (2-a) \cdot (a-1)}{a} + \left(\frac{2-a}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left((a-1) - \left(a - \frac{a^2}{2}\right)\right) n + \frac{(a-2)a}{a} + \frac{a^2 - 4a + 4}{4} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right) n + (a-2) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a + 1 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right) n + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

и мы имеем

$$f(1) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2} - 1\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1 = a^2 - 2.$$

□

Теорема 28. *Для $d = a^2 + 1$ ($a \geq 1$) имеем $l = 0$, для $d = a^2 - 1$ ($a \geq 2$) имеем $l = 1$.*

Доказательство. Сначала мы рассмотрим многочлен Эйлера-Мюира, соответствующий палиндрому $()$. У нас есть

$$A = D = 1, \qquad B = 0, \qquad A' = A = 1$$

и формула для m дает

$$m = (((-1)^{0+1}(1+1) \cdot 0 \cdot 1 + 0) \mod 2 - 0 = 0 - 0 = 0,$$

что дает нам многочлен Эйлера-Мюира

$$f(n) = 1^2 n^2 + \left(\frac{2 \cdot 1}{1} \cdot 0 - 0 \cdot 1\right) n + \frac{1 - 0 \cdot 0}{1} + \left(\frac{0}{2}\right)^2 = n^2 + 1,$$

и мы имеем

$$f(1) = 2, \qquad f(a) = a^2 + 1,$$

поэтому числа $d = a^2 + 1$ имеют палиндром $()$ в непрерывном дробном представлении $\sqrt{d}$.

По теореме 27, многочлен Эйлера-Мюра, соответствующий палиндрому (1), имеет вид

$$f(n) = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1,$$

и мы имеем

$$f(1) = 3 = 2^2 - 1, \qquad f(a') = (a'+1)^2 - 1,$$

поэтому числа $d = a^2 - 1$ имеют палиндром (1) в непрерывном дробном предст. $\sqrt{d}$. $\square$

3. Уравнение Пелля

Теперь мы обсудим существование целочисленных решений $x^2 - dy^2 = \pm 1$, где $d \in \mathbb{N}$. Поскольку $(-n)^2 = n^2$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, мы предполагаем, что $x, y \geq 0$ в дальнейшем.

3.1. Разрешимость $x^2 - dy^2 = \pm 1$

Теорема 29. *Если d является совершенным квадратом, то $x^2 - dy^2 = \pm 1$ не имеет решений, кроме $(x, y) = (1, 0)$, за исключением случая, когда $d = 1$, в этом случае $(x, y) = (0, 1)$ является решением.*

Доказательство.
Если d является совершенным квадратом, то существует $k \in \mathbb{N}$, причем $k^2 = d$, и мы имеем

$$1 = |\pm 1| = |x^2 - k^2y^2| = |x + ky| \cdot |x - ky|,$$

поэтому мы должны иметь $|x + ky| = |x - ky| = 1$. Из $x, y, k \geq 0$ следует, что

$$x \leq x + ky = |x + ky| = 1,$$

поэтому мы должны иметь $x \in \{0, 1\}$. Если $x = 0$, то $|ky| = 1$, а значит, $k = y = 1$: в частности, мы заключаем, что $d = k^2 = 1$ и имеем $x^2 - dy^2 = -1$. Если $x = 1$, то

$$1 = |x + ky| = x + ky = 1 + ky \qquad \Longrightarrow \qquad ky = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0$$

и $x^2 - dy^2 = 1$. □

Теорема 30.
Если d не является совершенным квадратом, то существует бесконечно много решений $x^2 - dy^2 = \pm 1$. Более того: если $x^2 - dy^2 = \pm 1$, то существует n с $(x, y) = (h_n, k_n)$, где h_n, k_n такие, как в теореме 14 для $\xi = \sqrt{d}$.

Доказательство. С одной стороны, для d, не являющегося совершенным квадратом, $\sqrt{d}$ принимает вид

$$[\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}]$$

и по следствию 20, для $n = r(l + 1) - 1$, где $r \geq 1$, имеем

$$h_n^2 - dk_n^2 = (-1)^{n-1}$$

а поскольку $k_n < k_{n+1}$ для $n \geq 1$, это дает нам бесконечно много решений.[1]
В частности, n с $h_n^2 - dk_n^2 = -1$, может существовать только в том случае, если l – четное.[2]
С другой стороны, предположим, что $x^2 - dy^2 = \pm 1$.
Сначала рассмотрим положительный случай: у нас есть

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{x - y\sqrt{d}}{y} = \frac{x^2 - dy^2}{y(x + y\sqrt{d})} = \frac{1}{y(x + y\sqrt{d})} > 0.$$

Кроме того, мы имеем границу

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{1}{y(x + y\sqrt{d})} < \frac{\sqrt{d}}{y(x + y\sqrt{d})} = \frac{\sqrt{d}}{y^2(x/y + \sqrt{d})} = \frac{1}{y^2(x/(y\sqrt{d}) + 1)}.$$

Из $x/y - \sqrt{d} > 0 \Leftrightarrow x/y > \sqrt{d} \Leftrightarrow x/(y\sqrt{d}) > 1$ теперь мы можем заключить, что

$$\left|\sqrt{d} - \frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y} - \sqrt{d} < \frac{1}{y^2(x/(y\sqrt{d}) + 1)} < \frac{1}{y^2(1 + 1)} = \frac{1}{2y^2}$$

и по теореме 14, существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(x, y) = (h_n, k_n)$.

[1] лемма 3
[2] для l нечетно, $l + 1$ – четно, при этом n всегда нечетно

В отрицательном случае мы рассуждаем аналогично. Переставляя, получаем

$$x^2 - dy^2 = -1 \qquad \overset{/(-d)}{\iff} \qquad y^2 - \frac{1}{d}x^2 = \frac{1}{d}$$

и мы имеем

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{y - x(1/\sqrt{d})}{x} = \frac{y^2 - (1/d)x^2}{x(y + x(1/\sqrt{d}))} = \frac{1/d}{x(y + x(1/\sqrt{d}))} > 0.$$

Кроме того, у нас есть граница

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{1/d}{x(y + x(1/\sqrt{d}))} < \frac{1/\sqrt{d}}{x(y + x(1/\sqrt{d}))} = \frac{1/\sqrt{d}}{x^2(y/x + 1/\sqrt{d})} = \frac{1}{x^2((y\sqrt{d})/x + 1)}.$$

Из $y/x - 1/\sqrt{d} > 0 \;\Leftrightarrow\; y/x > 1/\sqrt{d} \;\Leftrightarrow\; (y\sqrt{d})/x > 1$ мы можем заключить, что

$$\left|\frac{1}{\sqrt{d}} - \frac{y}{x}\right| = \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}} < \frac{1}{x^2((y\sqrt{d})/x + 1)} < \frac{1}{x^2(1+1)} = \frac{1}{2x^2}.$$

По теореме 14 существует $n' \in \mathbb{N}$ такое, что y/x является n'-ым конвергентом $1/\sqrt{d}$. По лемме 12 мы можем заключить, что x/y является $(n'-1)$-ым конвергентом $\sqrt{d}$, поэтому действительно существует $n = n' - 1$ такое, что $(x, y) = (h_n, k_n)$. □

Пример 30.1. Мы рассматриваем случай $d = 7$. Используя алгоритм из теоремы 17, получаем

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}].$$

Здесь l нечетно, поэтому разрешимо только положительное уравнение Пелля.

Теперь оценим третью конвергенту $\sqrt{d}$:

$$[2,1,1,1] = \left[2,1,1+\frac{1}{1}\right] = [2,1,2] = \left[2,1+\frac{1}{2}\right] = \left[2,\frac{3}{2}\right] = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

и действительно, у нас есть

$$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 64 - 63 = 1.$$

Лемма 31 ([2, упражнение 7.8.5])**.**
Если $x^2 - dy^2 = \pm 1$ и $X + Y\sqrt{d} = (x + y\sqrt{d})^n$, то имеем $X^2 - dY^2 = (\pm 1)^n$.

Доказательство.

$$X^2 - dY^2 = (X + Y\sqrt{d})(X - Y\sqrt{d}) = (x + y\sqrt{d})^n (x - y\sqrt{d})^n = (x^2 - dy^2)^n = (\pm 1)^n.$$

□

Теорема 32. *Если d не является совершенным квадратом, то существует бесконечно много решений $x^2 - dy^2 = 1$ с $k \mid y$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство.
$D := dk^2$ не является совершенным квадратом, поэтому существует бесконечно много решений (X, Y) из

$$X^2 - DY^2 = 1.$$

Для любого из этих решений (X, kY) решает $x^2 - dy^2 = 1$, и мы имеем $k \mid kY$. □

3.2. Разрешимость $x^2 - dy^2 = -1$

Теорема 33 ([2, упражнение 7.8.3]). *Если $d \equiv 3 \pmod 4$, то $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений.*

Доказательство.
Предположим, что $x^2 - dy^2 = -1$ разрешимо. Принимая уравнение по модулю 4, получаем

$$-1 \equiv x^2 - 3y^2 \equiv x^2 + y^2.$$

Но так как $\{a^2 \mod 4 : a \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1\}$, мы приходим к выводу, что $(x^2 + y^2) \mod 4 \in \{0, 1, 2\}$. □

Теорема 34 ([2, упражнение 7.8.11]).
Если d кратно простому p с $p \equiv 3 \pmod 4$, то $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений.

Доказательство. Пусть $p > 2$ – простой множитель d. Если $x^2 - dy^2 = -1$ разрешимо, то имеем $x^2 \equiv -1 \pmod p$. Теперь рассмотрим произведение

$$P = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-2) \cdot (p-1)$$

по модулю p. Так как p простое, то $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – поле, поэтому любое $a \in \{2, \ldots, p-2\}$ имеет обратное $a^{-1} \not\equiv a$, и мы можем сгруппировать факторы $2 \cdot \ldots \cdot (p-2)$ вместе как $(p-3)/2$ пары элементов, произведение которых равно 1. Следовательно, имеем

$$P \equiv 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Сначала отметим, что уравнение $ab \equiv -1$ имеет единственное решение $b \equiv -a^{-1}$ для любого a. Если существует x с $x^2 \equiv -1 \pmod p$, то, с одной стороны, мы имеем $(-x)^2 \equiv -1 \pmod p$, где $x \not\equiv -x$, так как p нечетно, с другой стороны, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ является полем и $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ допускает только два решения, поэтому $\{1, \ldots, p-1\}$ состоит в точности из элементов $\pm x$, а также $(p-3)/2$ пар элементов, произведение которых равно -1. Мы имеем $x \cdot (-x) \equiv -x^2 \equiv 1 \pmod p$, следовательно

$$-1 \equiv P \equiv (-1)^{(p-3)/2} \pmod p.$$

Следовательно, $(p-3)/2$ должно быть нечетным, поэтому существует $k \in \mathbb{Z}$ с

$$\frac{p-3}{2} = 2k - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad p = 4k + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad p \equiv 1 \pmod 4.$$

Следовательно, если $x^2 - dy^2 = -1$ разрешимо, то d не может иметь простого множителя $p \equiv 3 \pmod 4$. □

Теорема 35 ([2, упражнение 7.8.12]).
Если $p \equiv 1 \pmod 4$ является простым, то $x^2 - py^2 = -1$ разрешимо.

Доказательство. Поскольку p не является совершенным квадратом, $x^2 - py^2 = 1$ является разрешимым. Если взять уравнение по модулю 4, то получится

$$x^2 - y^2 \equiv 1,$$

а так как квадраты по модулю 4 всегда $\in \{0, 1\}$, то у нас должно быть $x^2 \equiv 1$ и $y^2 \equiv 0$, поэтому x нечетный, а y четный, следовательно, у нас $2 \mid \text{НОД}(x+1, x-1)$. С другой стороны, имеем

$$\gcd(x+1, x-1) \mid (x+1) - (x-1) = 2,$$

что дает $\gcd(x+1, x-1) = 2$. Пусть теперь (x_0, y_0) – решение $x^2 - py^2 = 1$ с минимальным $y_0 > 0$. Имеем

$$(x_0 + 1)(x_0 - 1) = x_0^2 - 1 = py_0^2.$$

Поскольку p простое, то ровно одно из чисел $x_0 \pm 1$ делится на p. Так как $\text{НОД}(x+1, x-1) = 2$, то множители в левой части являются взаимно простыми целыми числами:

$$\frac{x_0 \pm 1}{2p} \cdot \frac{x_0 \mp 1}{2} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

а так как их произведение – совершенный квадрат, то и эти числа должны быть совершенными квадратами:

$$\frac{x_0 \pm 1}{2p} = u^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \pm 1 = 2pu^2, \qquad \frac{x_0 \mp 1}{2} = v^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \mp 1 = 2v^2, \qquad u, v > 0.$$

Если $x_0 - 1 = 2pu^2$ и $x_0 + 1 = 2v^2$, то имеем

$$1 = \frac{(x_0 + 1) - (x_0 - 1)}{2} = \frac{2v^2 - 2pu^2}{2} = v^2 - pu^2,$$

но из $u^2 \leq (y_0/2)^2 < y_0^2$ следует, что $0 < u < y_0$ противоречит минимальности y_0. Поэтому $x_0 + 1 = 2pu^2$ и $x_0 - 1 = 2v^2$. Отсюда следует, что

$$-1 = \frac{(x_0 - 1) - (x_0 + 1)}{2} = \frac{2v^2 - 2pu^2}{2} = v^2 - pu^2,$$

поэтому $(x, y) = (v, u)$ решает $x^2 - py^2 = -1$. □

Теорема 36 ([3, с. 171]). *Если d не является совершенным квадратом, то $a_1, \ldots, a_l$ при $a_k = a_{l-k}\ \forall\ k$ и l минимальны, так что*

$$\sqrt{d} = [\lfloor \sqrt{d} \rfloor, \overline{a_1, \ldots, a_l, 2\lfloor \sqrt{d} \rfloor}],$$

и A, B, D определены через

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $x^2 - dy^2 = -1$ разрешимо тогда и только тогда, когда (i) $4 \nmid d$, (ii) d не имеет простых факторов $\equiv 3 \pmod 4$, и (iii) A нечетно.

Доказательство. Пусть P и Q - числитель и знаменатель l-й конвергенты $\sqrt{d}$:

$$\frac{P}{Q} = \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_l]} = \lfloor \sqrt{d} \rfloor + \frac{B}{A} = \frac{\lfloor \sqrt{d} \rfloor A + B}{A}.$$

По следствию 9 эта дробь является наименьшей, так как A и B являются взаимно простыми, в частности, $Q = A$.

Если $x^2 - dy^2 = -1$ разрешима, то из теоремы 19 следует, что

$$P^2 - dQ^2 = -1.$$

С одной стороны, d не имеет простых факторов $\equiv 3 \pmod 4$ по теореме 34, с другой стороны, мы должны иметь $4 \nmid d$ и $A \equiv Q \equiv 1 \pmod 2$, так как иначе мы имели бы $P^2 \equiv -1 \pmod 4$.

И наоборот, пусть A нечетно, $4 \nmid d$, и d не имеет простых факторов $\equiv 3 \pmod 4$. С одной стороны, теорема 19 дает нам

$$P^2 - dQ^2 \in \{\pm 1\}.$$

С другой стороны, $Q = A$ нечетно, и $d \mod 4$ должно быть либо 1, либо 2, так что

$$1 \equiv P^2 - dQ^2 \equiv P^2 - d \pmod 4$$

не является удовлетворительным, следовательно, мы должны иметь $P^2 - dQ^2 = -1$. □

Теорема 37. *Для $d > 2$ вида $d = a^2 \pm 2$ для $a \in \mathbb{N}$, $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений.*

Доказательство. Это следует из следствия 20 и теоремы 27, так как $l \in \{1, 3\}$ нечетно. □

Теорема 38. *Для чисел $d > 1$ вида $d = a^2 + 1$ для $a \in \mathbb{N}$, $x^2 - dy^2 = -1$ разрешимо.*
Для чисел $d > 2$ вида $d = a^2 - 1$ для $a \in \mathbb{N}$, $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений.

Доказательство.
Это следует из 20 и 28, так как l четно в первом случае и нечетно во втором. □

3.3. Приложения

Теорема 39 ([2, упражнение 7.8.5]).
Число является одновременно треугольным и совершенным квадратом, т.е.

$$n^2 = \sum_{i=1}^{m} i,$$

тогда и только тогда, когда $\left(\sqrt{m+1}, \frac{n}{\sqrt{m+1}}\right)$ *решает* $x^2 - 2y^2 = 1$ *или* $\left(\sqrt{m}, \frac{n}{\sqrt{m}}\right)$ *решает* $x^2 - 2y^2 = -1$.

Доказательство. Из формулы арифметического ряда получаем

$$n^2 = \sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n^2 = m(m+1).$$

Либо m, либо $m+1$ – четные, поэтому существуют A, B с $\{m, m+1\} = \{2A, B\}$ и $m(m+1) = 2AB$. Так как m и $m+1$ являются взаимно простыми, то и A и B тоже. С другой стороны, поскольку $n^2 = AB$, мы можем заключить, что A и B – совершенные квадраты. Если $m = 2A$, то $m+1 = B$ – совершенный квадрат, и для $k := \sqrt{m+1}$ имеем

$$2n^2 = m(m+1) = (k^2-1)k^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\left(\frac{n}{k}\right)^2 = k^2 - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k^2 - 2\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 1,$$

если $m+1 = 2A$, то $m = B$ – совершенный квадрат, и для $k := \sqrt{m}$ имеем

$$2n^2 = m(m+1) = k^2(k^2+1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\left(\frac{n}{k}\right)^2 = k^2 + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k^2 - 2\left(\frac{n}{k}\right)^2 = -1.$$

И наоборот, *любое* решение $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ описывает число, которое является одновременно треугольным и совершенным квадратом, так как

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 = \pm 1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 2y^2 = x^2 \mp 1 \\ &\Longleftrightarrow \qquad (xy)^2 = \frac{x^2(x^2 \mp 1)}{2} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{x^2-1} i & \text{если } x^2 - 2y^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^{x^2} i & \text{если } x^2 - 2y^2 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Теорема 40 ([2, упражнение 7.8.6]). *Совершенный квадрат* m^2 *является суммой двух последовательных совершенных квадратов* $n^2 + (n+1)^2$ *тогда и только тогда, когда* $(2n+1, m)$ *решает* $x^2 - 2y^2 = -1$.

Доказательство. Мы имеем

$$2m^2 = 2(n^2 + (n+1)^2) = 4n^2 + 4n + 2 = (2n+1)^2 + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2n+1)^2 - 2m^2 = -1.$$

И наоборот, *любое* решение $x^2 - 2y^2 = -1$ описывает совершенный квадрат, который является суммой двух последовательных совершенных квадратов, так как x^2 должен быть нечетным, поэтому x тоже нечетный, то есть существует n такой, что $x = 2n+1$. □

Список литературы

[1] Brilliant. *Chinese Remainder Theorem*. URL: https://brilliant.org/wiki/chinese-remainder-theorem/.

[2] Herbert S. Zuckerman Ivan Niven и Hugh L. Montgomery. *An introduction to the theory of numbers*. 5th ed. Wiley, 1991. ISBN: 9780471625469.

[3] Philip Rippon и Harold Taylor. «Even and odd periods in continued fractions of square roots». В: *Fibonacci Quarterly* 42.2 (май 2004), с. 170—180. URL: https://www.fq.math.ca/Papers1/42-2/quartrippon02_2004.pdf.

[4] Leonard M. Smiley. *The Square Roots of 1-100*. 2000. URL: http://www.math.uaa.alaska.edu/~smiley/cf100palin.html.

A. Многочлены Эйлера-Мюира

Это многочлены Эйлера-Мюра $f_d(n)$ для *примитивного* $d \leq 400$, то есть для d минимального такого, что представление непрерывной дроби $\sqrt{d}$ содержит этот палиндром.
Для генерации содержимого таблицы LaTeX можно использовать следующий код Python, ссылающийся на функции из 23.3 и 23.4:

```
primitives = {}
for d in range(2, 401):
  try:
    palindrome = continued_fraction_sqrt_palindrome(d)
    if palindrome not in [P for D, P in primitives.items()]:
      primitives[d] = palindrome
  except: # fails for perfect squares
    pass
euler_muir_poly = {}
for d in primitives:
  palindrome = primitives[d]
  euler_muir_poly[d] = (palindrome, euler_muir(palindrome))
table_latex = ''
for d in euler_muir_poly:
  palindrome, coeff = euler_muir_poly[d]
  spaced_coeff = ['{:,}'.format(w).replace(',', '\\,') for w in coeff] # separate thousands
  poly_latex = f'{spaced_coeff[0] if coeff[0] != 1 else ""}n^2'
  if coeff[1] > 0:
    poly_latex += f'+{spaced_coeff[1] if coeff[1] != 1 else ""}n'
  elif coeff[1] < 0:
    poly_latex += f'{spaced_coeff[1] if coeff[1] != 1 else ""}n'
  if coeff[2] > 0:
    poly_latex += f'+{spaced_coeff[2]}'
  table_latex += f'${d}$ & ${str(palindrome).replace("[", "(").replace("]", ")")}$ & ${poly_latex}$ \\\\\n'
table_latex = table_latex.rstrip(' \\\\\n')
with open('em_primitive.tex', 'w') as f:
  print(table_latex, file=f)
```

d	палиндром $\sqrt{d}$	$f_d(n)$
2	()	$n^2 + 1$
3	(1)	$n^2 + 2n$
6	(2)	$n^2 + 3n + 2$
7	(1, 1, 1)	$9n^2 - 2n$
11	(3)	$9n^2 + 2n$
13	(1, 1, 1, 1)	$25n^2 - 14n + 2$
14	(1, 2, 1)	$4n^2 + 7n + 3$
18	(4)	$4n^2 + 9n + 5$
19	(2, 1, 3, 1, 2)	$1\,521n^2 - 2\,702n + 1\,200$
21	(1, 1, 2, 1, 1)	$36n^2 - 17n + 2$
22	(1, 2, 4, 2, 1)	$441n^2 - 685n + 266$
23	(1, 3, 1)	$25n^2 - 2n$
27	(5)	$25n^2 + 2n$
28	(3, 2, 3)	$144n^2 - 161n + 45$
29	(2, 1, 1, 2)	$169n^2 - 198n + 58$
31	(1, 1, 3, 5, 3, 1, 1)	$74\,529n^2 - 146\,018n + 71\,520$
34	(1, 4, 1)	$9n^2 + 17n + 8$
38	(6)	$9n^2 + 19n + 10$
41	(2, 2)	$25n^2 + 14n + 2$
43	(1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1)	$281\,961n^2 - 556\,958n + 275\,040$
44	(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)	$225n^2 - 251n + 70$
45	(1, 2, 2, 2, 1)	$144n^2 - 127n + 28$
46	(1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1)	$3\,218\,436n^2 - 6\,412\,537n + 3\,194\,147$
47	(1, 5, 1)	$49n^2 - 2n$
51	(7)	$49n^2 + 2n$
52	(4, 1, 2, 1, 4)	$2\,025n^2 - 3\,401n + 1\,428$
53	(3, 1, 1, 3)	$625n^2 - 886n + 314$
54	(2, 1, 6, 1, 2)	$1\,089n^2 - 1\,693n + 658$
55	(2, 2, 2)	$36n^2 + 17n + 2$
57	(1, 1, 4, 1, 1)	$100n^2 - 49n + 6$
58	(1, 1, 1, 1, 1, 1)	$169n^2 - 140n + 29$
59	(1, 2, 7, 2, 1)	$4\,761n^2 - 8\,462n + 3\,760$
61	(1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1)	$14\,478\,025n^2 - 28\,896\,614n + 14\,418\,650$
62	(1, 6, 1)	$16n^2 + 31n + 15$
66	(8)	$16n^2 + 33n + 17$
67	(5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5)	$35\,605\,089n^2 - 71\,112\,494n + 35\,507\,472$
69	(3, 3, 1, 4, 1, 3, 3)	$219\,024n^2 - 430\,273n + 211\,318$
70	(2, 1, 2, 1, 2)	$225n^2 - 199n + 44$
71	(2, 2, 1, 7, 1, 2, 2)	$170\,569n^2 - 334\,178n + 163\,680$
73	(1, 1, 5, 5, 1, 1)	$15\,625n^2 - 29\,114n + 13\,562$
76	(1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1)	$10\,989\,225n^2 - 21\,920\,651n + 10\,931\,502$
77	(1, 3, 2, 3, 1)	$400n^2 - 449n + 126$
79	(1, 7, 1)	$81n^2 - 2n$
83	(9)	$81n^2 + 2n$
85	(4, 1, 1, 4)	$1\,681n^2 - 2\,606n + 1\,010$
86	(3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3)	$314\,721n^2 - 619\,037n + 304\,402$
88	(2, 1, 1, 1, 2)	$441n^2 - 488n + 135$
89	(2, 3, 3, 2)	$2\,809n^2 - 4\,618n + 1\,898$
91	(1, 1, 5, 1, 5, 1, 1)	$27\,225n^2 - 51\,302n + 24\,168$
92	(1, 1, 2, 4, 2, 1, 1)	$3\,600n^2 - 6\,049n + 2\,541$
93	(1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1)	$396\,900n^2 - 781\,649n + 384\,842$

d	палиндром $\sqrt{d}$	$f_d(n)$
94	$(1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1)$	$12\,217\,323\,024n^2 - 24\,432\,502\,753n + 12\,215\,179\,823$
97	$(1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1)$	$323\,761n^2 - 636\,314n + 312\,650$
98	$(1, 8, 1)$	$25n^2 + 49n + 24$
102	(10)	$25n^2 + 51n + 26$
103	$(6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6)$	$502\,611\,561n^2 - 1\,004\,768\,066n + 502\,156\,608$
106	$(3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3)$	$151\,321n^2 - 294\,632n + 143\,417$
107	$(2, 1, 9, 1, 2)$	$8\,649n^2 - 15\,374n + 6\,832$
108	$(2, 1, 1, 4, 1, 1, 2)$	$4\,225n^2 - 7\,099n + 2\,982$
109	$(2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2)$	$725\,094\,825\,625n^2 - 1\,450\,171\,870\,886n + 725\,077\,045\,370$
111	$(1, 1, 6, 1, 1)$	$196n^2 - 97n + 12$
113	$(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)$	$5\,329n^2 - 9\,106n + 3\,890$
114	$(1, 2, 10, 2, 1)$	$2\,304n^2 - 3\,583n + 1\,393$
115	$(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$	$11\,025n^2 - 19\,798n + 8\,888$
116	$(1, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 1)$	$207\,025n^2 - 404\,249n + 197\,340$
117	$(1, 4, 2, 4, 1)$	$900n^2 - 1\,151n + 368$
118	$(1, 6, 3, 2, 10, 2, 3, 6, 1)$	$199\,572\,129n^2 - 398\,837\,341n + 199\,265\,330$
119	$(1, 9, 1)$	$121n^2 - 2n$
123	(11)	$121n^2 + 2n$
124	$(7, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 7)$	$43\,047\,950\,400n^2 - 86\,091\,280\,001n + 43\,043\,329\,725$
125	$(5, 1, 1, 5)$	$3\,721n^2 - 6\,078n + 2\,482$
126	$(4, 2, 4)$	$400n^2 - 351n + 77$
127	$(3, 1, 2, 2, 7, 11, 7, 2, 2, 1, 3)$	$176\,211\,050\,625n^2 - 352\,412\,640\,002n + 176\,201\,589\,504$
128	$(3, 5, 3)$	$2\,601n^2 - 4\,048n + 1\,575$
129	$(2, 1, 3, 1, 6, 1, 3, 1, 2)$	$550\,564n^2 - 1\,084\,273n + 533\,838$
131	$(2, 4, 11, 4, 2)$	$859\,329n^2 - 1\,697\,438n + 838\,240$
133	$(1, 1, 7, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 7, 1, 1)$	$12\,595\,572\,900n^2 - 25\,188\,557\,201n + 12\,592\,984\,434$
134	$(1, 1, 2, 1, 3, 1, 10, 1, 3, 1, 2, 1, 1)$	$39\,727\,809n^2 - 79\,309\,693n + 39\,582\,018$
135	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$441n^2 - 394n + 88$
137	$(1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1)$	$22\,201n^2 - 40\,914n + 18\,850$
139	$(1, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 2, 11, 2, 1, 1, 7, 3, 1, 3, 1)$	$43\,280\,991\,011\,241n^2 - 86\,561\,826\,895\,982n + 43\,280\,835\,884\,880$
142	$(1, 10, 1)$	$36n^2 + 71n + 35$
146	(12)	$36n^2 + 73n + 37$
149	$(4, 1, 5, 3, 3, 5, 1, 4)$	$86\,583\,025n^2 - 172\,938\,886n + 86\,356\,010$
151	$(3, 2, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 11, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 7, 2, 3)$	$19\,778\,116\,875\,204\,249n^2 - 39\,556\,230\,294\,112\,418n + 19\,778\,113\,418\,908\,320$
153	$(2, 1, 2, 2, 2, 1, 2)$	$7\,744n^2 - 13\,311n + 5\,720$
154	$(2, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 2)$	$736\,164n^2 - 1\,451\,033n + 715\,023$
155	$(2, 4, 2)$	$100n^2 + 49n + 6$
157	$(1, 1, 7, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 1)$	$148\,722\,066\,025n^2 - 297\,434\,467\,814n + 148\,712\,401\,946$
158	$(1, 1, 3, 12, 3, 1, 1)$	$94\,864n^2 - 181\,985n + 87\,279$
159	$(1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1)$	$11\,025n^2 - 19\,402n + 8\,536$
160	$(1, 1, 1, 5, 1, 1, 1)$	$3\,249n^2 - 5\,056n + 1\,967$
161	$(1, 2, 4, 1, 2, 1, 4, 2, 1)$	$215\,296n^2 - 418\,817n + 203\,682$
162	$(1, 2, 1, 2, 12, 2, 1, 2, 1)$	$592\,900n^2 - 1\,166\,199n + 573\,461$
163	$(1, 3, 3, 2, 1, 1, 7, 1, 11, 1, 7, 1, 1, 2, 3, 3, 1)$	$25\,191\,716\,148\,225n^2 - 50\,383\,304\,136\,398n + 25\,191\,587\,988\,336$
164	$(1, 4, 6, 4, 1)$	$6\,400n^2 - 10\,751n + 4\,515$
165	$(1, 5, 2, 5, 1)$	$1\,764n^2 - 2\,449n + 850$
166	$(1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1)$	$4\,357\,032\,433\,168\,041n^2 - 8\,714\,063\,165\,433\,517n + 4\,357\,030\,732\,265\,642$
167	$(1, 11, 1)$	$169n^2 - 2n$
171	(13)	$169n^2 + 2n$
172	$(8, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 6, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 8)$	$854\,646\,629\,841n^2 - 1\,709\,269\,011\,035n + 854\,622\,381\,366$
173	$(6, 1, 1, 6)$	$7\,225n^2 - 12\,214n + 5\,162$

d	палиндром $\sqrt{d}$	$f_d(n)$
174	$(5, 4, 5)$	$3\,025n^2 - 4\,599n + 1\,748$
175	$(4, 2, 1, 2, 4)$	$23\,409n^2 - 42\,770n + 19\,536$
176	$(3, 1, 3)$	$225n^2 - 52n + 3$
177	$(3, 3, 2, 8, 2, 3, 3)$	$5\,503\,716n^2 - 10\,945\,009n + 5\,441\,470$
178	$(2, 1, 12, 1, 2)$	$3\,600n^2 - 5\,599n + 2\,177$
179	$(2, 1, 1, 1, 3, 5, 13, 5, 3, 1, 1, 1, 2)$	$98\,088\,602\,481n^2 - 196\,168\,824\,542n + 98\,080\,222\,240$
181	$(2, 4, 1, 8, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 6, 8, 1, 4, 2)$	$6\,822\,224\,927\,691\,121n^2 - 13\,644\,447\,632\,930\,702n + 6\,822\,222\,705\,239\,762$
183	$(1, 1, 8, 1, 1)$	$324n^2 - 161n + 20$
184	$(1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1)$	$804\,609n^2 - 1\,584\,883n + 780\,458$
186	$(1, 1, 1, 3, 4, 3, 1, 1, 1)$	$75\,625n^2 - 143\,749n + 68\,310$
187	$(1, 2, 13, 2, 1)$	$15\,129n^2 - 26\,894n + 11\,952$
188	$(1, 2, 2, 6, 2, 2, 1)$	$28\,224n^2 - 51\,841n + 23\,805$
190	$(1, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 1)$	$3\,560\,769n^2 - 7\,069\,517n + 3\,508\,938$
191	$(1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 13, 2, 2, 3, 1, 1, 4, 1)$	$423\,518\,513\,089n^2 - 847\,019\,038\,178n + 423\,500\,525\,280$
193	$(1, 8, 3, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 3, 8, 1)$	$16\,125\,190\,225n^2 - 32\,246\,852\,186n + 16\,121\,662\,154$
194	$(1, 12, 1)$	$49n^2 + 97n + 48$
198	(14)	$49n^2 + 99n + 50$
199	$(9, 2, 1, 2, 2, 5, 4, 1, 1, 13, 1, 1, 4, 5, 2, 2, 1, 2, 9)$	$1\,329\,593\,714\,709\,849\,801n^2 - 2\,659\,187\,396\,887\,306\,562n + 1\,329\,593\,682\,177\,456\,960$
201	$(5, 1, 1, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 1, 1, 5)$	$330\,003\,556n^2 - 659\,492\,017n + 329\,488\,662$
202	$(4, 1, 2, 2, 1, 4)$	$48\,841n^2 - 91\,400n + 42\,761$
204	$(3, 1, 1, 6, 1, 1, 3)$	$30\,625n^2 - 56\,251n + 25\,830$
205	$(3, 6, 1, 4, 1, 6, 3)$	$1\,920\,996n^2 - 3\,802\,303n + 1\,881\,512$
206	$(2, 1, 5, 14, 5, 1, 2)$	$4\,301\,476n^2 - 8\,543\,417n + 4\,242\,147$
207	$(2, 1, 1, 2, 1, 1, 2)$	$1\,600n^2 - 2\,049n + 656$
208	$(2, 2, 1, 2, 2)$	$2\,025n^2 - 2\,752n + 935$
209	$(2, 5, 3, 2, 3, 5, 2)$	$2\,592\,100n^2 - 5\,137\,649n + 2\,545\,758$
211	$(1, 1, 9, 5, 1, 2, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 13, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 5, 9, 1, 1)$	$367\,209\,276\,445\,894\,854\,609n^2 - 734\,418\,552\,335\,080\,961\,918n + 367\,209\,275\,889\,186\,107\,520$
212	$(1, 1, 3, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 3, 1, 1)$	$5\,175\,625n^2 - 10\,285\,001n + 5\,109\,588$
213	$(1, 1, 2, 6, 1, 8, 1, 6, 2, 1, 1)$	$44\,355\,600n^2 - 88\,516\,801n + 44\,161\,414$
214	$(1, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 9, 1, 1, 5, 3, 14, 3, 5, 1, 1, 9, 4, 1, 3, 2, 1, 1, 1)$	$564\,864\,956\,791\,065\,679\,329n^2 - 1\,129\,729\,912\,886\,772\,168\,733n + 564\,864\,956\,095\,706\,489\,618$
216	$(1, 2, 3, 2, 1)$	$1\,089n^2 - 1\,208n + 335$
217	$(1, 2, 1, 2, 1, 1, 9, 4, 9, 1, 1, 2, 1, 2, 1)$	$17\,023\,986\,576n^2 - 34\,044\,129\,089n + 17\,020\,142\,730$
218	$(1, 3, 3, 1)$	$289n^2 - 76n + 5$
221	$(1, 6, 2, 6, 1)$	$3\,136n^2 - 4\,607n + 1\,692$
223	$(1, 13, 1)$	$225n^2 - 2n$
227	(15)	$225n^2 + 2n$
229	$(7, 1, 1, 7)$	$12\,769n^2 - 22\,118n + 9\,578$
232	$(4, 3, 7, 3, 4)$	$1\,656\,369n^2 - 3\,273\,532n + 1\,617\,395$
233	$(3, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 3)$	$2\,301\,289n^2 - 4\,556\,266n + 2\,255\,210$
234	$(3, 2, 1, 2, 1, 2, 3)$	$28\,900n^2 - 52\,599n + 23\,933$
236	$(2, 1, 3, 5, 1, 6, 1, 5, 3, 1, 2)$	$334\,341\,225n^2 - 668\,120\,651n + 333\,779\,662$
237	$(2, 1, 1, 7, 10, 7, 1, 1, 2)$	$54\,908\,100n^2 - 109\,588\,049n + 54\,680\,186$
238	$(2, 2, 1, 14, 1, 2, 2)$	$142\,884n^2 - 274\,105n + 131\,459$
239	$(2, 5, 1, 2, 4, 15, 4, 2, 1, 5, 2)$	$160\,583\,731\,441n^2 - 321\,155\,072\,642n + 160\,571\,341\,440$
241	$(1, 1, 9, 1, 5, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 5, 1, 9, 1, 1)$	$20\,923\,534\,350\,625n^2 - 41\,846\,926\,679\,114n + 20\,923\,392\,328\,730$
242	$(1, 1, 3, 1, 14, 1, 3, 1, 1)$	$396\,900n^2 - 774\,199n + 377\,541$
243	$(1, 1, 2, 3, 15, 3, 2, 1, 1)$	$20\,295\,025n^2 - 40\,449\,598n + 20\,154\,816$
244	$(1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 6, 1, 9, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$	$3\,196\,601\,416\,865\,025n^2 - 6\,393\,201\,067\,411\,001n + 3\,196\,599\,650\,546\,220$
245	$(1, 1, 1, 7, 6, 7, 1, 1, 1)$	$2\,742\,336n^2 - 5\,432\,831n + 2\,690\,740$
246	$(1, 2, 5, 1, 14, 1, 5, 2, 1)$	$8\,014\,561n^2 - 15\,940\,317n + 7\,926\,002$
247	$(1, 2, 1, 1, 9, 1, 9, 1, 1, 2, 1)$	$29\,452\,329n^2 - 58\,734\,074n + 29\,281\,992$

d	палиндром $\sqrt{d}$	$f_d(n)$
249	(1, 3, 1, 1, 5, 1, 3, 10, 3, 1, 5, 1, 1, 3, 1)	$73\,461\,597\,444n^2 - 146\,914\,641\,073n + 73\,453\,043\,878$
250	(1, 4, 3, 3, 4, 1)	$78\,961n^2 - 149\,036n + 70\,325$
251	(1, 5, 2, 1, 2, 2, 15, 2, 2, 1, 2, 5, 1)	$53\,804\,049\,849n^2 - 107\,600\,749\,918n + 53\,796\,700\,320$
253	(1, 9, 1, 1, 1, 2, 1, 7, 4, 2, 2, 2, 4, 7, 1, 2, 1, 1, 1, 9, 1)	$10\,262\,117\,490\,452\,100n^2 - 20\,524\,231\,758\,286\,801n + 10\,262\,114\,267\,834\,954$
254	(1, 14, 1)	$64n^2 + 127n + 63$
258	(16)	$64n^2 + 129n + 65$
259	(10, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 10)	$692\,847\,684n^2 - 1\,384\,848\,143n + 692\,000\,718$
261	(6, 2, 3, 7, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 3, 2, 6)	$35\,354\,202\,483\,600n^2 - 70\,708\,212\,847\,999n + 35\,354\,010\,364\,660$
262	(5, 2, 1, 2, 1, 10, 16, 10, 1, 2, 1, 2, 5)	$10\,516\,134\,493\,881n^2 - 21\,032\,164\,007\,245n + 10\,516\,029\,513\,626$
263	(4, 1, 1, 1, 1, 15, 1, 1, 1, 1, 4)	$73\,599\,241n^2 - 146\,920\,226n + 73\,321\,248$
265	(3, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3)	$139\,129n^2 - 266\,114n + 127\,250$
266	(3, 4, 3)	$441n^2 - 197n + 22$
267	(2, 1, 15, 1, 2)	$21\,609n^2 - 38\,414n + 17\,072$
268	(2, 1, 2, 3, 3, 1, 3, 1, 10, 8, 10, 1, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 2)	$21\,234\,349\,584\,091\,449n^2 - 42\,468\,694\,397\,100\,971n + 21\,234\,344\,813\,009\,790$
270	(2, 3, 6, 3, 2)	$25\,921n^2 - 46\,551n + 20\,900$
271	(2, 6, 10, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 15, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 10, 6, 2)	$49\,631\,722\,586\,790\,660\,369n^2 - 99\,263\,444\,941\,631\,353\,538n + 49\,631\,722\,354\,840\,693\,440$
273	(1, 1, 10, 1, 1)	$484n^2 - 241n + 30$
274	(1, 1, 4, 4, 1, 1)	$7\,225n^2 - 11\,636n + 4\,685$
276	(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)	$54\,756n^2 - 101\,737n + 47\,257$
277	(1, 1, 1, 4, 10, 1, 7, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 7, 1, 10, 4, 1, 1, 1)	$287\,274\,501\,442\,203\,025n^2 - 574\,548\,985\,043\,437\,814n + 287\,274\,483\,601\,235\,066$
278	(1, 2, 16, 2, 1)	$5\,625n^2 - 8\,749n + 3\,402$
279	(1, 2, 2, 1, 2, 2, 1)	$8\,281n^2 - 13\,522n + 5\,520$
280	(1, 2, 1, 2, 1)	$225n^2 + 52n + 3$
281	(1, 3, 4, 1, 1, 6, 6, 1, 1, 4, 3, 1)	$4\,025\,268\,025n^2 - 8\,048\,408\,986n + 4\,023\,141\,242$
282	(1, 3, 1, 4, 1, 3, 1)	$4\,900n^2 - 7\,449n + 2\,831$
283	(1, 4, 1, 1, 1, 3, 10, 1, 15, 1, 10, 3, 1, 1, 1, 4, 1)	$67\,560\,854\,250\,681n^2 - 135\,121\,431\,953\,198n + 67\,560\,577\,702\,800$
284	(1, 5, 1, 3, 2, 1, 4, 8, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 1)	$516\,414\,704\,400n^2 - 1\,032\,805\,188\,001n + 516\,390\,483\,885$
285	(1, 7, 2, 7, 1)	$5\,184n^2 - 7\,937n + 3\,038$
286	(1, 10, 3, 3, 2, 3, 3, 10, 1)	$275\,925\,321n^2 - 551\,288\,807n + 275\,363\,772$
287	(1, 15, 1)	$289n^2 - 2n$
291	(17)	$289n^2 + 2n$
292	(11, 2, 1, 3, 8, 3, 1, 2, 11)	$4\,455\,562\,500n^2 - 8\,908\,843\,751n + 4\,453\,281\,543$
293	(8, 1, 1, 8)	$21\,025n^2 - 37\,086n + 16\,354$
294	(6, 1, 4, 1, 6)	$19\,600n^2 - 34\,399n + 15\,093$
295	(5, 1, 2, 3, 2, 6, 2, 3, 2, 1, 5)	$3\,475\,102\,500n^2 - 6\,948\,180\,001n + 3\,473\,077\,796$
296	(4, 1, 7, 1, 4)	$46\,225n^2 - 85\,052n + 39\,123$
297	(4, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 4)	$1\,988\,100n^2 - 3\,927\,601n + 1\,939\,798$
298	(3, 1, 4, 5, 1, 1, 5, 4, 1, 3)	$562\,875\,625n^2 - 1\,124\,932\,136n + 562\,056\,809$
300	(3, 8, 3)	$1\,521n^2 - 1\,691n + 470$
301	(2, 1, 6, 3, 1, 2, 2, 1, 1, 8, 11, 2, 4, 2, 11, 8, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 6, 1, 2)	$28\,749\,425\,043\,692\,036\,541\,456n^2 - 57\,498\,850\,081\,500\,680\,545\,217n + 28\,749\,425\,037\,808\,644\,004\,062$
302	(2, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 16, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 2)	$15\,140\,318\,116n^2 - 30\,276\,359\,609n + 15\,136\,041\,795$
303	(2, 2, 5, 2, 2)	$21\,025n^2 - 37\,002n + 16\,280$
304	(2, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2)	$10\,989\,225n^2 - 21\,862\,852n + 10\,873\,931$
305	(2, 6, 2)	$196n^2 + 97n + 12$
307	(1, 1, 11, 5, 1, 3, 17, 3, 1, 5, 11, 1, 1)	$25\,529\,100\,232\,689n^2 - 51\,058\,023\,406\,814n + 25\,528\,923\,174\,432$
309	(1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 8, 6, 1, 10, 1, 6, 8, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 2, 1, 1)	$3\,334\,943\,334\,131\,329\,284n^2 - 6\,669\,886\,604\,059\,933\,073n + 3\,334\,943\,269\,928\,604\,098$
310	(1, 1, 1, 1, 5, 3, 1, 2, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 1)	$580\,906\,404n^2 - 1\,160\,964\,089n + 580\,057\,995$
311	(1, 1, 1, 2, 1, 6, 3, 17, 3, 6, 1, 2, 1, 1, 1)	$916\,609\,015\,609n^2 - 1\,833\,184\,263\,458n + 916\,575\,248\,160$
313	(1, 2, 4, 11, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 11, 4, 2, 1)	$51\,418\,723\,369\,225n^2 - 102\,837\,193\,013\,714n + 51\,418\,469\,644\,802$
314	(1, 2, 1, 1, 2, 1)	$625n^2 - 364n + 53$
316	(1, 3, 2, 8, 2, 3, 1)	$129\,600n^2 - 246\,401n + 117\,117$

d	палиндром $\sqrt{d}$	$f_d(n)$
317	$(1, 4, 8, 1, 2, 2, 1, 8, 4, 1)$	$392\,238\,025n^2 - 783\,770\,814n + 391\,533\,106$
319	$(1, 6, 5, 1, 4, 3, 1, 3, 4, 1, 5, 6, 1)$	$521\,805\,414\,321n^2 - 1\,043\,585\,025\,082n + 521\,779\,611\,080$
322	$(1, 16, 1)$	$81n^2 + 161n + 80$
326	(18)	$81n^2 + 163n + 82$
329	$(7, 4, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 4, 7)$	$4\,291\,298\,064n^2 - 8\,580\,219\,713n + 4\,288\,921\,978$
331	$(5, 5, 1, 6, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 11, 2, 1, 1, 17, 1, 1, 2, 11, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 6, 1, 5, 5)$	$23\,442\,630\,035\,977\,813\,320\,534\,892\,329n^2 - 46\,885\,260\,071\,950\,055\,461\,466\,896\,718n + 23\,442\,630\,035\,972\,242\,140\,932\,004\,720$
332	$(4, 1, 1, 8, 1, 1, 4)$	$136\,161n^2 - 258\,875n + 123\,046$
334	$(3, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 2, 2, 11, 1, 3, 7, 18, 7, 3, 1, 11, 2, 2, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 3)$	$3\,047\,154\,270\,780\,318\,840\,142\,884n^2 - 6\,094\,308\,541\,496\,833\,306\,566\,073n + 3\,047\,154\,270\,716\,514\,466\,423\,523$
335	$(3, 3, 3)$	$1\,089n^2 - 970n + 216$
337	$(2, 1, 3, 1, 11, 2, 4, 1, 3, 3, 1, 4, 2, 11, 1, 3, 1, 2)$	$3\,062\,033\,164\,880\,881n^2 - 6\,124\,064\,298\,107\,090n + 3\,062\,031\,133\,226\,546$
339	$(2, 2, 2, 1, 17, 1, 2, 2, 2)$	$28\,313\,041n^2 - 56\,430\,142n + 28\,117\,440$
340	$(2, 3, 1, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 3, 2)$	$60\,047\,001n^2 - 119\,808\,233n + 59\,761\,572$
341	$(2, 6, 1, 8, 2, 1, 2, 1, 2, 8, 1, 6, 2)$	$82\,788\,552\,900n^2 - 165\,566\,479\,249n + 82\,777\,926\,690$
343	$(1, 1, 11, 1, 5, 3, 1, 17, 1, 3, 5, 1, 11, 1, 1)$	$49\,708\,972\,110\,681n^2 - 99\,417\,683\,068\,706n + 49\,708\,710\,958\,368$
344	$(1, 1, 4, 1, 3, 1, 4, 1, 1)$	$314\,721n^2 - 608\,632n + 294\,255$
345	$(1, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 1)$	$33\,124n^2 - 59\,487n + 26\,708$
347	$(1, 1, 1, 2, 4, 1, 17, 1, 4, 2, 1, 1, 1)$	$1\,186\,320\,249n^2 - 2\,371\,357\,294n + 1\,185\,037\,392$
348	$(1, 1, 1, 8, 1, 1, 1)$	$1\,764n^2 - 1\,961n + 545$
349	$(1, 2, 7, 7, 2, 1)$	$243\,049n^2 - 467\,678n + 224\,978$
351	$(1, 2, 1, 3, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 1)$	$2\,775\,556n^2 - 5\,488\,687n + 2\,713\,482$
352	$(1, 3, 5, 9, 5, 3, 1)$	$17\,114\,769n^2 - 34\,074\,304n + 16\,959\,887$
353	$(1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1)$	$14\,386\,849n^2 - 28\,631\,170n + 14\,244\,674$
354	$(1, 4, 2, 2, 18, 2, 2, 4, 1)$	$47\,032\,164n^2 - 93\,806\,263n + 46\,774\,453$
355	$(1, 5, 3, 3, 1, 6, 1, 3, 3, 5, 1)$	$642\,014\,244n^2 - 1\,283\,073\,679n + 641\,059\,790$
356	$(1, 6, 1, 1, 2, 1, 8, 1, 2, 1, 1, 6, 1)$	$175\,562\,500n^2 - 350\,624\,999n + 175\,062\,855$
357	$(1, 8, 2, 8, 1)$	$8\,100n^2 - 12\,799n + 5\,056$
358	$(1, 11, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 5, 2, 18, 2, 5, 1, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 11, 1)$	$21\,774\,041\,770\,465\,247\,769n^2 - 43\,548\,083\,364\,350\,689\,741n + 21\,774\,041\,593\,885\,442\,330$
359	$(1, 17, 1)$	$361n^2 - 2n$
363	(19)	$361n^2 + 2n$
364	$(12, 1, 2, 3, 1, 8, 1, 3, 2, 1, 12)$	$16\,862\,321\,025n^2 - 33\,719\,687\,099n + 16\,857\,366\,438$
365	$(9, 1, 1, 9)$	$32\,761n^2 - 58\,606n + 26\,210$
366	$(7, 1, 1, 1, 2, 12, 2, 1, 1, 1, 7)$	$563\,065\,441n^2 - 1\,125\,222\,957n + 562\,157\,882$
367	$(6, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 12, 19, 12, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 6)$	$985\,722\,701\,380\,761\,969n^2 - 1\,971\,445\,364\,721\,532\,802n + 985\,722\,663\,340\,771\,200$
368	$(5, 2, 5)$	$900n^2 - 649n + 117$
369	$(4, 1, 3, 2, 7, 4, 7, 2, 3, 1, 4)$	$47\,768\,473\,600n^2 - 95\,528\,550\,399n + 47\,760\,077\,168$
370	$(4, 4)$	$289n^2 + 76n + 5$
371	$(3, 1, 4, 1, 3)$	$1\,936n^2 - 2\,177n + 612$
372	$(3, 2, 12, 2, 3)$	$99\,225n^2 - 186\,299n + 87\,446$
373	$(3, 5, 5, 3)$	$70\,225n^2 - 130\,214n + 60\,362$
374	$(2, 1, 18, 1, 2)$	$7\,569n^2 - 11\,773n + 4\,578$
375	$(2, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 2)$	$609\,961n^2 - 1\,189\,674n + 580\,088$
376	$(2, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 4, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 2)$	$3\,054\,330\,756n^2 - 6\,106\,518\,217n + 3\,052\,187\,837$
378	$(2, 3, 1, 4, 1, 3, 2)$	$50\,625n^2 - 92\,501n + 42\,254$
379	$(2, 7, 3, 2, 2, 6, 12, 1, 4, 1, 1, 1, 3, 4, 19, 4, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 12, 6, 2, 2, 3, 7, 2)$	$441\,885\,449\,870\,527\,916\,227\,060\,542\,681n^2 - 883\,770\,899\,741\,029\,950\,059\,680\,003\,982n + 441\,885\,449\,870\,502\,033\,832\,619\,461\,680$
381	$(1, 1, 12, 1, 1)$	$676n^2 - 337n + 42$
382	$(1, 1, 5, 12, 1, 5, 1, 1, 2, 3, 1, 18, 1, 3, 2, 1, 1, 5, 1, 12, 5, 1, 1)$	$17\,817\,071\,467\,345\,290\,000n^2 - 35\,634\,142\,769\,692\,140\,001n + 17\,817\,071\,302\,346\,850\,383$
383	$(1, 1, 3, 19, 3, 1, 1)$	$919\,681n^2 - 1\,801\,826n + 882\,528$
384	$(1, 1, 2, 9, 2, 1, 1)$	$60\,025n^2 - 110\,448n + 50\,807$
385	$(1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$	$5\,963\,364n^2 - 11\,830\,897n + 5\,867\,918$
386	$(1, 1, 1, 4, 1, 18, 1, 4, 1, 1, 1)$	$8\,059\,921n^2 - 16\,008\,287n + 7\,948\,752$
387	$(1, 2, 19, 2, 1)$	$31\,329n^2 - 55\,694n + 24\,752$

d	палиндром $\sqrt{d}$	$f_d(n)$
388	$(1, 2, 3, 4, 12, 1, 8, 1, 12, 4, 3, 2, 1)$	$2\,541\,913\,658\,244n^2 - 5\,083\,764\,506\,855n + 2\,541\,850\,848\,999$
389	$(1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$	$4\,225n^2 - 5\,886n + 2\,050$
391	$(1, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 19, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 1)$	$137\,739\,703\,689n^2 - 275\,464\,730\,018n + 137\,725\,026\,720$
393	$(1, 4, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 1, 4, 2, 1, 4, 1)$	$1\,371\,760\,973\,284n^2 - 2\,743\,475\,509\,425n + 1\,371\,714\,536\,534$
394	$(1, 5, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 1, 3, 1, 1, 1, 5, 1)$	$396\,048\,726\,346\,729n^2 - 792\,096\,662\,647\,388n + 396\,047\,936\,301\,053$
397	$(1, 12, 3, 4, 9, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 9, 4, 3, 12, 1)$	$1\,056\,324\,667\,563\,199\,225n^2 - 2\,112\,649\,294\,169\,792\,486n + 1\,056\,324\,626\,606\,593\,658$
398	$(1, 18, 1)$	$100n^2 + 199n + 99$

Наконец, мы перечислим непримитивные $d \leq 400$ и их представления $f_D(n)$, где D – примитив.

5	$f_2(2)$	30	$f_6(4)$	50	$f_2(7)$	78	$f_{34}(2)$	101	$f_2(10)$	136	$f_7(4)$	152	$f_{11}(4)$	195	$f_3(13)$	224	$f_3(14)$	255	$f_3(15)$	299	$f_{28}(2)$	325	$f_2(18)$	350	$f_{45}(2)$	399	$f_3(19)$
8	$f_3(2)$	32	$f_7(2)$	56	$f_6(6)$	80	$f_3(8)$	104	$f_{27}(2)$	138	$f_{14}(5)$	156	$f_6(11)$	197	$f_2(14)$	226	$f_2(15)$	257	$f_2(16)$	306	$f_6(16)$	327	$f_{146}(2)$	360	$f_3(18)$		
10	$f_2(3)$	33	$f_{14}(2)$	60	$f_{14}(3)$	82	$f_2(9)$	105	$f_{18}(4)$	140	$f_{34}(3)$	168	$f_3(12)$	200	$f_{51}(2)$	228	$f_{102}(2)$	260	$f_{66}(3)$	308	$f_{57}(2)$	328	$f_{83}(2)$	362	$f_2(19)$		
12	$f_6(2)$	35	$f_3(5)$	63	$f_3(7)$	84	$f_{38}(2)$	110	$f_6(9)$	141	$f_{62}(2)$	170	$f_2(13)$	203	$f_{18}(6)$	230	$f_{38}(4)$	264	$f_{18}(7)$	312	$f_7(6)$	330	$f_{38}(5)$	377	$f_{55}(3)$		
15	$f_3(3)$	37	$f_2(6)$	65	$f_2(8)$	87	$f_{11}(3)$	112	$f_{21}(2)$	143	$f_3(11)$	180	$f_{55}(2)$	210	$f_6(13)$	231	$f_{27}(3)$	269	$f_{41}(3)$	315	$f_{14}(8)$	333	$f_{18}(8)$	380	$f_6(18)$		
17	$f_2(4)$	39	$f_{18}(2)$	68	$f_{18}(3)$	90	$f_6(8)$	120	$f_3(10)$	145	$f_2(12)$	182	$f_6(12)$	215	$f_7(5)$	235	$f_{11}(5)$	272	$f_6(15)$	318	$f_{34}(5)$	336	$f_{11}(6)$	390	$f_{14}(9)$		
20	$f_6(3)$	40	$f_{11}(2)$	72	$f_6(7)$	95	$f_{14}(4)$	122	$f_2(11)$	147	$f_{66}(2)$	185	$f_{13}(3)$	219	$f_{23}(3)$	240	$f_6(14)$	275	$f_{21}(3)$	320	$f_{79}(2)$	338	$f_{29}(2)$	392	$f_{23}(4)$		
24	$f_3(4)$	42	$f_6(5)$	74	$f_{13}(2)$	96	$f_{23}(2)$	130	$f_{41}(2)$	148	$f_{38}(3)$	189	$f_{14}(6)$	220	$f_{34}(4)$	248	$f_{14}(7)$	288	$f_3(16)$	321	$f_{142}(2)$	342	$f_6(17)$	395	$f_{62}(4)$		
26	$f_2(5)$	48	$f_3(6)$	75	$f_7(3)$	99	$f_3(9)$	132	$f_6(10)$	150	$f_{18}(5)$	192	$f_{47}(2)$	222	$f_{98}(2)$	252	$f_{62}(3)$	290	$f_2(17)$	323	$f_3(17)$	346	$f_{13}(4)$	396	$f_{98}(3)$		

Код Python, генерирующий эту таблицу LaTeX, немного сложнее из-за расположения столбцов:

```
non_primitives = {}
for d in euler_muir_poly:
  def f_d(n):
    _, coeff = euler_muir_poly[d]
    return coeff[0] * n ** 2 + coeff[1] * n + coeff[2]
  n = 2
  while f_d(n) <= 400:
    non_primitives[f_d(n)] = (d, n)
    n += 1
non_primitives = dict(sorted(non_primitives.items(), key=lambda x: x[0])) # sort
import math
np_item_list = list(non_primitives.items())
N = len(np_item_list)
cols = 14
rows = math.ceil(N / cols)
table_latex = f'\\begin{{tabular}}{{*{{{cols}}}{{|c|c|}}}}\n\\hline\n'
for r in range(0, rows):
  for c in range(0, cols):
    i = r + rows * c
    if i < N:
      np_item = np_item_list[i]
      d, D, n = np_item[0], np_item[1][0], np_item[1][1]
      table_latex += f'${d}$ & $f_{{{D}}}({n})$'
      if c < cols - 1 and r + rows * (c + 1) < N:
        table_latex += ' & '
  table_latex += ' \\\\\n'
  if r == rows - 1:
    if rows * cols == N:
      table_latex += '\\hline\n'
    else:
      table_latex += f'\\cline{{1-{2 * cols - 2}}}\n'
  if i == N - 1 and rows * cols != N:
    table_latex += f'\\cline{{{2 * cols - 1}-{2 * cols}}}\n'
table_latex += '\\end{tabular}'
with open('em_other.tex', 'w') as f:
  print(table_latex, file=f)
```