Inoffizielles Skript zur Vorlesung Analysis II

Vorwort

Verwendete Mitschriften nach Vorlesung:

	April						Mai							Juni						Juli				
	7	10	14	17	24	28	5	8	12	15	19	22	26	2	5	19	23	26	30	3	7	10	14	17
eigene	✓	✓			✓	✓					✓				✓		✓						✓	
Bianca	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ewald																								✓

HINWEIS: Ich würde mich noch über weitere Mitschriften freuen, da es wünschenswert wäre, zu jeder Vorlesung mindestens zwei Exemplare zum Abgleich vorliegen zu haben. Ich erkenne zwar die gröbsten Rechtschreib- und Abschreibefehler direkt und beseitige diese umgehend, jedoch werden mir sicherlich auch einige Fehler entgehen.

Ich behalte mir wie immer vor, Formulierungen abzuändern, falls dies dem besseren Verständnis dient. Die wichtigsten dieser Abweichungen sind gelb hinterlegt und stammen nicht aus dem Originalskript, sondern sind Kommentare/Hinzufügungen meinerseits.

Danke allen, die bisher auf Fehler im Skript hingewiesen haben; ihr helft, das Skript zu perfektionieren!

Bezüglich konstruktiver Kritik, Kommentaren, Fehlern im Skript etc. erreicht ihr mich über:
Lukas Steenvoort, *Lukas.Steenvoort@rub.de* oder einfach vor/nach der Vorlesung im Hörsaal.

Die aktuellste Version dieses Skripts findet ihr stets unter `http://is.gd/Ana2Skript`.

Das Skript zur Analysis I findet ihr wie bisher unter `http://is.gd/Ana1Skript`.

3 Differential- und Integralrechnung

Integration bei variabler oberer Grenze

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ a < b$, eine Regelfunktion. Sei $x \in [a,b]$. Dann ist auch die Einschränkung von f auf $[a,x]$ eine Regelfunktion. Das Integral dieser eingeschränkten Funktion wird mit $\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ bezeichnet.

(3.22) Hilfssatz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann ist die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ stetig.

Beweis

Folgt unmittelbar aus der Abschätzung $|F(x) - F(y)| \leq \underbrace{\|f\|}_{\text{Jede Regelfunktion ist beschränkt (Bem (3.10))}} \cdot |x - y|$ (Übungsaufgabe!) □

Uneigentliche Integrale

Es sei $D = [a,b)$ ein nichtleeres halboffenes Intervall [1] und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wir versuchen nun, das Integral durch $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ zu definieren.

(3.23) Definition

Sei D ein nach oben unbeschränktes Intervall *(also eine rechte Halbgerade)* und $F : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $b \in \mathbb{R}$. Wir sagen, der Grenzwert von $F(x)$ für $x \to \infty$ existiert und ist gleich b $\left(\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = b\right)$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein hinreichend großes $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|F(x) - b| < \epsilon$ für alle $x > C$ gilt.

Bemerkung

Betrachtet man auf dem Intervall $D_0 := \{x > 0 : \frac{1}{x} \in \mathbb{D}\}$ die Funktion $G : D_0 \to \mathbb{R},\ G(x) = F(\frac{1}{x})$, so gilt offensichtlich $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = b \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x \to 0} G(x) = b$.

Insbesondere gelten für den soeben eingeführten Grenzwertbegriff die üblichen Rechenregeln.

Ist der Definitionsbereich D ein nach unten unbeschränktes Intervall, so definiert man analog:

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = b \ \Leftrightarrow\ |F(x) - b| < \epsilon\ \forall x < -C$ für ein hinreichend großes $C = C(\epsilon) \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0$ beliebig.

(3.24) Definition

Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Einschränkung von f auf jedes abgeschlossene Teilintervall von $[a,b)$ eine Regelfunktion ist und der Grenzwert $\lim\limits_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x \in [a,b)$ existiert.

Dann definiert man das **uneigentliche Integral** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x \in [a,b)$.

(3.25) Bemerkung

Das gewöhnliche Regelintegral kann als Spezialfall des uneigentlichen Integrals aufgefasst werden:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so gilt $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x \in [a,b)$. Dies folgt aus (3.22).

[1] Hierbei soll der Fall $b = \infty$ nicht ausgeschlossen werden.

Analog definiert man für $f:(a,b]\to\mathbb{R}$: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to a}\int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t,\ x\in(a,b]$, falls die Einschränkung $f|_{[x,b]}$ für jedes $x\in(a,b]$ eine Regelfunktion ist und obiger Grenzwert existiert.
Möchte man ein zu beiden Seiten uneigentliches Integral der Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R},\ a<b$ definieren, so wählt man ein beliebiges $\xi\in(a,b)$ und definiert: $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a}\int\limits_x^\xi f(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{y\to b}\int\limits_\xi^y f(t)\mathrm{d}t,\ x,y\in(a,b)$; somit führt man beidseitig uneigentliche Integrale auf einseitig uneigentliche Integrale zurück. Das beidseitig uneigentliche Integral existiert genau dann, wenn die beiden einseitigen Integrale existieren. Man zeige als Übungsaufgabe, dass die Definition unabhängig von ξ ist.

Absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale

(3.26) Definition

Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ auf einem (nicht notwendigerweise abgeschlossenen) Intervall heißt **absolut integrierbar**, falls ihre Einschränkung auf jedes abgeschlossene Teilintervall eine Regelfunktion ist und falls $|f|$ uneigentlich integrierbar ist.

Wie für unendliche Reihen gilt:
(3.27) Satz

Sei $f:D\to\mathbb{R}$ eine Funktion auf einem nicht notwendigerweise abgeschlossenen Intervall, deren Einschränkung auf jedes abgeschlossene Teilintervall eine Regelfunktion ist. Genau dann ist f absolut integrierbar, wenn es eine gemeinsame obere Schranke für die Integrale $\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,\ a<b,\ a,b\in D$ gibt.

Beweis
Klar, falls $f\geq 0$, denn dann ist das uneigentliche Integral gleich $\sup\left\{\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x : a<b,\ a,b\in D\right\}$.
Allgemein betrachten wir die Zerlegung $f=f_+-f_-$ mit $f_+ := \underbrace{\tfrac{1}{2}(|f|+f)}_{\geq 0},\ f_- := \underbrace{\tfrac{1}{2}(|f|-f)}_{\geq 0}$.

(3.28) Satz *(Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale)*

Sei $f:D\to\mathbb{R},\ D=(a,b),\ a<b$, eine Funktion, deren Einschränkung auf jedes beliebige abgeschlossene Teilintervall von D eine Regelfunktion ist. Ferner existiere eine uneigentlich integrierbare Funktion $g:D\to\mathbb{R}$ mit $|f(x)|\leq g(x)\ \forall x\in D$. Dann ist auch f uneigentlich integrierbar.
Beweis: folgt aus (3.27)!

(3.29) Beispiel

$\int\limits_1^\infty x^\alpha\mathrm{d}x$: wann existiert das uneigentliche Integral?
Für $\alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\mathbb{N}_0$ haben wir bereits gezeigt: $\int\limits_a^b x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ 0<a<b$.
Wir zeigen später mittels Differentialrechnung: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{für } \alpha\neq -1;\\ \log(b)-\log(a) & \text{für } \alpha=-1.\end{cases}$
Es folgt insbesondere: $\int\limits_1^x t^\alpha\mathrm{d}t = \begin{cases}\frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha\neq -1;\\ \log(x) & \text{für } \alpha=-1.\end{cases}$
Damit wir einen Grenzübergang für $x\to\infty$ vornehmen können, muss die Integralfunktion F_α – gegeben durch $F_\alpha(x)=\int\limits_1^x t^\alpha\mathrm{d}t$ – beschränkt sein; dies ist nur für $\alpha+1<0\ \Leftrightarrow\ \alpha<-1$ der Fall.
In diesem Fall ist $\int\limits_1^\infty x^\alpha\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+\alpha}$.

Anwendung uneigentlicher Integrale auf Konvergenzuntersuchungen zu Reihen

Es gibt zwei wichtige Verfahren, die Konvergenz von unendlichen Reihen zu untersuchen:
(i) Das *Majorantenkriterium*, speziell mit der geometrischen Reihe:
Damit konnten wir beispielsweise Potenzreihen in den Griff kriegen.
(ii) Vergleich unendlicher Reihen mit uneigentlichen Integralen.
(ii) erläutern wir am Beispiel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s},\ s \in \mathbb{R}$.

Behauptung: Die Reihe konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.
Beweis: Definiere die Treppenfunktionen $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = n^{-s}$ für $n \leq x < n+1,\ n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s} = \int\limits_{1}^{N+1} f(x)\mathrm{d}x$
$\forall x \geq 2$ und $s > 0$ gilt weiter die Abschätzung $(x-1)^{-s} \geq f(x) \geq x^{-s}$.
(Für $s \leq 0$ divergiert die Reihe ohnehin.)
Es folgt (wegen der Monotonie des Regelintegrals) $\int\limits_{2}^{N+1} (x-1)^{-s}\mathrm{d}x \geq \int\limits_{2}^{N+1} f(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_{2}^{N+1} x^{-s}\mathrm{d}x$,

$$\text{also } \underbrace{\int_1^N x^{-s}\mathrm{d}x}_{\substack{\log N \text{ für } s=1 \\ \frac{N^{-s+1}-1}{-s+1} \text{ für } s\neq 1}} \geq \sum_{n=2}^{N} n^{-s} \geq \underbrace{\int_2^{N+1} x^{-s}\mathrm{d}x.}_{\substack{\log(N+1)-log2 \text{ für } s=1 \\ \frac{(N+1)^{-s+1}-2^{-s+1}}{-s+1} \text{ für } s\neq 1}}$$

Nun gilt ja: $\sum n^{-s}$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (T_n) der Partialsummen[1] beschränkt bleibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $-s+1 < 0 \Leftrightarrow s > 1$ ist.

Untersuchen wir nun die sogenannte Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R},\ s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.
Wie verhält diese sich in der Nähe von 1?
Aus unseren Abschätzungen über die Integrale folgt: $\lim\limits_{s \to 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1$.
Riemann zeigte sogar, dass die Funktion $g : (1, \infty) \to \mathbb{R},\ s \mapsto (s-1)\zeta(s)$ eine Entwicklung in eine Potenzreihe besitzt, welche in ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.

Offenbar gilt: Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = a_n\ \forall x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}$ absolut integrierbar ist.

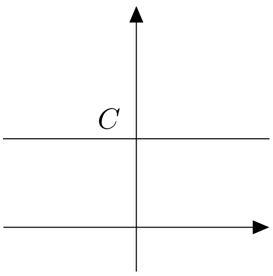
(3.30) Satz *(Integralvergleichskriterium)*

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine (unendliche) Reihe reeller Zahlen. Es existiere eine Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0\ \forall x \geq a$ auf einer rechten Halbgeraden, so dass das uneigentliche Integral $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ existiert.
Gilt $|a_n| \leq f(x)\ \forall x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen n, so konvergiert die Reihe absolut. Umgekehrt konvergiert die Reihe $\sum a_n$ nicht absolut, wenn eine Funktion $g : [a, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) \geq 0\ \forall x \geq a$ existiert, so dass gilt:
(i) $|a_n| \geq x\ \forall x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele Ausnahmen; und
(ii) g ist eine Regelfunktion auf $[a, t]\ \forall t > a$, aber $\int\limits_{a}^{t} g(x)\mathrm{d}x$ ist nicht beschränkt für $t \to \infty$, d.h. das uneigentliche Integral $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$ existiert nicht.

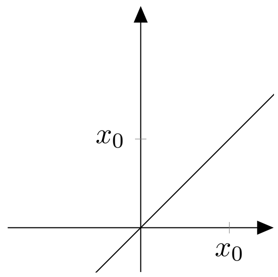
[1] $T_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k^{-s}}_{\geq 0}$

2 Differentialrechnung

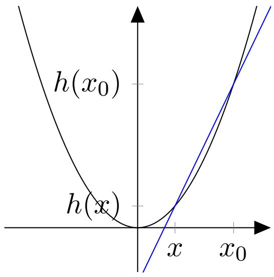
Problem: Messen der Steigung einer Funktion.



Eine konstante Funktion $f(x) = C$ mit Steigung 0.



Eine lineare Funktion $g(x) = x$ mit Steigung 1.



Eine quadratische Funktion $h(x)$ mit Sekante durch x und x_0.

Idee: Approximation der Tangentensteigung in x_0 als Grenzwert der Sekantensteigung für $x \to x_0$.

Voraussetzung: Alle im Folgenden auftretenden Intervalle enthalten mehr als einen Punkt!

(3.31) Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ Intervall) heißt in einem Punkt $x_0 \in D$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert $f'(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Man nennt diesen Grenzwert dann die **Ableitung** von f an der Stelle x_0. Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar (schlechthin). Die Ableitung kann dann selbst wieder als Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ betrachtet werden.
Man schreibt auch $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$.
Bemerkung: Auch der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kann als Funktion auf $D \setminus \{x_0\}$ aufgefasst werden.

(3.32) Hilfssatz

Ist eine Funktion in x_0 differenzierbar, so ist sie in x_0 auch stetig.

Beweis: Für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ gilt $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Da die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ wohldefiniert sind, existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to x_0}(x - x_0)\Big) \cdot \Big(\lim\limits_{x\to x_0}(x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big) = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$ [1] $\square$

Grundlegende Rechenregeln der Differentialrechnung.

(3.33) Bemerkung

Seien f, g zwei Funktionen, die in einem Punkt x_0 des gemeinsamen Definitionsbereich differenzierbar seien. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und Cf ($C \in \mathbb{R}$) in x_0 differenzierbar und es gilt:
$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, **(Summenregel)**
$(Cf)'(x_0) = Cf'(x_0)$. **(Faktorregel)**

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Permanenzeigenschaften des Grenzwertbegriffs. [2]

[1] Zwecks besseren Verständnisses umformuliert. Originaler Wortlaut: „Da sowohl der Grenzwert des Differenzenquotienten als auch der Identität existiert, existiert auch der Grenzwert von $f(x) - f(x_0)$. $f(x) - f(x_0) \to 0$ für $x \to x_0$."

[2] $(f + g)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
$(Cf)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(Cf)(x)-(Cf)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{Cf(x)-Cf(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \left(C \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = C \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = Cf'(x_0)$.

(3.34) Satz

Seien f, g zwei Funktionen von einem Intervall D nach $\mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar seien. Dann sind auch die Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$) differenzierbar in x_0 und es gilt:

$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (**Produktregel**)

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ (**Quotientenregel**)

Beweis:

Die Produktregel beweist man durch eine einfache Nullergänzung. Es gilt:

$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$. Es folgt:

$(fg)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$ □

Auch bei der Quotientenregel führt eine Nullergänzung zum gewünschten Ergebnis:

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} = \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Somit folgt: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$ □

14.4.2014

(3.35) Beispiel

(i) $f_n : D \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Behauptung: $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis: Induktionsanfang $(n = 1)$: $\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \ \forall x \neq x_0,\ x, x_0 \in D.$

Somit ist $f_1'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0} = 1.$ ✓

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Nach der Produktregel und Induktionsvoraussetzung gilt:

$$(f_{n+1}(x))' = (f_1(x) \cdot f_n(x))' = f_1'(x)f_n(x) + f_1(x)f_n'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$ □

Mithilfe der Quotientenregel können wir zeigen, dass die Rechenregel sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. [1]
Sie gilt sogar für alle $x \in \mathbb{R}$, dies beweisen wir jedoch später.

(ii) Mithilfe von (i) und der üblichen Rechenregeln können wir auch Polynome

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R};$
$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$

und rationale Funktionen ableiten.

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Polynome, $Q(x) \neq 0 \ \forall x \in D$

(iii) Wie lautet die Ableitung der Exponentialfunktion; ist sie überhaupt differenzierbar?
Es liegt nahe, die Reihenentwicklung zu untersuchen:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ somit } \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Jedoch stellt sich die Frage – dürfen wir Potenzreihen überhaupt gliedweise differenzieren?
Da wir dies später erst beweisen werden, verwenden wir den klassischen Ansatz – setze $\delta = x - x_0$:
$\frac{\exp(x)-\exp(x_0)}{x-x_0} = \exp(x_0)\frac{\exp(\delta)-1}{\delta} = \frac{1}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^n}{(n+1)!}.$
Da die Potenzreihe im Inneren des Konvergenzradius stetig ist, darf der Grenzwert gliedweise gebildet werden: $(\exp(x))' = \lim_{\delta \to 0} \frac{\exp(\delta)-1}{\delta} = 1$; somit ist exp überall differenzierbar und es gilt $(\exp(x))' = \exp(x)$. Nun stellt sich die Frage nach $(\log(x))'$, also der Umkehrfunktion von exp.

[1] Für $n = 0$ ohnehin trivial, da f_0 konstant ist und somit $f_0' = 0[= 0 \cdot x^{-1}]$ gilt.

(3.36) Satz (**Kettenregel**)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf den Intervallen D und D'.
Es gelte $f(D) \subset D'$, d.h. man kann die Zusammensetzung $g \circ f : D \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ definieren.
Sei f in einem Punkt x_0 und g im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar.
Dann ist auch $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Beweis: Die naheliegendste Idee wäre $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Das Problem ist jedoch, dass $f(x) - f(x_0) = 0$ sein könnte. Also gehen wir anders vor:
Definiere die Funktion $\Delta : D' \setminus \{y_0\} \to \mathbb{R},\ \Delta(y) := \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ mit $y_0 = f(x_0)$.
Die Funktion Δ lässt sich stetig in y_0 fortsetzen, wenn man $\Delta(y_0) := g'(y_0)$ setzt.
Somit gilt nun $\Delta(y) \cdot (y - y_0) = g(y) - g(y_0)$, auch für $y = y_0$.
Wegen $y = f(x)$ gilt: $\Delta(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) = g(f(x)) - g(f(x_0))$.
Nun teilen wir durch $x - x_0$: $\Delta(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$.
Da Δ und f im Punkt x_0 stetig sind und f in x_0 zudem differenzierbar ist, gilt:
$(g(f(x)))' = \lim\limits_{x\to x_0} \big(\Delta(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\big) = \big(\lim\limits_{x\to x_0} \Delta(f(x))\big)\big(\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\big) = g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

Nun betrachten wir die Anwendung der Kettenregel für den Spezialfall von Umkehrfunktionen.
Sei $g = f^{-1}$; D' ist somit der Wertevorrat von f. Es gilt $y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$, also $g(f(x)) = x$.
Differenzieren beider Seiten ergibt nach der Kettenregel: $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. [1]

Beispiel: $f(x) = \log(x),\ g(y) = \exp(y)$.
Wegen $g'(f(x)) = \exp(\log(x)) = x$ folgt $\frac{1}{(\log(x))'} = x \Leftrightarrow (\log(x))' = \frac{1}{x}$.
Zuerst ist jedoch zu zeigen, dass log differenzierbar ist, da wir sonst die Kettenregel nicht anwenden dürfen – also: sind Umkehrfunktionen differenzierbarer Funktionen im Allgemeinen differenzierbar?

(3.37) Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion auf einem Intervall D, deren Ableitung existiert und überall von Null verschieden ist. Dann ist auch die Umkehrfunktion g differenzierbar und es gilt $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ für alle x aus dem Wertevorrat von f, also dem Definitionsbereich von g.

Beweis: Sei $y_0 = f(x_0),\ x_0 \in D$.
Der Differenzenquotient lautet somit $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$. Da f streng monoton ist, gilt $f(x) \neq f(x_0)$ für $x \neq x_0$.
Einsetzen von $y = f(x),\ y_0 = f(x_0)$ ergibt $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \xrightarrow{x\to x_0} \frac{1}{f'(x_0)}$. □
log ist also insbesondere differenzierbar.

(3.38) Bemerkung

Die Voraussetzung $f'(x) \neq 0\ \forall x \in D$ ist in der Tat notwendig.
Betrachte beispielsweise $f(x) = x^3$; diese Funktion ist streng monoton und differenzierbar; $f'(0) = 0$.
Die Umkehrfunktion $\sqrt[3]{x}$ hingegen ist nicht differenzierbar, sie hat in 0 eine senkrechte Tangente.

(3.39) Beispiel

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Es gilt $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$; somit $(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \log x))' = \exp(\alpha \log x) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot (\frac{\alpha}{x}) = \alpha x^{\alpha-1}$.
Diese Formel hatten wir zuvor bereits für $\alpha \in \mathbb{Z}$ bewiesen.

---

[1] $f'(x)$ ist somit insbesondere $\neq 0$.

(3.40) Definition

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D$ Intervall, nennt man $a \in D$ ein **lokales Maximum**, falls eine Epsilon-Umgebung $U_\epsilon(a)$ existiert, so dass $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in U_\epsilon(a) \cap D$ gilt. Den Begriff des **lokalen Minimums** definiert man analog. Zusammenfassend nennt man beide **lokale Extremwerte**.[1]

(3.41) Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine Funktion, welche in $a \in D$ differenzierbar ist.
Der Punkt a sei kein Randpunkt von D. Wenn a lokaler Extrempunkt von f ist, so gilt $f'(a) = 0$.

Beweis: f habe o.B.d.A. ein lokales Maximum in a. Dann gilt für eine geeignete Umgebung $U_\epsilon(a)$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x > a,\ x \in U_\epsilon(a) \cap D, \\ \geq 0 & \text{für } x < a,\ x \in U_\epsilon(a) \cap D; \end{cases} \text{ somit muss } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \text{ sein.} \qquad \square$$

(3.42) Beispiel

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^x$. Es gilt:
$f'(x) = (\exp(x \log x))' = \exp(x \log x)(x \log x)' = x^x(1 \log x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1)$.
Wegen $\log x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 = -\log x = \log \frac{1}{x}$ ist die Ableitung genau dann 0, wenn $x = \frac{1}{e}$ gilt.
Wegen $\log x + 1 > 0 \ \Leftrightarrow\ \log x > -1 \ \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{e}$ ist die Ableitung für $x > \frac{1}{e}$ positiv; für $x < \frac{1}{e}$ negativ.
Somit ist f auf $(0, \frac{1}{e})$ streng monoton fallend und auf $(\frac{1}{e}, \infty)$ streng monoton wachsend.
Somit nimmt f in $x = \frac{1}{e}$ ein lokales Minimum an, der Wert ist $f(\frac{1}{e}) = e^{-1/e}$.
Für $x \to \infty$ wächst x^x über alle Grenzen. Untersuchen wir nun das Grenzwertverhalten für $x \to 0$.
Wie wir gleich zeigen werden, gilt $\lim\limits_{x\to 0}(x \log x) = 0$. Da exp stetig ist, folgt $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} \exp(x \log x) = 1$.

Einige wichtige Grenzwerte:

(i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$; die Exponentialfunktion wächst also stärker als jede Potenz von x.
Beweis: Übungsaufgabe! *(hierbei ist die Potenzreihenentwicklung von* exp *hilfreich!)*

(ii) Aus (i) folgt, dass der Logarithmus für $x \to \infty$ schwächer als jede Potenz von x wächst.
Sei also $a > 0$. Dann gilt $\frac{\log x}{x^a} \to 0$ für $x \to \infty$.
Beweis: Es reicht, $\log x \leq x^{a/2} \ \Leftrightarrow\ x \leq \exp(x^{a/2})$ für hinreichend große x zu zeigen.
Wegen $y = x^{a/2} \ \Leftrightarrow\ y^{2/a} = x$ ist die Ungleichung somit äquivalent zu $y^{2/a} \leq \exp(y) \ \Leftrightarrow\ \frac{y^{2/a}}{e^y} \leq 1$.
Da nach $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^{2/a}}{e^y} = 0$ gilt, ist $\frac{y^{2/a}}{e^y} \leq 1$ für hinreichend große y (bzw. x) erfüllt.

(iii) Mit $\log \frac{1}{x} = -\log x \ \Leftrightarrow\ \log \frac{1}{x} + \log x = 0$ folgt aus (ii) für jedes $a > 0$: $x^a \log x \to 0$ für $x \to 0$. [2]

3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Zunächst eine Erinnerung an den *Zwischenwertsatz*:
Eine stetige Funktion auf einem Intervall, die an zwei Stellen die Werte y_1 und y_2 annimmt, nimmt auch jeden Wert zwischen y_1 und y_2 an.

(3.43) Satz *(Satz von Rolle)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ a < b$, eine stetige Funktion, die im Inneren (a, b) differenzierbar ist.
Dann existiert ein Punkt ξ mit $a < \xi < b$, so dass die Ableitung von f an der Stelle ξ mit der Steigung der Sekanten durch $A = (a, f(a))$ und $B = (b, f(b))$ übereinstimmt, d.h. $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[1] Ist a ein *Minimum* oder *Maximum*, so sind die Bezeichnungen **Extremwert** oder **Extremum** gebräuchlich. Mit dem Begriff **Extrempunkt** hingegen bezeichnet man üblicherweise das Paar $(a, f(a))$.

[2] Sei nämlich $y = \frac{1}{x}$; somit $x^a \log x = y^{-a} \cdot (-\log y) \to 0$ für $y \to 0$, respektive $x \to \infty$.

Beweis: 1. Teil: Reduktion auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$.

Man betrachte hierzu die Differenz der Funktion f und der Geraden durch A und B:
$F(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]}_{\text{Gerade durch } A \text{ und } B}$. Offenbar gilt $F(a) = F(b) = 0$.

Hat man eine Stelle ξ gefunden mit $F'(\xi) = 0$, so ist alles gezeigt, denn es gilt ja $f'(x) = F'(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. Teil: Es sei nun $f(a) = f(b) = 0$.

Wir müssen nur eine Zwischenstelle ξ mit $f'(\xi) = 0$ konstruieren.
Sei f hierbei nicht die Nullfunktion, sonst wäre die Aussage trivial.
Das Maximum von f sei positiv (ersetze sonst f durch $-f$).
Dieses Maximum wird an der Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ angenommen; die Randpunkte kommen nämlich wegen $f(a) = f(b) = 0$ nicht infrage.
Dann muss aber nach Satz (3.41) in diesem Punkt gelten: $f'(\xi) = 0$. □

(3.44) Bemerkung

Sei f differenzierbar auf einem Intervall D und $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f konstant.

Beweis

Seien $a < b$ zwei beliebige Punkte in D. Nach Satz (3.43) existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$. Da $f'(\xi)$ nach Voraussetzung gleich Null ist, folgt $f(a) = f(b)$.

(3.45) Folgerung

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen auf einem Intervall. Wenn die Ableitung von f und g übereinstimmen, so unterscheiden sich f und g höchstens um eine Konstante C: $f(x) = g(x) + C$.

Beweis: $(f-g)' = f' - g' = 0$. Nach (3.44) ist $(f-g)$ konstant: $(f-g)(x) = C \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) + C$.□

Anwendungsbeispiel:

Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall, so dass gilt: $f' = f$.
Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = C \cdot \exp(x)$.

Beweis: Nach der Quotientenregel gilt: $\left(\frac{f(x)}{\exp(x)}\right)' = \underbrace{\frac{f'(x)\exp(x) - \exp(x)f(x)}{(\exp(x))^2}}_{=0,\text{ da nach Voraussetzung } f'=f} = 0 \overset{(3.44)}{\Rightarrow} \frac{f}{\exp}$ konstant. □

(3.46) Satz *(Verallgemeinerter Satz von Rolle)*

Seien f und g stetige Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, $a < b$, die im Inneren (a,b) differenzierbar sind. Dann existieren Zwischenstellen ξ mit $a < \xi < b$, so dass $f'(\xi) = g'(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ gilt.
Hierbei ist $g(a) \neq g(b)$ vorauszusetzen. Für $g(x) = x$ ist dieser Satz offenbar genau Satz (3.43).

Beweis: Übungsaufgabe. Man betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)\right]$.

Anwendung:

(3.47) Satz *(Regel von Bernoulli-de L'Hôpital)*

Es seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall D; $a \in D$. Die Funktionen seien zumindest in allen Punkten $x \in D$, $x \neq a$ differenzierbar. Außerdem gelte $f(a) = g(a) = 0$. Die Ableitung g' habe keine Nullstelle für $x \neq a$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ möge existieren.
Dann existiert auch der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \to a$ und es gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis
Aus dem Satz von Rolle folgt zunächst $g(x) \neq 0 \ \forall x \in a$, denn zwischen jedem $x \neq a$ und a existiert eine Zwischenstelle ξ mit $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{g(x)}{x-a} = g'(\xi) \neq 0$. Nach dem verallgemeinerten Satz von Rolle existiert zwischen jedem $x \neq a$ und a eine Stelle η mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$.
Hierbei gilt $a < \eta < x$ bzw. $x < \eta < a$. η hängt natürlich von x ab, daher schreiben wir $\eta = \eta(x)$.
Es gilt $\lim\limits_{x \to a} \eta(x) = a$, somit folgt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(\eta(x))}{g'(\eta(x))} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. □

24.4.2014

Anwendung
Die übliche Rechenregel $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ funktioniert nicht für $g(a) = 0$! In diesem Fall wendet man die *Regel von Bernoulli-de L'Hôpital* an. Das Prinzip kann auch angewendet werden, wenn die Voraussetzungen von (3.47) auch für f', g' anstelle von f, g erfüllt sind – dann folgt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ usw.

Bemerkung: Analoge Rechenregeln existieren, wenn f und g für $x \to a$ über alle Grenzen wachsen.

4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Gegeben: $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall.
Problem: Wir suchen eine **Stammfunktion** $F : D \to R$, also eine differenzierbare Fkt. F mit $F' = f$.

Wir wissen aus (3.45): Falls eine Stammfunktion F existiert, ist sie bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Im Allgemeinen ist das Problem sehr komplex, jedoch wird es einfacher, wenn wir nur stetige Funktionen f betrachten.
Wir werden nämlich sehen: Eine stetige Funktion hat immer eine Stammfunktion.

(3.48) Hilfssatz *(Mittelwertsatz der Integralrechnung)*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ a < b$, stetig. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$.

Beweis
Seien M bzw. m der größte bzw. kleinste Wert, den f in $[a, b]$ annimmt. [1]
Dann gilt: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$. Es folgt: $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M$.
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$. □

(3.49) Satz *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ Intervall) stetig und $a \in D$ beliebig.
Die Funktion $F : D \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ist eine Stammfunktion von f.

Beweis
Wir bilden den Differenzenquotienten an einer beliebigen Stelle $x_0 \in D$: $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}(\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t)$.
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung impliziert:
$\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t = (x-x_0)f(\xi)$ mit $\xi = \xi(x)$ zwischen x_0 und x, also $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(\xi)$.
Für $x \to x_0$ strebt $\xi = \xi(x)$ gegen x_0; da f stetig ist, folgt also $\lim\limits_{x \to x_0} f(\xi(x)) = f(x_0)$.
Somit existiert $F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.

[1] M und m existieren nach Satz (2.21)!

(3.50) Folgerung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset R$ Intervall) differenzierbar mit stetiger Ableitung f'.
Dann gilt $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a),\ a, b \in D$.

Beweis: Wir wissen bereits, dass $F : D \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f' ist.
Da f ebenfalls Stammfunktion ist, muss gelten: $F = f + C,\ C \in \mathbb{R}$ Konstante.
Speziell für $x = a$ erhalten wir: $0 = F(a) = f(a) + C$, somit $C = -f(a)$.
Nun folgt für $x = b$: $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = F(b) = f(b) - f(a)$. □

(3.51) Bemerkung

Aus der Produktregel der Differentiation und der Kettenregel ergeben sich zusammen mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgende Regeln für die Integration:

(i) **Partielle Integration**
Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R},\ [a, b]$ stetig differenzierbar (d.h. differenzierbar und die Ableitungen sind stetig).
Dann gilt: $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = uv\big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. [1]

(ii) **Substitutionsregel**
Sind eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall und eine stetig differenzierbare Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ a < b$ gegeben, so dass $g([a, b]) \subset D$ ist, so gilt: $\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$.

Beweis
Sei F Stammfunktion von f. Die Funktion $H : [a, b] \to \mathbb{R},\ H(x) = F(g(x)) = F \circ g(x)$ ist dann eine Stammfunktion von der Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) = f(g(x))g'(x)$.
Dann ist $\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = H(b) - H(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$.

(3.52) Beispiele

(i) Ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig aber nicht differenzierbar ist:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \le 1, \\ x - \frac{1}{2} & \text{für } x > 1. \end{cases}$ (Übungsaufgabe!)

(ii) Beispiel für eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung nicht stetig ist:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$
Offensichtlich ist f stetig in $x = 0$ (denn $\sin(\frac{1}{x}) \in [-1, 1]$ für $x \ne 0$ und $x^2 \to 0$ für $x \to 0$).
Ist f in $x = 0$ differenzierbar?
$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = x \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \to 0} 0$, somit ist f differenzierbar in 0 mit $f'(0) = 0$.
Für $x \ne 0$ gilt $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.
Für $x \to 0$ gilt zwar $2x \sin(\frac{1}{x}) \to 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\frac{1}{x})$ jedoch ist undefiniert!

(iii) Es existieren auch Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.
Das bekannteste Beispiel ist die Weierstraß-Funktion.

(iv) Die typischen Stellen, in denen eine steige Funktion f nicht differenzierbar ist, sind **Knickstellen**.
Das sind Stellen x_0, wo zwar die einseitigen Ableitungen $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}$ existieren, jedoch verschieden sind. Jedoch existieren auch stetige Funktionen, wo noch nicht einmal die einseitigen Grenzwerte existieren, beispielsweise $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$
Diese Funktion ist stetig, aber $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin(\frac{1}{x})$ hat dort keine einseitigen Grenzwerte.

[1] $f\big|_a^b = f(b) - f(a)$

5 Verträglichkeit der Differentiation mit Grenzprozessen

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge differenzierbarer Funktionen. Unter welchen Voraussetzungen ist auch $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ differenzierbar? Zudem möchte man, dass $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ gilt.

Erinnerung: Ein analoges Problem hatten wir bei stetigen und integrierbaren Funktionen untersucht. Dort war die gleichmäßige Konvergenz eine hinreichende Bedingung dafür, dass die jeweilige Eigenschaft beim Grenzübergang erhalten bleibt. Bei der Differenzierbarkeit ist dies leider nicht der Fall.

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$. f ist in 0 offensichtlich nicht differenzierbar.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{für } |x| < \frac{1}{n}. \end{cases}$
Die f_n sind differenzierbar (in $\frac{1}{n}$ und $-\frac{1}{n}$ haben sowohl $|x|$ als auch $\frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}$ die Steigungen 1 bzw. -1).
Außerdem konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, denn $\|f_n - f\| \leq \frac{1}{2n}$.
Also muss der gleichmäßige Grenzwert differenzierbarer Funktionen nicht differenzierbar sein!
Noch deutlicher zeigt dies der sogenannte Approximationssatz von Weierstraß. [1]

Wie sehen also hinreichende Konvergenzbedingungen aus, damit die Differenzierbarkeit erhalten bleibt?

(3.53) Satz *(Differenzierbarkeit von Grenzwerten)*
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf einem Intervall F.
Angenommen, folgende Voraussetzungen seien erfüllt:
(i) Die Folge $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in wenigstens einem Punkt $a \in D$.
(ii) Die Funktionen $f'_n,\ n \in \mathbb{N}$ sind stetig.
(iii) Die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig.
Dann konvergiert auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine differenzierbare Funktion f, und es gilt: $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$.

Beweis
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $f_n(x) = \int_a^x f'_n(t)\mathrm{d}t + f_n(a)$.
Da $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach (iii) gleichmäßig konvergiert und das Regelintegral stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz ist, konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in D$.
Setzt man nun $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, folgt weiter: $f(x) = \int_a^x (\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(t))\mathrm{d}t + C_a$ mit $C_a = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$.
Da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist, ist $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ stetig.
Somit ist f nach dem Hauptsatz (3.49) differenzierbar mit $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$. □

(3.54) Bemerkung
Ist D in Satz (3.53) ein endliches Intervall, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\int_a^x (f'_n(t) - f'(t))\mathrm{d}t + f_n(a) - f(a)| \leq |\int_a^x (f'_n(t) - f'(t))\mathrm{d}t| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |x-a| \cdot \|f'_n - f'\| + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$
Da D endlich ist, ist $|x - a|$ beschränkt, somit sind wir fertig.

(3.55) Folgerung
Eine Potenzreihe $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stellt im Inneren des Konvergenzintervalls $(-r, r)$ (sei $r \neq 0$) eine differenzierbare Funktion dar und es gilt $p'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, das heißt, wie bei Polynomen ist gliedweise Differentiation erlaubt.

[1] Jede stetige Funktion f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kann gleichmäßig durch eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen approximiert werden. *(Werden wir später beweisen.)*

Beweis

Wir wollen zeigen, dass die abgeleitete Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ denselben Konvergenzradius hat wie die Ausgangsreihe. Dann können wir nämlich Satz (3.53) anwenden.

Die Konvergenzradien der Ausgangsreihe und der abgeleiteten Reihe sind
$r := \sup\{C > 0 : (|a_n|C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt$\}$ und $r' := \underbrace{\sup\{C > 0 : (n|a_n|C^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}}_{=\sup\{C>0:(n|a_n|C^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}}$,
woraus $r' \leq r$ folgt. Wir zeigen nun: $r' \geq r$, also $(n|a_n|C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt für jedes $C < r$.
Sei hierzu $\tilde{C}$ gewählt mit $C < \tilde{C} < r$ (bspw. $\frac{C+r}{2} = \tilde{C}$). Dann ist auch $(|a_n|\tilde{C}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also auch $n|a_n|C^n = |a_n|\tilde{C}^n n(\frac{C}{\tilde{C}})^n$, da $n(\frac{C}{\tilde{C}})^n = (\sqrt[n]{n}\frac{C}{\tilde{C}})^n$ wegen $\sqrt[n]{n} \to 1;\ 0 < \frac{C}{\tilde{C}} < 1$ gegen 0 konvergiert, somit ist $\sqrt[n]{n}\frac{C}{\tilde{C}} < \delta < 1$ bis auf endlich viele Ausnahmen für n und $(\delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge für $0 < \delta < 1$.

(3.56) Anwendung

Wir erhalten einen neuen Beweis für die Differentialgleichung der Exponentialfunktion!

6 Die Taylor-Formel

Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a \in D$ Punkt aus D.
Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Potenzreihe, welche in einem Intervall $(a-r, a+r)$ $(r > 0)$ von a konvergiert und die Funktion f darstellt, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ für $x \in D \cap (a-r, a+r)$?

Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzintervalls differenzierbar – ihre Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation.

Man sagt: Eine Funktion f heißt n-mal differenzierbar, falls man f n-mal hintereinander ableiten kann.
Bezeichnung: $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ \ldots,\ f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
Ist die n-te Ableitung noch stetig, so heißt f n-mal **stetig differenzierbar**.
Übungsaufgabe: Sind f und g zwei auf einem Intervall D n-mal (stetig) differenzierbare Funktionen, so gilt die Leibniz-Regel $(fg)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)} g^{(n-\nu)}$. *(vollständige Induktion!)*

(3.57) Bemerkung

Sei $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R},\ r > 0$, eine Funktion, welche sich in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lässt, d.h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ für $|x-a| < r$. Dann gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweis: Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzbereiches differenzierbar und gliedweise Differentiation ist erlaubt!

(3.58) Folgerung *(Identitätssatz für Potenzreihen)*

Wenn die beiden Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ in einer r-Umgebung $(a-r, a+r),\ r > 0$ von a konvergieren und dort dieselbe Funktion darstellen, so gilt $a_n = b_n\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

5.5.2014

Bezeichnung

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a \in D$ ein Punkt, eine (mindestens) n-mal differenzierbare Funktion.
$R_n(x) := f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ heißt **Restglied n-ter Ordnung** von f an der Stelle a.

Problem: Sei f beliebig oft differenzierbar. Unter welchen Voraussetzungen gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$?

(3.59) Satz *(Taylor-Formel mit Integralrestglied)*
Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a \in D$.
Die Funktion f sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt:
$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + R_n(x)$ mit $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$. ($x < a$ ist zugelassen.)

Beweis (mittels vollständiger Induktion nach n)
Induktionsanfang:
Für $n = 0$ besagt die Formel $f(x) = f(a) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$. ✓
Induktionsschritt ($n-1 \to n$): Durch partielle Integration erhalten wir
$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t. \square$$

Die Funktion ist in einer r-Umgebung von a dann und nur dann in eine Potenzreihe entwickelbar, also $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ für $x \in D$ und $|x-a| < r$, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ \forall x \in D$ mit $|x-a| < r$.
Diese Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ nennt man **Taylorreihe** von f in a.

(3.60) Beispiel
Wir wollen die F'n $f_\alpha : (-1,\infty) \to \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ um den Nullpkt. entwickeln.

Nun gilt: $f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.
Wir definieren für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$: $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ und $\binom{\alpha}{0} := 1$.
Damit erhalten wir die Taylorreihe von f_α um den Nullpunkt $T(f,0) = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n$.
Für welche x konvergiert die Reihe und stellt f_α dar?
Diese Potenzreihe konvergiert für alle $|x| < 1$, wie beispielsweise das Quotientenkriterium zeigt:
$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{\binom{\alpha}{n+1}|x|^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}|x|^n} = \underbrace{\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}}_{<1 \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \le q < 1 \ (q = q(x) \text{ geeignet}) \quad\Rightarrow\quad P(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n \text{ für } |x| < 1.$$
Durch gliedweises Ableiten von P folgt: $P'(x) = \sum_{n=1}^\infty n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}$.
Daraus folgt
$$\begin{aligned} P'(x)(1+x) &= \sum_{n=1}^\infty n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^\infty n\binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{n=0}^\infty (n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^n + \sum_{n=1}^\infty n\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Big\{\underbrace{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}}_{=\alpha\left\{\binom{\alpha-1}{n} - \binom{\alpha-1}{n-1}\right\} = \alpha\binom{\alpha}{n}}\Big\}x^n + \alpha = \alpha\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n = \alpha P(x), \text{ also} \end{aligned}$$
$P'(x) = \alpha P(x)$, somit $\left(\frac{P(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{P'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}P(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}\{P'(x)(1+x) - \alpha P(x)\} = 0$.
Somit muss nach Bemerkung (3.44) $\frac{P(x)}{(1+x)^\alpha} = C \;\Leftrightarrow\; P(x) = C(1+x)^\alpha$ für ein $C \in \mathbb{R}$ gelten.
Vergleicht man beide Seiten für $x = 0$, so folgt offensichtlich $C = 1$.

Nun betrachten wir einen Einschub, der eigentlich ins zweite Kapitel gehörte.

2 Stetige Funktionen

5 Die trigonometrischen Funktionen

Bevor wir uns mit den trigonometrischen Funktion befassen, widmen wir uns einer axiomatischen Einführung der **komplexen Zahlen**:

(0) Die komplexen Zahlen sind Elemente einer Menge $\mathbb{C}$.
(i) Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl, das heißt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
(ii) Auf $\mathbb{C}$ sind zwei Kompositionen definiert, eine Addition und eine Multiplikation und es gilt:
 a) Für reelle Zahlen ist dies die gewöhnliche Addition und Multiplikation.
 Man bezeichnet daher die Addition mit „ + “ und die Multiplikation mit „ · “.
 b) Für $\mathbb{C}$ sind die Körperaxiome erfüllt.
(iii) In $\mathbb{C}$ existiert ein Element i mit $\mathrm{i}^2 = -1$; jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Man nennt x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z; man schreibt auch $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$.
Ohne Beweis: $\mathbb{C}$ existiert. [1]

8.5.2014

Bemerkung
Man kann (iii) auch wie folgt ausdrücken: Die Abbildung $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$ ist bijektiv.
Jede komplexe Zahl entspricht also umkehrbar eindeutig einem Punkt aus der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$.
Die Addition von komplexen Zahlen entspricht hierbei genau der Vektoraddition:
$z + z' = (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$.

Komplizierter ist es jedoch, die Multiplikation und Inversenbildung geometrisch zu veranschaulichen.
Es gilt nämlich: $z \cdot z' = (x + \mathrm{i}y) \cdot (x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$.

Nützlich für den Umgang mit komplexen Zahlen ist die sogenannte **komplexe Konjugation**:
diese ist die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z = x + iy \mapsto x - iy =: \bar{z}$.
Übungsaufgabe: Es gelten $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}',\quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z},\quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 (\geq 0),\quad z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0.$ [2]

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
In der Ebene ist dies der euklidische Abstand zum Nullpunkt.
Es gelten die Rechenregeln $|zz'| = |z| \cdot |z'|,\quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

(E1) Definition
Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn die beiden Reihen $R = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ und $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ konvergieren und wir setzen in diesem Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := R + \mathrm{i}S$.
Offenbar gilt immer $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$ und $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$.

[1] Der Existenzbeweis von $\mathbb{C}$ ist nicht Bestandteil der Vorlesung, jedoch den Anmerkungen zur Vorlesung beilegt.
[2] Da auch $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ gilt, handelt es sich um einen Körperautomorphismus. $z \cdot \bar{z}$ nennt man positiv definit.

Es folgt: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Wie im Reellen lässt sich somit die Konvergenz der Reihe aus der absoluten Konvergenz der Reihe folgern.

(E2) Beispiel

(i) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $(z^0 := 1)$ konvergiert für $|z|<1$, denn $\sum_{n=0}^{\infty}|z^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|z|^n < \infty$ für $|z|<1$.
(ii) Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z\in\mathbb{C}$, da $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} = \exp\underbrace{(|z|)}_{\in\mathbb{R}}$ gilt.

(E3) Satz

Die Reihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z\in\mathbb{C}$; es gilt $\exp(z+w) = \exp z\cdot\exp w\ \forall\ z,w\in\mathbb{C}$.
Da wir bereits in (E2) (ii) gesehen haben, dass $\exp(z)$ konvergiert, müssen wir nur noch die Funktionalgleichung $\exp(z+w)=\exp z\cdot\exp w$ beweisen.

Beweis

Wie im Reellen folgt die Funktionalgleichung aus dem Cauchyschen Multiplikationssatz, der für absolut konvergente Reihen gültig ist: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{\nu+\mu=n}a_\nu b_\mu$. Diesen kann man wie im Reellen beweisen oder aber durch Zerlegung von a_n bzw. b_n in Real- und Imaginärteile darauf zurückführen:

Es gilt $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}a_n + \mathrm{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}b_n + \mathrm{i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}b_n\right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}a_n\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}b_n - \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}a_n\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}b_n + \mathrm{i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}a_n\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}b_n + \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}a_n\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}b_n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu+\mu=n}\operatorname{Re}a_\nu\operatorname{Re}b_\mu + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu+\mu=n}\operatorname{Im}a_\nu\operatorname{Im}b_\mu + \mathrm{i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu+\mu=n}\operatorname{Im}a_\nu\operatorname{Re}b_\mu + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu+\mu=n}\operatorname{Re}a_\nu\operatorname{Im}b_\mu\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu+\mu=n}\big(\operatorname{Re}a_\nu\operatorname{Re}b_\mu + \operatorname{Im}a_\nu\operatorname{Im}b_\mu + \mathrm{i}\,(\operatorname{Im}a_\nu\operatorname{Re}b_\mu + \operatorname{Re}a_\nu\operatorname{Im}b_\mu)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu+\mu=n}a_\nu b_\mu.$$

Schreibweise: $e^z=\exp(z)$. Wegen $z=x+\mathrm{i}y$ somit: $e^z=e^xe^{\mathrm{i}y}$, also $\operatorname{Re}e^z = e^x\operatorname{Re}e^{\mathrm{i}y}$, $\operatorname{Im}e^z = e^x\operatorname{Im}e^{\mathrm{i}y}$.

Wir bestimmen nun den Real- und Imaginärteil von $e^{\mathrm{i}y}$ für $y\in\mathbb{R}$. Es gilt $e^{\mathrm{i}y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^ny^n}{n!}$.
Wegen $\mathrm{i}^0=1,\ \mathrm{i}^1=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^2=-1,\ \mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\ \mathrm{i}^4=1,\ \mathrm{i}^5=\mathrm{i}^4\cdot\mathrm{i}^1=\mathrm{i}$ usw. gilt:
$\operatorname{Re}\mathrm{i}^n=0$ für n ungerade und $\operatorname{Im}\mathrm{i}^n=0$ für n gerade.
Somit erhalten wir $\operatorname{Re}e^{\mathrm{i}y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{2n}y^{2n}}{(2n)!}$ und $\mathrm{i}\operatorname{Im}e^{\mathrm{i}y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Wegen $\mathrm{i}^{2n}=(\mathrm{i}^2)^n=(-1)^n$ und $\mathrm{i}^{2n+1}=(\mathrm{i}^2)^n\cdot\mathrm{i}=(-1)^n\cdot i$ gilt somit:
$\operatorname{Re}e^{\mathrm{i}y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^ny^{2n}}{(2n)!}$ und $\operatorname{Im}e^{\mathrm{i}y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^ny^{2n+1}}{(2n+1)!}$; diese Reihen konvergieren für alle $y\in\mathbb{R}$!

(E4) Definition

Für $t\in\mathbb{R}$ definieren wir $\overbrace{\cos t}^{\textbf{Kosinus}\text{ von } t} := \operatorname{Re}(e^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n)!}$ und $\overbrace{\sin t}^{\textbf{Sinus}\text{ von } t} := \operatorname{Im}(e^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Es gilt also $e^{\mathrm{i}t}=\cos t+\mathrm{i}\sin t$. Da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs stetige Funktionen darstellen, sind sin und cos auf $\mathbb{R}$ stetig. Da wir gliedweise differenzieren dürfen, können wir folgern: $\sin' t=\cos t,\ \cos' t=-\sin t,\ \cdots$. Mit $e^{\mathrm{i}(x+y)}=e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}y}$ beweist man die Additionstheoreme:
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$. (ÜA!)
Für $x=y$ folgt wegen $\cos(-x)=\cos x$ sowie $\sin(-x)=-\sin x$: $\cos^2x+\sin^2x = e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}(-x)}=e^0=1$.
Hieraus können wir insbesondere folgern: $|e^{\mathrm{i}x}|\le 1\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

4 Metrische Räume

1 Abstrakte metrische Räume

(4.1) Definition

Eine **Metrik** d auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:
(i) $d(x, y) \geq 0 \;\forall\, x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x) \;\forall\, x, y \in X$, (Symmetrie)
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \;\forall\, x, y, z \in X$. (Dreiecksungleichung)

Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X, auf der eine bestimmte Metrik ausgezeichnet ist. Die Elemente eines metrischen Raums nennt man häufig **Punkte**.

(4.2) Beispiele

(i) $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$
(ii) $X = \mathbb{R}^n$; in diesem Fall gibt es mehrere wichtige Metriken, die allesamt Verallgemeinerungen der Betragsmetrik aus (i) sind:
a) $d(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ (x_i, y_i: i-te Koordinate von x bzw. y)
b) $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (**Euklidische Metrik**)
Hierbei sind die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition (4.1) trivial; die Dreiecksungleichung folgt aus der sogenannten *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*: $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.
c) $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
(iii) Sei X die Menge aller beschränkten Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$, $D \subset \mathbb{R}$. Schreibweise: $X = B(D)$. Die Norm von $f \in B(D)$ ist durch $\|f\| := \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$ def. und somit eine Metrik, $d(f, g) := \|f - g\|$.

12.5.2014

(iv) $D = [a, b]$, $a < b$, $X = C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$, $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ ist eine Metrik. (ÜA)

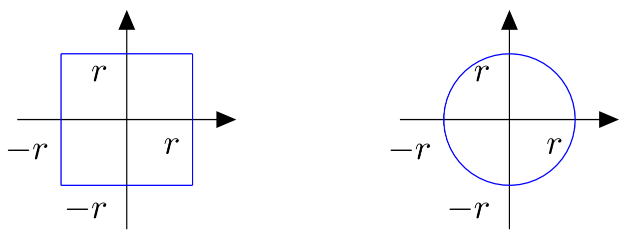
(4.3) Definiton

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt aus X, ferner $r > 0$ eine positive Zahl. Die Punktemenge $U_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ heißt **offene Kugel** um x_0 vom Radius r.

(4.4) Beispiele

(i) $\mathbb{R}^n$ mit Maximumsmetrik:
$U_r(x_0)$ ist ein achsenparalleler Würfel mit Mittelpunkt x_0 und Kantenlänge $2r$.

(ii) $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik:
$U_r(x_0)$ ist eine euklidische Kugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius r.



Beispiele für $n = 2$, $x_0 = 0$.

Grundlegende Eigenschaften von Kugeln

(4.5) Bemerkung

Sei $U_r(x_0)$ eine Kugel in einem metrischen Raum (X, d) und sei $x_1 \in U_r(x_0)$ ein beliebiger Punkt aus dieser Kugel. Dann existiert eine Zahl $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(x_1) \subset U_r(x_0)$.

Beweis

Wähle beispielsweise $\epsilon := r - d(x_1, x_0) > 0$.

Für $x \in U_\epsilon(x_1)$ folgt $d(x, x_1) < \epsilon = r - d(x_0, x_1) \quad (*)$

$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) = d(x, x_1) + d(x_0, x_1) \overset{(*)}{<} r - d(x_0, x_1) + d(x_0, x_1)$. $\square$

(4.6) Bemerkung

Gegeben seien n Kugeln $U_{r_1}(x_1), \cdots, U_{r_n}(x_n)$ in einem metrischen Raum sowie ein weiterer Punkt x. Dann gibt es eine Zahl $r > 0$, so dass gilt: $\bigcup_{i=1}^n U_{r_i}(x_i) \subset U_r(x)$.

Beweis

Man wähle $r := \max_{1 \leq i \leq n}\{r_i + d(x_i, x)\}$.

Sei $z \in \bigcup_{i=1}^n U_{r_i}(x_i)$, das heißt, es existiert ein Index $j \in \{1, \cdots, n\}$ mit $z \in U_{r_j}(x_j)$.

Dann gilt: $d(z, x) \leq d(z, x_j) + d(x_j, x) < r_j + d(x_j, x) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{r_i + d(x_i, x)\}$. $\square$

(4.7) Bemerkung

Seien x, x' zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raums.

Dann existiert eine positive Zahl $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(x) \cap U_\epsilon(x') = \varnothing$. (**Punktetrennungseigenschaft**)

Beweis: Man wähle $\epsilon := \frac{1}{2} d(x, x')$. $\square$

Topologische Begriffe in metrischen Räumen

(4.8) Definition

Sei $x \in X$ ein Punkt eines metrischen Raumes (X, d).

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es eine Zahl $\epsilon > 0$ gibt mit $U_\epsilon(x) \subset M$.

Beispielsweise ist $[0, 1]$ keine Umgebung von 0.

Bemerkung

(i) Insbesondere ist $U_\epsilon(x)$ selbst eine Umgebung von x.

(ii) Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von x ist auch eine Umgebung von x.
Denn sind $M_1, \cdots, M_n$ Umgebungen von x, so existieren Zahlen $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n > 0$ mit $U_{\epsilon_i}(x) \subset M_i$ für $i = 1, \cdots, n$. Es folgt $U_\epsilon(x) \subset M_1 \cap \cdots \cap M_n = \bigcap_{i=1}^n M_i$.

(4.5) bedeutet somit offenbar:

Die Kugel $U_r(x_0)$ ist Umgebung eines jeden Punktes x_1, den sie enthält.

Verallgemeinernd definiert man:

(4.9) Definition

Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes heißt **offen**, wenn sie Umgebung eines jeden in ihr enthaltenen Punktes ist. Mit anderen Worten: Ist $x \in U$, so existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subset U$.

Insbesondere ist die von uns in (4.3) definierte Kugel wegen (4.5) offen.

Grundeigenschaften offener Mengen

(i) Sowohl die leere Menge $\varnothing$ als auch der ganze Raum X sind offen.
(ii) Der endliche Durchschnitt offener Mengen ist offen, das heißt, sind $U_1, \cdots, U_n$ endlich viele offene Mengen, so ist auch $U_1 \cap \cdots \cap U_n = \bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.
(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Schar offener Mengen (I beliebige Mengen), so ist auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i=1} U_i = \{x \in X_i : x \in U_1$ für mindestens ein $i \in I\}$ offen.

(4.10) Definition
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d). Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** von A, wenn es in jeder Umgebung sowohl Punkte gibt, die in A liegen, als auch solche, die nicht in A liegen.

Beispiel
$X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|$, $a < b$, $A = (a, b) \vee A = [a, b) \vee A = (a, b] \vee A = [a, b]$.
In allen vier Fällen sind a und b die beiden einzigen Randpunkte von A.
Dieses Beispiel zeigt: Randpunkte einer Menge A können dieser angehören, müssen es aber nicht. Das Intervall $[a, b]$ zeichnet sich von den übrigen dadurch aus, dass es all seine Randpunkte enthält.

Dies gibt Anlass zu:
(4.11) Definition
Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **abgeschlossen**, wenn jeder Randpunkt von A in A enthalten ist.
Bezeichnungen: ∂A: „Rand von A“, Menge aller Randpunkte von A; $\bar{A} = A \cup \partial A$: Abschluss von A.

(4.12) Bemerkung
(i) Die Menge $\bar{A}$ ist abgeschlossen, also $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$;
(ii) Ist $A \subset B$, so ist auch $\bar{A} \subset \bar{B}$;
(iii) Die **abgeschlossene Kugel** $\bar{U}_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ ist abgeschlossen.

Beweis: Übungsaufgabe!

Aus (i) und (ii) folgt, dass der Abschluss der offenen Kugel in der abgeschlossenen Kugel enthalten ist: $\overline{U_r(x_0)} \subset \bar{U}_r(x_0)$. In vielen Fällen gilt Gleichheit, aber nicht immer!

(4.13) Hilfssatz
Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \setminus A := \{x \in X : x \notin A\}$ offen ist.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Sei A abgeschlossen. Wir zeigen: $X \setminus A$ ist offen. Sei $x \in X \setminus A$.
Da $x \notin A$ und A abgeschlossen ist, kann x kein Randpunkt von A sein.
Somit existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(x)$ nicht Punkte von A und $X \setminus A$ enthält.
Wegen $x \in X \setminus A$ muss $U_\epsilon(x) \subset X \setminus A$ gelten, das heißt, $X \setminus A$ ist Umgebung von x.
„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, $X \setminus A$ ist offen.
Wir zeigen: A ist abgeschlossen, das heißt, kein Punkt $x \in X \setminus A$ ist Randpunkt von A.
$X \setminus A$ offen $\Rightarrow$ zu jedem $x \in X \setminus A$ existiert $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subset X \setminus A \Leftrightarrow U_\epsilon(x) \cap A = \varnothing$.□

Sprechweise
Ein Punkt $x \in M$ ($M \subset X$, (X, d) metrischer Raum) heißt **innerer Punkt** von M, wenn M Umgebung von x ist. Die Menge der inneren Punkte von M wird mit $M^\circ := \{x \in M : M$ ist Umgebung von $x\}$ bezeichnet und es gilt: M ist offen $\Leftrightarrow$ $M^\circ = M$.

(4.14) Bemerkung

Im Allgemeinen ist

(i) $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$; Beispiel: (X,d) mit $X = \mathbb{R}$ und der üblichen Metrik, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Hier gilt offensichtlich $A \cup B = \mathbb{R}$, also $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ offen ist.
Da $\mathbb{Q}$ jedoch „dicht" in $\mathbb{R}$ liegt, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$: $U_\epsilon(x) \not\subset \mathbb{Q}$, $U_\epsilon(x) \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Somit ist $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \varnothing$.

(ii) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$. (Übungsaufgabe!)

(4.15) Satz

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Eine Menge $B \subset A$ ist im metrischen Raum $(A, d|_{A\times A})$ genau dann offen, wenn es in (X,d) eine offene Menge $U \subset X$ mit $B = U \cap A$ gibt.

Beweis

Offenbar gilt $\underbrace{U_\epsilon^A(x)}_{\epsilon\text{-Kugel um } x \text{ im metrischen Raum } (A,d|_{A\times A})} = \{y \in B : d(x,y) < \epsilon\} = \underbrace{U_\epsilon(x)}_{\epsilon\text{-Kugel um } x \text{ in } (X,d)} \cap A$.

(i) Sei $B \subset A$ im metrischen Raum $(A, d|_{A\times A})$ offen.
Per definitionem existiert für jedes $b \in B$ eine Zahl $\epsilon(b) > 0$ mit $U_{\epsilon(b)}^A(b) = U_{\epsilon(b)}(b) \cap A \subset B$.
Sei nun $U := \bigcup_{b\in B} U_{\epsilon(b)}(b) \subset X$.
Da U Vereinigung offener Kugeln in X ist, ist X offen; [1] wegen $B \subset A$ und $B \subset U$ ist $B \subset U \cap A$.
Andererseits ist $U \cap A = \left(\bigcup_{b\in B} U_{\epsilon(b)}(b)\right) \cap A = \bigcup_{b\in B} \left(U_{\epsilon(b)}(b) \cap A\right) = \bigcup_{b\in B} U_{\epsilon(b)}^A(b) \subset B$,
denn jede Kugel $U_{\epsilon(b)}^A(b)$ liegt in B. Somit also $B \subset U \cap A$ und $U \cap A \subset B$ also $U \cap A = B$.

(ii) Sei nun $B = U \cap A$, wobei $U \subset X$ eine offene Menge in (X,d) ist.
Wir zeigen nun, dass B offen in $(A, d|_{A\times A})$ ist.
Sei $b \in B$. Wegen $b \in U$ und U offen in (X,d) existiert $\epsilon = \epsilon(b) > 0$, so dass $U_{\epsilon(b)}(b) \subset U$.
Somit ist $U_{\epsilon(b)}^A(b) = U_{\epsilon(b)}(b) \cap A \subset U \cap A = B$.
Da $b \in B$ beliebig war, ist folglich B offen in $(A, d|_{A\times A})$. $\square$

(4.16) Bemerkung

Sei (X,d) ein metrischer Raum, dann gilt:

(i) X und $\varnothing$ sind abgeschlossen.

(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(iii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis: Übungsaufgabe!

(4.17) Definition *(Häufungspunkte in metrischen Räumen)*

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** *(HP)* von A, falls in jeder ϵ-Kugel $U_\epsilon(x)$ ein von x verschiedener Punkt in A liegt, das heißt, falls $(U_\epsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$. Die Menge der Häufungspunkte von A wird mit $\mathrm{HP}(A)$ bezeichnet.

(4.18) Bemerkung

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen.
Dann gilt: $\mathrm{HP}(\{a_n, n \in \mathbb{N}\}) \subset \{x \in \mathbb{R} : \exists \text{ Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ mit } \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x\}$. [2]

Beweis: Übungsaufgabe!

Mit anderen Worten verallgemeinert Definition (4.17) den Begriff des Häufungspunkt einer beschränkten Folge reeller Zahlen (vgl. Ana I).

[1] vgl .Grundeigenschaft (iii) offener Mengen
[2] „=" wurde am 22.5.2014 zu „$\subset$" korrigiert; Gegenbeispiel zu „=" ist eine konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4.19) Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ Teilmenge. Dann gilt:
(i) $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt von A, wenn in jeder (offenen) ϵ-Kugel $U_\epsilon(x)$ unendlich viele Punkte von A liegen.
(ii) $\bar{A} = A \cup \mathrm{HP}(A)$
(iii) A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathrm{HP}(A) \subset A$.

Beweis: Übungsaufgabe! (Blatt 6, Aufgabe 4.)

(4.20) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.
Ein Punkt $x \in A$ heißt **isolierter Punkt** von A, falls es eine Zahl $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(x) \cap A = \{x\}$ gilt. Mit anderen Worten: $\{x\}$ ist im metrischen Raum $(A, d|_{A\times A})$ offen, denn $U_\epsilon(x) \cap A = U_\epsilon^A(x) = \{x\}$.

(4.21) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht** in X, wenn $\bar{A} = X$ gilt.

(4.22) Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) A ist dicht in X;
(ii) $(X \setminus A)^\circ = \varnothing$;
(iii) $X \setminus A$ enthält keine offene ϵ-Kugel.

Beweis

$A \subset X$ dicht $\Leftrightarrow$ $\bar{A} = X$ $\Leftrightarrow$ $\overbrace{X \setminus (X \setminus A)^\circ}^{=\bar{A}} = X$ $\Leftrightarrow$ $(X \setminus A)^\circ = \varnothing$ $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ enthält keine ϵ-Kugeln.
Denn: $x \in X \setminus (X \setminus A)^\circ \Leftrightarrow x \in X$ und $x \notin (X \setminus A)^\circ \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0$ gilt $U_\epsilon(x) \not\subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \bar{A}$. □

Beispiel

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $(\mathbb{R}, d)$ (mit der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|$), denn mithilfe des archimedischen Prinzips zeigt man, dass jedes Intervall $(x, y) \neq \varnothing$ eine rationale Zahl enthält, also $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \varnothing$.

2 Konvergenz und Stetigkeit

(4.23) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, ferner sei $x \in X$ ein Punkt.
Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x in (X, d) **konvergiert**, wenn $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
Der Punkt x heißt **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, falls es ein $x \in X$ gibt, so dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.
Besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert, so heißt sie **divergent**.

(4.24) Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in (X, d) gegen x.
(ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U_\epsilon(x)\ \forall\, n \geq N$.

(4.25) Satz

Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem metrischen Raum ist eindeutig bestimmt.

Beweis

Angenommen, $d(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $d(x_n, x') \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $x \neq x'$, $x, x' \in X$. Wegen der Punktetrennungseigenschaft existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \cap U_\epsilon(x') = \varnothing$. Dies steht im Widerspruch zu (4.24)(ii). □

(4.26) Definition

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d) und (Y, d').

(i) f heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in X$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\underbrace{f(U_\delta^X(x_0))}_{=\{y\in Y:\exists x\in U_\delta^X(x_0) \text{ mit } y=f(x)\}} \subset U_\epsilon^Y(f(x_0))$ gilt, also für $x \in X$ aus $d(x, x_o) \leq \delta$ folgt, dass $d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon$ gilt.

(ii) f heißt **folgenstetig** im Punkt $x_0 \in X$, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in X, die gegen x_0 konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (in (Y, d')) gegen $f(x_0)$ konvergiert.

(iii) Die Abbildung f heißt (folgen)stetig *(schlechthin)*, wenn sie in jedem Pkt. $x_0 \in X$ (folgen)stetig ist.

19.5.2014

(4.27) Satz

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d) und (Y, d'). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f : X \to Y$ ist in $x_0 \in X$ stetig;

(ii) $f : X \to Y$ ist in x_0 folgenstetig;

(iii) $x_0 \in X$ ist ein isolierter Punkt von X oder x_0 ist HP von X und es gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. [1]

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $f : X \to Y$ stetig in $x_0 \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen x_0 konvergente Folge in X.
Zu zeigen: $d'(f(x_n), f(x_0)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta^X(x_0)) \subset U_\epsilon^Y(f(x_0))$ gilt.
Wegen $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ (d.h. $d(x_n, x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U_\delta^X(x_0)$ für jedes $n \geq n_0$ gilt.
Es folgt $f(x_n) \in U_\epsilon^Y(f(x_0))\ \forall\ n \geq n_0$ und somit $f(x_n) \to f(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Jeder Punkt $x_0 \in X$ ist entweder isoliert oder ein Häufungspunkt von X, denn es gilt:
x_0 ist genau dann HP von X, wenn in jeder Kugel $U_\epsilon^X(x_0)$ ein von x_0 verschieder Punkt von x liegt;
x_0 ist genau dann isoliert, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $X \cap U_\epsilon(x_0) = \{x_0\}$ gilt.
Ist $x_0 \in \mathrm{HP}(X)$, so existiert eine gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X \setminus \{x_0\}$ – beispielsweise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \underbrace{U_{\frac{1}{n}}^X(x_0) \setminus \{x_0\}}_{\neq\emptyset\ \forall\ n\in\mathbb{N},\text{ da } x_0 \text{ HP}}$
Nach (ii) konvergiert dann $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$, und zwar für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, folglich ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Ist x_0 ein isolierter Punkt, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta^X(x_0) = \{x_0\}$.
Dann ist $f(U_\delta^X(x_0)) = \{f(x_0)\} \subset U_\epsilon^Y(f(x_0))\ \forall\ \epsilon > 0$. f ist dann also in x_0 stetig.
Sei nun x_0 ein Häufungspunkt von X und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta^X(x_0)) \subset U_\epsilon^Y(f(x_0))$. $(*)$
Denn angenommen, $(*)$ gelte nicht, es existiere also ein $\epsilon_0 > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiere, so dass $0 < d(x, x_0) < \delta$ und $d'(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon_0$ gelten.
Mit der Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ erhalten wir dann eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X \setminus \{x_0\}$ mit $d(x_n, x) < \frac{1}{n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, also $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ aber $d'(f(x_0), f(x_n)) \geq \epsilon_0$. ↯
Somit muss $(*)$ gelten und impliziert somit (i). □

[1] Diese Notation bedeutet: Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ für je zwei verschiedene Folgen (x_n) und (x'_n) aus $X \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergieren.

Als nächstes: Eigenschaften stetiger Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

(4.28) Satz

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen zwischen metrischen Räumen, wobei f in $x_0 \in X$ und g in $f(x_0) \in Y$ stetig seien.
Dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig; insbesondere ist die Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig.

Beweis:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen x_0 konvergiert.
Da f in x_0 stetig und damit folgenstetig ist, konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(x_0)$.
Wegen Stetigkeit von g in $f(x_0)$ konvergiert dann die Folge $(\underbrace{g(f(x_n))}_{=g\circ f(x_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $g(f(x_0)) = g \circ f(x_0)$.
Folglich ist $g \circ f$ in x_0 folgenstetig und somit stetig.

(4.29) Satz

Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und A eine Teilmenge von X. Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist auch die Einschränkung $f|_A : A \to Y$ stetig bezüglich der auf A durch d induzierten Metrik $d|_{A\times A}$.

Beweis:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die im metrischen Raum $(A, d|_{A\times A})$ gegen $a \in A$ konvergiert. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich der Metrik d von X gegen a. Nach Voraussetzung konvergiert $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ in Y, also ist $f|_A$ in a folgenstetig und somit stetig. □

(4.30) Satz

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d) und (Y, d').
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) f ist stetig;
(ii) Das Urbild jeder offenen Menge ist offen, d.h. $U \subset Y$, U offen in $(Y, d') \Rightarrow f^{-1}(U)$ offen in (X, d);
(iii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Sei $f : X \to Y$ stetig und $U \subset Y$ offen (in (Y, d')).
Zu zeigen ist nun, dass das Urbild $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\} \subset X$ ebenfalls offen (in (X, d)) ist.
Ist $f^{-1}(U) = \varnothing$, so ist die Behauptung erfüllt (denn $\varnothing$ ist immer offen).
Sei also $f^{-1}(U) \neq \varnothing$ und $x_0 \in f^{-1}(U)$ ein beliebiger Punkt.
Dann gilt $f(x_0) \in U$. Da $U \subset Y$ offen (in (Y, d')) ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon^Y(f(x_0)) \subset U$.
Da f in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta^X(x_0)) \subset U_\epsilon^Y(f(x_0)) \subset U$.
Aus der Definition des Urbildes folgt weiter $U_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(U)$; folglich ist $f^{-1}(U)$ offen in X.

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Sei $f^{-1}(U) \subset X$ offen in (X, d) für jede in (Y, d') offene Menge $U \subset Y$.
Wir wählen einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ und ein beliebiges $\epsilon > 0$. Da die Kugel $U_\epsilon^Y(f(x_0))$ in (Y, d') offen ist, ist nach Voraussetzung auch das Urbild $f^{-1}(U_\epsilon^Y(f(x_0)))$ offen in (X, d).
Es enthält den Punkt x_0. Folglich existiert $\delta > 0$, so dass $U_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(U_\epsilon^Y(f(x_0)))$, also ist f in x_0 stetig. Da ϵ beliebig war, folgt die Stetigkeit schlechthin.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Übungsaufgabe!

(4.31) Definition

Seien $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$, $n \in \mathbb{N}$ metrische Räume.
Auf dem kartesischen Produkt $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in X_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}\}$ ist die **Produktmetrik** $d = d_1 \times \cdots \times d_n$ definiert durch $d((x_1, \cdots, x_n), (x_1', \cdots, x_n')) := \max d_i(x_i, x_i')$.

Übungsaufgabe: Man zeige, dass d in der Tat eine Metrik auf X definiert.

(4.32) Bemerkung

Seien $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$, $n \in \mathbb{N}$ metr. Räume und (X, d) das kartesische Prod. mit Produktmetrik d. Eine Folge von Punkten $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = (x_{k_1}, \cdots, x_{k_n})$ aus X konvergiert genau dann in (X, d), wenn für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$ die Komponentenfolgen $(x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}}$ in (X_j, d_j) konvergieren und gegebenenfalls gilt: $\lim_{k\to\infty}(x_{k_1}, \cdots, x_{k_n}) = (\lim_{k\to\infty} x_{k_1}, \cdots, \lim_{k\to\infty} x_{k_n})$.

Beweis

Nach Definition der Produktmetrik ist $d((y_1, \cdots, y_n), (x_{k_1}, \cdots, x_{k_n}) \geq d_j(y_j, x_{k_j}) \,\forall\, j \in \{1, \cdots, n\}.(**)$
Sei nun $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen y in (X, d) konvergent.
Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y, x_k) < \epsilon \;\forall\; k \geq N$.
Nach $(**)$ folgt $d_j(y_j, x_{k_j}) < \epsilon \;\forall\; k \geq N$ und jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$.
Also konvergieren die Komponentenfolgen $x_{k_j} \to y_j$ in $(X_j, d_j),\; j \in \{1, \cdots, n\}$.
Sei nun umgekehrt $\lim_{k\to\infty} x_{k_j} = y_j \;\forall\; j \in \{1, \cdots, n\}$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig.
Dann existiert ein $N_j \in \mathbb{N}$, so dass $d_j(y_j, x_{k_j}) < \epsilon \;\forall\; k \geq N_j$ gilt.
Also $d(y, x_k) = \max_{1\leq j\leq n} d_j(y_j, x_{k_j}) < \epsilon \;\forall\; k \geq \max_{1\leq j\leq n} N_j$; also $x_k \to y$ in (X, d). □

(4.33) Satz

Sei $f : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$ eine Abbildung in das kartesische Produkt metrischer Räume und $f = (f_1, \cdots, f_n)$ die Komponentendarstellung von f, d.h. $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in \underbrace{Y_1 \times \cdots \times Y_n}_{=: \times_{i=1}^{n} Y_i}$.

(i) Die Abbildung f ist genau dann stetig in $x_0 \in X$, wenn jede Komponente $f_j : X \to Y_j$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ in x_0 stetig ist.
(ii) Sei $f : X_1 \times X_2 \to Y$ stetig in $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, wobei X_1, X_2, Y metrische Räume und $X_1 \times X_2$ der Produktraum versehen mit der zugehörigen Produktmetrik ist. Dann ist die Abbildung $h_1 : X_1 \to Y,\; x \mapsto f(x, x_2)$ stetig in x_1 und die Abbildung $h_2 : X_2 \to Y,\; x \mapsto f(x_1, x)$ stetig in x_2.

Beweis: ÜA!

3 Kompaktheit

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.
Besitzt f ein Maximum, existiert also ein $x_0 \in X$ mit $f(x) \leq f(x_0)\; \forall x \in X$?

Wir wissen bereits: Dies ist der Fall für $X = [a, b],\; a < b \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik d auf $\mathbb{R}$.
Aber: Die Aussage ist falsch für offene Intervalle, man betrachte beispielsweise $(0, 1)$ und $f(x) = \frac{1}{x}$.
Diese Funktion f besitzt auf $(0, 1)$ kein Maximum.

22.5.2014

(4.34) Definition

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt; der Grenzwert der Folge soll also ebenfalls in A liegen.
Ist die gesamte Menge X folgenkompakt, so nennt man den metrischen Raum (X, d) folgenkompakt.

(4.35) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.
Dann ist $A \subset X$ genau dann folgenkompakt, wenn der metrische Raum $(A, d|_{A\times A})$ folgenkompakt ist.

(4.36) Satz

Ist A abgeschlossen und eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist A folgenkompakt.

Beweis

Sei $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt; sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A.
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert hierbei mit x bezeichnet sei.
Zu zeigen ist nun, dass x in A liegt.
Angenommen, $x \notin A$.
Da A abgeschlossen ist, ist $\mathbb{R} \setminus A$ offen. Ist $x \in \mathbb{R} \setminus A$, so existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus A$.
Da jedoch zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - x| < \epsilon$ für alle $k \geq N$ existieren muss, steht diese Annahme im direkten Widerspruch zur Konvergenz $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. ↯ □

Beispiel

Die abgeschlossenen Intervalle $[a, b],\ a < b$, sind folgenkompakt.

(4.37) Satz

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $B \subset X$ folgenkompakt.
Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset B$ ebenfalls folgenkompakt.

Beweis

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A.
Wegen $A \subset B$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Folge in B. Somit existiert eine in B konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Es bezeichne b den Grenzwert dieser Teilfolge.
Da in jeder Kugel $U_\epsilon(b)$ Folgenglieder von $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ liegen, kann b nicht Element der insbesondere offenen Teilmenge $X \setminus A$ sein.
Also enthält $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in A konvergente Teilfolge; folglich ist A folgenkompakt. □

Spezielle Eigenschaften folgenkompakter Mengen

(4.38) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.
Die Menge A nennt man **totalbeschränkt**, falls zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $a_1, \cdots, a_k \in A$ existieren, so dass gilt: $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_\epsilon(a_i)$.
Ist die gesamte Menge X totalbeschränkt, so nennt man den metrischen Raum (X, d) totalbeschränkt.

(4.39) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **beschränkt**, falls $x_0 \in X$ und $M > 0$ existieren mit $A \subset U_M(x_0)$.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) heißt beschränkt, falls die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(4.40) Bemerkung

Eine totalbeschränkte Menge ist nach Bemerkung (4.6) beschränkt.

(4.41) Satz

Jede folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und totalbeschränkt. [1]

[1] und insbesondere beschränkt

Beweis

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ folgenkompakt.

(i) Wir zeigen zunächst, dass A abgeschlossen ist.
Für $x \in \bar{A}$ existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $a_n \to x$. [1]
Somit existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert in A.
Da $(a_n)_n$ konvergiert, gilt aber $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, also $x \in A$.
Somit ist $\bar{A} = A \cup \mathrm{HP}(HP)(A) \subset A$, also ist A abgeschlossen. [2]

(ii) Nun zeigen wir, dass A totalbeschränkt ist.
Angenommen, A sei nicht totalbeschränkt, so existiert ein $\epsilon_0 > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit für k beliebigen Punkten $a_1, \cdots, a_k$ gilt: $A \not\subset \bigcup_{i=1}^k U_{\epsilon_0}(a_i)$. Sei zunächst $k = 1$ und $a_1 \in A$ ein Punkt.
Dann ist $A \not\subset U_{\epsilon_0}(a_1)$. Wir wählen $a_2 \in A \setminus U_{\epsilon_0}(a_1)$.
Somit ist $d(a_1, a_2) > \epsilon_0 > 0$.
Induktiv erhalten wir also eine Folge von Punkten $(a_n)_n$ aus A mit $d(a_i, a_j) \geq \epsilon_0 \ \forall \ i \neq j$.
Somit kann diese Folge keine konvergente Teilfolge besitzen, denn wäre $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert x, so existierte zu jedem $\epsilon > 0$, speziell zu $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{3}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $d(a_{n_k}, x) < \epsilon \ \forall \ k \geq N$, dies widerspricht jedoch $a < \epsilon_0 \leq d_{a_{n_k}, a_{n_{k'}}} \leq d(a_{n_k}, x) + d(x, a_{n_{k'}}) \leq \frac{2}{3}\epsilon_0$ und dies widerspricht der Folgenkompaktheit von A. Folglich muss A totalbeschränkt sein. $\square$

(4.42) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_n, x_m) < \epsilon \ \forall \ n, m \geq N$.

(4.43) Satz

(i) Jede Cauchy-Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.
(ii) Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Analog zu Cauchy-Folgen auf den reellen Zahlen, vgl. Analysis I, Satz (1.54). (ÜA!)

(4.44) Definition

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.
In einem vollständigen metrischen Raum kann man also die Konvergenz einer Folge untersuchen, ohne ihren Grenzwert zu berechnen.

(4.45) Beispiele

(i) $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|, \ x, y \in \mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(ii) $(0, \infty), \ (0, 1), \ (1, 5]$ mit der üblichen Metrik sind nicht vollständig.
(iii) $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik ist nicht vollständig.

(4.46) Satz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.
Eine Tl.menge in (X, d) ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und totalbeschränkt ist.

Beweis

„$\Rightarrow$“: Satz (4.41).
„$\Leftarrow$“: ohne Beweis.

Nun betrachten wir den Kompaktheitsbegriff, der mithilfe von offenen Mengen eingeführt wird.

[2] vgl. Blatt 6, Aufgabe 4b).
[2] vgl. Blatt 6, Aufgabe 4c).

(4.47) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge.
Eine Schar $\{U_i\}_{i \in I}$ von Teilmengen von X heißt **offene Überdeckung** von A, falls gilt:
(i) $U_i \subset X$ ist offen für alle $i \in I$, und
(ii) $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \in X : x \in U_i$ für mindestens ein $i \in I\}$.
Eine Teilmenge $\hat{U} \subset U$ der Überdeckung U heißt **Teilüberdeckung**, wenn $A \subset \bigcup_{u \in \hat{U}} u$ gilt.
Hierbei ist $\bigcup_{u \in \hat{U}} u = \{x \in X : x \in U$ für mindestens ein $u \in \hat{U}\}$.
Eine Teilüberdeckung heißt **endlich**, wenn $\hat{U}$ endlich viele Elemente enthält.

26.5.2014

(4.48) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **kompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, dass endlich viele Indizes $i_1, \cdots, i_n \in I$ existieren, so dass $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ ist.
Ist die gesamte Menge X kompakt, so nennt man den metrischen Raum (X, d) kompakt.

(4.49) Definition

Wiederum gilt, dass eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) genau dann kompakt ist, wenn der metrische Raum $(A, d|_{A \times A})$ kompakt ist. Denn eine Menge $V \subset A$ ist in $(A, d|_{A \times A})$ genau dann offen, wenn sie von der Form $V = A \cap U$ ist, wobei U offen in X ist, vgl. Satz (4.15).

Wir zeigen nun, dass in metrischen Räumen die beiden Kompaktheitsbegriffe äquivalent sind.
(4.50) Satz

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

Beweis
Sei (X, d) ein metrischer Raum.
„ $\Rightarrow$ “ Sei A kompakt. Angenommen A, sei nicht folgenkompakt, so existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A, die keine in A konvergente Teilfolge besitzt; zu jedem $x \in A$ finden wir also eine Kugel $U_\epsilon(x)$, die höchstens endlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält; andernfalls wäre x Häufungspunkt und somit Grenzwert einer konvergenten Teilfolge. Dann ist $U := \{U_{\epsilon(x)}(x)\}_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, enthält sie eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, $A \subset U_{\epsilon(x_1)}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\epsilon(x_n)}(x_n)$ mit geeigneten $n \in \mathbb{N}$ und geeigneten $x_1, \cdots, x_n \in A$. Damit könnte A aber nur endlich viele Folgenglieder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthalten; dies steht jedoch im Widerspruch zur Wahl von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Folglich muss A folgenkompakt sein. $\square$
„ $\Leftarrow$ “ Sei A folgenkompakt. Sei $U = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine beliebige offene Überdeckung von A. Zu zeigen ist nun, dass U eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Angenommen, dies sei nicht der Fall, so müssen – da aus der Folgenkompaktheit die Totalbeschränktheit folgt – zu jedem $n \in N$ endlich viele Kugeln $U_{\frac{1}{n}}(a_1), \cdots, a_{\frac{1}{n}}(a_{m_n})$, $m_n \in \mathbb{N}$, $a_1, \cdots, a_{m_n} \in A$ existieren, die A überdecken. Da U keine endliche Teilüberdeckung besitzt, so findet sich unter diesen Kugeln für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Kugel $U_{\frac{1}{n}}(a_n^*)$, $a_n^* \in \{a_1, \cdots, a_{m_n}\}$, so dass $A \cap U_{\frac{1}{n}}(a_n^*)$ nicht von endlich vielen Mengen aus U überdeckt ist. Betrachten wir nun die Folge $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese besitzt, da A folgenkompakt ist, eine in A konvergente Teilfolge $(a_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$. Es bezeichne x den Grenzwert dieser Teilfolge. Nach Voraussetzung existiert ein $u \in U$ mit $x \in u$. Da u offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subset u$. Da x Grenzwert der Folge $(a_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$ ist, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k}^* \in U_{\epsilon/2}(x)$ für alle $k \geq k_0$. Wählen wir nun einen Index der Teilf. n_ℓ mit $\ell \geq k_0$ und $\frac{1}{n_\ell} < \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt für jedes $y \in U_{\frac{1}{n_\ell}}(a_{n_\ell}^*)$: $d(y, x) \leq d(y, a_{n_\ell}^*) + d(a_{n_\ell}^*, x) \leq \frac{1}{n_\ell} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, also $U_{\frac{1}{n_\ell}}(a_{n_\ell}^*) \subset U_\epsilon(x) \subset u \in U$, das heißt, $U_{\frac{1}{n_\ell}}(a_{n_\ell}^*) \cap A$ kann sogar in einer einzigen Aussage $u \in U$ überdeckt werden. Dies widerspricht der Wahl von $U_{\frac{1}{n_\ell}}(a_{n_\ell}^*)$; somit existiert eine endliche Teilüberdeckung. A ist also kompakt. $\square$

(4.51) Folgerung

Für kompakte Teilmengen metrischer Räume gilt somit:
(i) Jede kompakte Menge ist abgeschlossen.
(ii) Jede kompakte Menge ist totalbeschränkt, also insbesondere beschränkt.
(iii) Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.
(iv) Eine Teilmenge im metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ mit der Produktmetrik d ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. *(Satz von Heine-Borel)*
(v) Eine Teilmenge in einem vollständigen metrischen Raum ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und totalbeschränkt ist.
(vi) Das Produkt kompakter Mengen ist kompakt, das bedeutet:
Sind $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, $A_i \subset X_i$ kompakt in (X_i, d_i) für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$, so ist $A_1 \times \cdots \times A_n$ kompakt in $(\underbrace{X_1 \times \cdots \times X_n}_{\text{kartesisches Produkt}}, \underbrace{d_1 \times \cdots \times d_n}_{\text{Produktmetrik}})$.

(4.52) Bemerkung

Wir haben zwei Kompaktheitsbegriffe, die Folgenkompaktheit und die Kompaktheit eingeführt und gezeigt, dass sie übereinstimmen. Diese Übereinstimmung beruht jedoch nur auf der Tatsache, dass wir die beiden Begriffe nur für metrische Räume definiert und untersucht haben. Allgemeiner kann man sie für sogenannte topologische Räume definieren, zu denen auch die metrischen Räume gehören. Es gibt sowohl topologische Räume mit kompakten, aber nicht folgenkompakten Mengen als auch umgekehrt! Hier fallen die beiden Kompaktheitsbegriffe also nicht mehr zusammen.

(4.53) Satz *(Intervallschachtelungsprinzip)*

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ eine absteigende Kette nichtleerer kompakter Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt aller dieser Kompakta [1] ebenfalls nichtleer:
$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in X : a \in A_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \neq \varnothing$.

Beweis

Angenommen, $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \varnothing$. Dann ist $X = X \setminus (\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (X \setminus A_i)$.
Da alle A_i kompakt, also abgeschlossen sind, sind alle $X \setminus A_i$ offen; insbesondere ist $A_0 \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}(X \setminus A_i)$.
Da A_0 kompakt ist, existieren endlich viele Indizes $i_1, \cdots, i_n$ mit $A_0 \subset \bigcup_{k=1}^{n}(X \setminus A_{i_k})$.
Mit $i := \max\{i_1, \cdots, i_n\}$ gilt sogar $A_0 \subset X \setminus A_i$, also $A_0 \cap A_i = \varnothing$.
Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $A_0 \cap A_i = A_i \neq \varnothing$. □

(4.54) Satz

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine (nichtleere) kompakte Menge. Dann besitzt A Maximum und Minimum.

Beweis *(für die Existenz des Maximums; analog für das Minimum)*

A ist kompakt und somit beschränkt, $a = \sup A$ existiert also nach dem Vollständigkeitsaxiom.
Angenommen, a wäre kein Randpunkt von A, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit $a + \epsilon \in A$, also $a \neq \sup A$.
Also ist a Randpunkt von A und somit in der insbesondere abgeschlossenen Menge A enthalten. □

(4.55) Lemma

Sind $(X, d), (Y, d')$ metr. Räume, $f : X \to Y$ stetig, $A \subset X$ kompakt, so ist auch $f(A) \subset Y$ kompakt.
Mit anderen Worten: Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.

Beweis

Sei $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subset Y$ offen. Dann ist $A \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(V_i)$ offen in (X, d).
Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})$.
Somit gilt $f(A) \subset f(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(V_{i_k})) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$. □

[1] **Kom|pak|tum**, das: kompakte Teilmenge, *Plur.* Kompakta

(4.56) Satz *(Satz von Weierstraß bzw. Satz vom Minimum und Maximum)*

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung eines (nichtleeren) kompakten Raumes (X, d) nach $\mathbb{R}$. [1]
Dann besitzt f ein Minimum und ein Maximum, das heißt, es existieren $x_{\min}$ und $x_{\max}$ in X mit $f(x_{\max}) \geq f(x) \geq f(x_{\min})$ für alle $x \in X$.

Beweis: Nach (4.55) ist $f(x) \subset \mathbb{R}$ kompakt, nach (4.54) ex. somit Minimum und Maximum von $f(x)$.□

(4.57) Folgerung

Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer nichtleeren, beschränkten und abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ besitzt ein Minimum und ein Maximum.

Gleichmäßige Stetigkeit

2.6.2014

(4.58) Definition

Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume.

(i) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(U_\delta^X(x)) \subset U_\epsilon^Y(f(x)) \; \forall\, x \in X$ gilt, das heißt, $x, \tilde{x} \in X$ mit $d(x, \tilde{x}) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(\tilde{x})) < \epsilon$.
Im Unterschied zur Definition der Stetigkeit darf δ hier nicht von x, sondern nur von ϵ abhängen.

(ii) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass $d'(f(x), f(\tilde{x})) \leq L \cdot d(x, \tilde{x}) \; \forall\, x, \tilde{x} \in X$. Hierbei heißt L **Lipschitz-Konstante** von f.

(4.59) Satz

Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

(i) f ist Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.

(ii) f ist gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig.

Beweis: Übungsaufgabe!

(4.60) Satz *(Heine)*

Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $f|_K$ sogar gleichmäßig stetig.
Mit anderen Worten: Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig.

Beweis

Angenommen, $f|_K : K \to Y$ sei nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\epsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein Punkt $x_\delta \in K$ existiert mit $f(U_\delta^X(x_\delta) \cap K) \not\subset U_{\epsilon_0}^Y(f(x_0))$. Mit $\delta = \frac{1}{n}$ erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ also zwei Punkte $x_n, x_n^* \in K$ mit $d(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$ und $d'(f(x_n), f(x_n^*)) \geq \epsilon_0$.
Da K kompakt und nach (4.50) somit folgenkompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x_0 \in K$ konvergiert. Nun gilt aber: Die Teilfolge $(x_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, aber ebenfalls gegen x_0, denn es gilt $d(x_0, x_{n_k}^*) \leq \underbrace{d(x_0, x_{n_k})}_{\substack{\to 0 \text{ (nach Wahl} \\ \text{von} (x_{n_k}^*)_{k \in \mathbb{N}})}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_{n_k}^*)}_{< \frac{1}{n_k}}$.
Da f stetig und nach (4.27) folgenstetig ist, konv. $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(f(x_{n_k}^*))_{k \in \mathbb{N}}$ in Y gegen $f(x_0)$.
Also: $0 < \epsilon_0 \leq d'(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^*)) \leq \underbrace{d'(f(x_{n_k}), f(x_0)) + d'(f(x_0), f(x_{n_k}^*))}_{\to 0}$. ↯ □

Nun stellt sich folgende Frage: Sei $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig?

[1] versehen mit der üblichen Metrik

Beispiel

$X = (0,1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R},\ Y = (0,1] \subset \mathbb{R}$ sowie $f : X \to Y$ mit $f(z) = \begin{cases} z & \text{für } z \in (0,1), \\ 1 & \text{für } z = 2. \end{cases}$

f ist bijektiv und stetig, da $\{2\}$ isoliert und $\mathrm{id}|_{(0,1)}$ stetig ist.

Die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ mit $f^{-1}(z) = \begin{cases} z & \text{für } z \in (0,1), \\ 2 & \text{für } z = 1 \end{cases}$ ist jedoch unstetig in 1!

Im Allgemeinen muss die Umkehrabbildung einer stetigen bijektiven Abbildung also nicht stetig sein!

(4.61) Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Zwei metrische Räume X, Y heißen **homöomorph**, falls es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt. Dies wird mit $X \simeq Y$ notiert.

(4.62) Satz

Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen metrischen Räumen. Dann gilt:

(i) $A \subset X$ ist genau dann offen, wenn $f(A) \subset Y$ offen ist.
Analoges gilt auch für Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

(ii) Eine Folge (x_n) konvergiert in X gegen $x_0 \in X$ genau dann, wenn die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Beweis: Übungsaufgabe!

(4.63) Satz *(Stetigkeit der Umkehrabbildung)*

Sei $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung und X ein kompakter metrischer Raum.
Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis

Sei $U \subset X$ offen. Zu zeigen ist, dass $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \subset Y$ offen ist.
Nun gilt ja: $U \subset X$ offen $\Rightarrow$ $X \setminus U$ abgeschlossen.
Nach (4.51) (iii) ist $X \setminus U$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge X selbst kompakt.
Da f stetig ist, ist nach (4.55) $f(X \setminus U)$ kompakt in Y, also insbesondere auch abgeschlossen.
Da f bijektiv ist, ist $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$. Da diese Menge abgeschlossen ist, ist $f(U)$ offen in Y.
Also ist f^{-1} nach Satz (4.30) stetig. $\square$

(4.64) Definition

Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt **kontrahierend** (bzw. **Kontraktion**), wenn sie Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitz-Konstante $L \in (0,1)$.

(4.65) Satz *(Banachscher Fixpunktsatz)*

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion.
Dann existiert genau ein Fixpunkt von f, das heißt, genau ein Punkt $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$.
Diesen Fixpunkt erhält man wie folgt:
Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt, $x_n := f \circ \cdots \circ f = f^n(x_0)$ die n-fache Hintereinanderschaltung von f.
Dann konvergiert $(x_n) \not\Leftarrow$ gegen x^*.

Beweis

(i) Angenommen, es existieren zwei Fixpunkte $x^*, y^* \in X,\ x^* \neq y^*$ von f mit $x^* = f(x^*),\ y^* = f(y^*)$.
Da f eine Kontraktion ist, gilt $0 \leq d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq L \cdot (d(x^*, y^*)$.
Wegen $L \in (0,1)$ muss somit $d(x^*, y^*) = 0$ sein, also $x^* = y^*$.

(ii) Sei $x_0 \in X$ beliebig.
Wir definieren induktiv die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x_1 := f(x_0),\ x_2 := f(x_1),\ x_2 := f(x_1) = f \circ f(x_0)$; allgemeiner: $x_n := f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$. Per vollständiger Induktion folgt:
$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L \cdot d(x_n, x_{n-1}) = L \cdot d(f(x_{n-1}, f(x_{n-2})) \leq L^n d(x_1, x_0)$.
Für $n > m$ folgt:
$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= L^m(L^{n-1-m} + L^{n-2-m} + \cdots + L^0) d(x_1, x_0) \\ &= L^m (\textstyle\sum_{k=0}^{n-m-1} L^k) d(x_1, x_0) \\ &= L^m \tfrac{1-L^{n-m}}{1-L} d(x_0, x_1) \\ &\leq L^m \tfrac{1}{1-L} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$
Da $0 < L < 1$ ist, ist $(L^m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine Cauchyfolge.
Da X vollständig ist, existiert ein $x^* \in X$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ in (X, d).
Wir zeigen nun, dass es sich bei x^* um den gesuchten Fixpunkt von f handelt. Es ist nämlich
$d(f(x^*), x^*) \leq d(f(x^*), x_n) + d(x_n, x^*) = d(f(x^*), f(x_{n-1})) + d(x_n, x^*) \leq L_i d(x^*, x_{n-1}) + d(x_n, x^*)$.
Da dieser Ausdruck gegen 0 konv. und n beliebig ist, gilt $d(f(x^*), x^*) = 0$, also $x^* = f(x^*)$. $\square$

4 Gleichmäßige Konvergenz und normierte Räume

Es sei $B(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \overbrace{f \text{ beschränkt}}^{f(X)\subset\mathbb{R} \text{ beschränkt}}\}$, also $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\ \forall\ f \in B(X)$. Wegen $\|f+g\| = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X}(|f(x)|+|g(x)|) \leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$ erfüllt $d : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R},\ d(f, g) = \|f - g\|$ (neben den trivialen Eigenschaften) auch die Dreiecksungleichung und ist somit eine Metrik auf $B(X)$.

(4.66) Definition

Sei $X \neq \varnothing$. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $B(X)$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen $f \in B(X)$, wenn sie in der Metrik $d_{\sup}(f, g) = \|f - g\|$ gegen Null konvergiert, wenn also $\|f - f_n\|$ eine Nullfolge ist.
Zu jedem $\epsilon > 0$ muss es also ein $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

5.6.2014

(4.67) Satz

Sei $X \neq \varnothing$ ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger, beschränkter Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen die Funktion $f \in B(X)$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis: Wie in Analysis I, Übungsaufgabe!

(4.68) Bemerkung

Sei $X = [0, 1],\ f_n(x) := x^n,\ n \in \mathbb{N}$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von stetigen, beschränkten Funktionen, die punktweise gegen die unstetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ konvergiert.
Die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz in (4.67) ist also wesentlich!
Die Menge der reellwertigen stetigen Fkt. auf X sei bezeichnet durch $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$.
Ist $\varnothing \neq X$ kompakt, so gilt $C(X) \subset B(X)$.

(4.69) Bemerkung

Seien $f, g \in C(X)$. Dann sind auch $|f|$, $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.

Beweis: Übungsaufgabe! (bspw. Folgenstetigkeit nachweisen!)

Bemerkung: $B(X)$ und $C(X)$ sind $\mathbb{R}$-Vektorräume.

(4.70) Definition

Eine **Norm** $\|.\|$ auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\|$ mit:
(i) $\|f\| \geq 0$ und $\|f\| = 0 \ \Leftrightarrow\ f = 0$;
(ii) $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ für $f \in V$ und $c \in \mathbb{R}$ (bzw. $c \in \mathbb{C}$ falls V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist);
(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \ \forall\ f, g \in V$. (Dreiecksungleichung)
Ein **normierter Vektorraum** $(V, \|.\|)$ ist ein Vektorraum V, auf dem eine Norm $\|.\|$ gegeben ist.

(4.71) Bemerkung

Ist $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, so ist $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V.
Jeder normierte Raum ist also insbesondere ein metrischer Raum.

(4.72) Satz *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)*

Sei $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V.
Dann gilt $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \ \forall\ f, g \in V$, wobei $\|f\| := {}_{+}\sqrt{\langle f, f\rangle}$

Beweis [1] (LinA II)
$g = 0$ ✓
$g \neq 0$ Für alle $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{C}$) gilt $0 \leq \|f + tg\|^2 = \langle f + tg, f + tg\rangle = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(t\langle f, g\rangle) + |t|^2\|g\|^2$.
Speziell mit $t := -\frac{\overline{\langle f,g\rangle}}{\|g\|^2}$ folgt $0 \leq \|f\|^2 - 2\frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|^2} + \left(\frac{|\langle f,g\rangle|}{\|g\|^2}\right)^2 \|g\|^2 \ \Leftrightarrow\ |\langle f, g\rangle|^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2$. □

(4.73) Folgerung

Sei $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V. Dann wird durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ eine Norm auf V definiert. Insbesondere wird V ein metrischer Raum mit der Metrik d gegeben durch $d(f, g) = \|f - g\|$.

Beweis
Es ist $\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle g, f\rangle + \overbrace{\langle f, g\rangle}^{=\overline{\langle g,f\rangle}} + \langle g, g\rangle = \langle f, f\rangle + \overbrace{2\,\mathrm{Re}\langle g, f\rangle}^{\leq 2|\langle g,f\rangle|} + \langle g, g\rangle$
$\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \ \Leftrightarrow\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
Die Dreiecksungleichung ist also erfüllt; die verbleibenden Normeigenschaften sind trivial. □

(4.74) Definiton

Ein normierter Vektorraum $(V, \|.\|)$ heißt **Banachraum**, wenn er als metrischer Raum vollständig ist.

5 Der Satz von Stone-Weierstraß

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein einfaches Kriterium dafür, wann sich jede stetige Funktion auf einem Kompaktum gleichmäßig durch Funktionen aus einer vorgegebenen Funktionenklasse approximieren lässt, anzugeben.

(4.75) Satz *(Satz von Stone-Weierstraß: 1. Variante)*

Sei X ein kompakter, metrischer Raum, der mindestens zwei Punkte enthält.
Weiter sei $W \subset C(X)$ mit den Eigenschaften:
(i) $f, g \in W \ \Rightarrow\ f + g \in W$ und $cf \in W \ \forall\ c \in \mathbb{R}$
(ii) $f \in W \ \Rightarrow\ |f| \in W$
(iii) Punktetrennungseigenschaft:
Seien a, b zwei verschiedene Punkte aus X. Dann existiert $f \in W$ mit $f(a) = 0$ aber $f(b) \neq 0$.

[1] Bemerke, dass an der Tafel (und in Rohdes Referenzskript) die Klammern bei $\mathrm{Re}(t\langle f, g\rangle)$ fehlten. Bemerke zudem, dass der Bruch bei t ein negatives Vorzeichen hat (fehlte an der Tafel, es wurde jedoch mit Minus weiter gerechnet).

Unter diesen Voraussetzungen gilt:
Zu jedem $f \in C(X)$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Funktion $h \in W$ mit $\|f - h\|_{\sup} \leq \epsilon$.

Zusatz: Insbesondere existiert dann eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis
Für $f : X \to \mathbb{R}$ sei zunächst $f^+ : X \to \mathbb{R},\ f^+(x) := \max(f(x), 0)$ (Positivteil).
Offenbar ist $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \in W$. Insbesondere gilt also $f \in W \ \Rightarrow\ f^+ \in W$.
Sei $g : X \to R$ eine weitere Funktion. Definiere weiter:
$f \vee g : X \to \mathbb{R},\quad (f \vee g)(x) := \max(f(x), g(x));\ f \wedge g : X \to \mathbb{R},\ (f \wedge g)(x) := \min(f(x), g(x))$.
Weiter gilt: $f \vee g = f + (g - f)^+$ und $f \wedge g = g - (g - f)^+$. Es folgt: $f \vee g \in W,\ f \wedge g \in W\ \forall\ f, g \in W$.
Per Induktion zeigt man: Maxima und Minima von endl. vielen Funktionen aus W liegen wieder in W.

Der Beweis von (4.75) gliedert sich in 4 Schritte:
Schritt 1
Seien $a, b \in X$ verschiedene Punkte, $A, B \in \mathbb{R}$. Dann existiert $f \in W$ mit $f(a) = A$ und $f(b) = B$.
Schritt 2
Gegeben sei $f \in C(X),\ a, b \in X,\ \epsilon > 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung V_b um b und eine Funktion $h_{a,b} \in W$ mit $h_{a,b}(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2}$ und $h_{a,b}(x) < f(x)\ \forall\ x \in V_b$.
Schritt 3
Gegeben sei $f \in C(X),\ a \in X$ und $\epsilon > 0$.
Dann gibt es eine offene Umgebung U_a von a und eine Funktion $h_a \in W$ mit
$f(x) > h_a(x)\ \forall\ x \in X$ und $h_a(x) > f(x) - \epsilon\ \forall\ x \in U_a$.
Schritt 4: Beweis des Satzes.

Beweis von Schritt 1
Nach (iii) existieren $g, h \in W$ mit $g(a) \neq 0,\ g(b) = 0$ sowie $h(a) = 0,\ h(b) \neq 0$.
Setze $f := \frac{A}{g(a)} \cdot g + \frac{B}{h(b)} \cdot h$.
Insbesondere existiert zu jedem $a \in X$ ein $f \in W$ mit vorgebenem Funktionswert in a.
Beweis von Schritt 2
Nach Schritt 1 existiert eine Funktion $h_{a,b} \in W$ mit $h_{a,b}(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2}$ und $h_{a,b}(b) = f(b) - \frac{\epsilon}{2}$.
Die Menge $V_b := \{x \in X : h_{a,b}(x) < f(x)\}$ ist als Urbild von $(0, \infty)$ unter der stetigen Abbildung $f - h_{a,b}$ offen und es gilt $b \in V_b$ wegen $h_{a,b}(b) < f(b)$.
Beweis von Schritt 3
Seien $f \in C(X),\ a \in X$ und $\epsilon > 0$.
Zu jedem $b \in X$ existieren $h_{a,b} \in W$ und eine offene Umgebung V_b mit den Eigenschaften aus Schritt 2.
Es gilt: $X = \bigcup_{b\in X} V_b$.
X ist kompakt, somit ex. eine endl. Teilüberdeckung $X = V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n},\ n \in \mathbb{N}$ für geeignete $b_1, \cdots, b_n$.
Nun definiere: $h_a = h_{a,b_1} \wedge \cdots \wedge h_{a,b_n} \in W$. Nach Konstruktion gilt: $h_a(x) \leq h_{a,b_j}(x) < f(x)\ \forall\ x \in V_{b_j}$.
Wegen $\bigcup_{j=1}^n V_{b_j} = X$ folgt $h_a(x) < f(x)\ \forall\ x \in X$. Es bleibt U_a zu konstruieren.
Wegen $h_a(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2} > f(a) - \epsilon$ ist $U_a := \{x \in X : h_a(x) > f(x) - \epsilon\}$ offene Umgebung von a.
Beweis von Schritt 4
Sei $f \in C(X)$. Zu jedem $a \in X$ haben wir $h_a \in W$ konstruiert, so dass $f(x) > h_a(x)\ \forall\ x \in X$ gilt, aber $h_a(x) > f(x) - \epsilon\ \forall x \in U_a$. Nun gilt: $X = \bigcup_{a\in X} U_a$ und aufgrund der Kompaktheit von X folgt somit bereits $X = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ für geeignete $a_1, \cdots, a_n$.
Nun gilt: $h := h_{a_1} \vee \cdots \vee h_{a_n} \in W$ und $f(x) > h(x) > f(x) - \epsilon\ \forall\ x \in X$.
Es folgt $|f(x) - h(x)| < \epsilon\ \forall\ x \in X\ \Leftrightarrow\ \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| = \|f - h\| < \epsilon$. $\square$

(4.76) Satz *(Satz von Stone-Weierstraß: 2. Variante)*

Sei $X \neq \varnothing$ ein kompakter metrischer Raum. Sei $W \subset C(X)$ mit
(i) $f, g \in W \;\Rightarrow\; f + g \in W,\; cf \in W \;\forall\; c \in \mathbb{R}$;
(ii) $f, g \in W \;\Rightarrow\; f \cdot g \in W$ und W enthalte die konstanten Funktionen;
(iii) W besitze die Punktetrennungseigenschaft.
Dann gilt: Zu jedem $f \in C(X)$ und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $h \in W$ mit $\|f - h\|_{\text{sup}} \leq \epsilon$.

Bemerkung: Der Unterschied zu (4.75) liegt in der Forderung $f \cdot g \in W$ anstatt $|f| \in W$ für $f, g \in W$.

Beweis
Es sei $\overline{W}$ der topologische Abschluss von W in $(C(X), d_{\text{sup}})$. Das bedeutet:
Zu jedem $f \in \overline{W}$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $h \in W$ mit $d_{\text{sup}}(f, h) = \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| < \epsilon$.
Wir zeigen: Auch $\overline{W}$ besitzt die Eigenschaften (i)-(iii).
a) Zu zeigen: $f, g \in \overline{W} \;\Rightarrow\; f + g \in \overline{W}$.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $f_1, g_1 \in W$, so dass $\|f - f_1\|_{\text{sup}} < \epsilon$, $\|g - g_1\|_{\text{sup}} < \epsilon$. Dann folgt:
$d_{\text{sup}}(f + g, f_1 + g_1) = \|(f + g) - (f_1 + g_1)\|_{\text{sup}} \leq \|f - f_1\|_{\text{sup}} + \|g - g_1\|_{\text{sup}} < 2\epsilon$.
b) Zu zeigen: $f, g \in \overline{W} \;\Rightarrow\; f \cdot g \in \overline{W}$.
Sei wieder $\epsilon > 0$ gegeben.
Sei ferner $f_1, g_1 \in W$ so, dass $\|f - f_1\|_{\text{sup}} < \tilde{\epsilon}$, $\|g - g_1\|_{\text{sup}} < \tilde{\epsilon}$ mit $\tilde{\epsilon} := \min\{1, \frac{\epsilon}{1 + \|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}}}\}$.
Dann folgt:
$$\begin{aligned}\|fg - f_1 g_1\|_{\text{sup}} &= \|f(g - g_1) + g(f - f_1) - (f - f_1)(g - g_1)\|_{\text{sup}} \\ &\leq \|f(g - g_1)\|_{\text{sup}} + \|g(f - f_1)\|_{\text{sup}} + \|(f - f_1)(g - g_1)\|_{\text{sup}} \\ &\leq \|f\|_{\text{sup}}\|g - g_1\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}}\|f - f_1\|_{\text{sup}} + \|f - f_1\|_{\text{sup}}\|g - g_1\|_{\text{sup}} \\ &< \tilde{\epsilon}(\|f\|_{\text{sup}} + \|g\|_{\text{sup}} + 1) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Wegen $W \subset \overline{W}$ gilt natürlich die Punktetrennungseigenschaft sowie der 2. Teil von (ii).
Der 2. Teil von (i) war ohnehin trivial. Wir zeigen nun: $f \in \overline{W} \;\Rightarrow\; |f| \in \overline{W}$.
Damit folgt dann die Behauptung aus (4.75).

Hier zunächst:
(4.77) Hilfssatz *(Stone-Weierstraß-Argument)*

Auf dem Intervall $[-1, 1]$ existiert eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ approximiert.

Beweis: nächstes Übungsblatt.

Zunächst zum Beweis von (4.76):

Sei $f \in \overline{W}$. Wir approximieren $|f|$. Sei hierfür $g := \frac{f}{\|f\|_{\text{sup}+1}}$. Dann gilt offenbar $|g(x)| \leq 1 \;\forall\; x \in X$.
Nach (4.77) existiert ein Polynom p_n mit $|p_n(g(x)) - |g(x)|| < \epsilon \;\forall x \in X$.
Die Funktion $p_n \circ g$ liegt aber in $\overline{W}$. Also $|g| \in \overline{W}$. □

(4.78) Folgerung *(Weierstraßscher Approximationssatz)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b \in \mathbb{R})$ stetig.
Dann existiert eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis
Mit $X = [a, b]$ und $W := \{\text{Polynome auf } [a, b]\}$ sind die Voraussetzungen von (4.76) erfüllt. □

5 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

1 Partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich der Produktmetrik offen.
Ziel dieses Kapitels ist das Studium von Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ (oder allgemeiner, $f : D \to \mathbb{R}^n$).

(5.1) Bemerkung

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$ (mit Prod.metrik), so ist $D_j := \{x_j \in \mathbb{R} : (a_1, \cdots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) \in D\}$ offen in $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Metrik). Genau dann wenn D_j offen in $\mathbb{R}$ ist, existiert zu jedem $y \in D_j$ ein $\epsilon > 0$ mt $(y - \epsilon, y + \epsilon) \in D_j$. Es sei ohne Einschränkung $0 \in D_j$.
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, erhält man mit $f_j : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R},\ f_j(x_j) := f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ eine Funktion in einer Variable ($a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$ fest). f_j kann natürlich differenzierbar sein.

(5.2) Definition

(i) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt im Punkt $a = (a_1, \cdots, a_n) \in D$ nach der j-ten Variablen x_j **partiell differenzierbar**, wenn die Funktion $f_j : (a_j - \epsilon, a_j + \epsilon) \to \mathbb{R}$, $f_j(x_j) = f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ im Punkt a_j differenzierbar ist.
Schreibweise: $\partial_j f(a_1, \cdots, a_n) = f_j'(a_j) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\cdots,a_n)-f(a_1,\cdots,a_n)}{h}$.
(ii) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt partiell differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt nach jeder Variablen differenzierbar ist.

Man kann die partiellen Ableitungen $\partial_j f,\ j = 1, \cdots, n$ wieder als Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ auffassen.
Man schreibt auch: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_j f$.

(5.3) Satz

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei partiell differenzierbar.
Existiert für $a \in D$ eine Umgebung $U(a)$, in der alle partiellen Ableitungen von f beschränkt sind, das heißt, $|\partial_j f(x)| \leq C\ \forall\ x \in U(a),\ j = 1, \cdots, n$, so ist f stetig in a.

Beweis
Es gilt für $x \in U(a)$:
$f(x_1, \cdots, x_n) - f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^n \big(f(x_1, \cdots, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - f(x_1, \cdots, x_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)\big)$.
Nach dem Mittelwertsatz existieren Zwischenstellen ξ_j zwischen x_j und a_j, so dass gilt:
$f(x_1, \cdots, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - f(x_1, \cdots, x_{j-1}, a_j, \cdots, a_n) = \partial_j f(x_1, \cdots, x_{j-1}, \xi_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) \cdot (x_j - a_j)$.
Also $|f(x_1, \cdots, x_n) - f(a_1, \cdots, a_n)| \leq \sum_{j=1}^n |f(x_1, \cdots, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) - f(x_1, \cdots, x_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)|$
$\leq \sum_{j=1}^n C \cdot |x_j - a_j| \leq C \cdot n \cdot \delta$ für $x \in \underbrace{(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta)}_{U_\delta(a)} \subset U(a)$, $\delta > 0$ geeignet, $\epsilon > 0$.
Wähle $\delta \leq \frac{\epsilon}{Cn}$, so dass $U_\delta(a) \subset U(a)$. □

Die Voraussetzung in (5.3) ist beispielsweise erfüllt, wenn die partiellen Ableitungen in a stetig sind. Ist also eine Funktion stetig partiell differenzierbar (das heißt, die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ existieren und sind stetig), so muss f stetig sein. Man kann durch Gegenbeispiel zeigen, dass die Existenz der partiellen Ableitungen alleine – im Gegensatz zur reellen Analysis in einer Veränderlichen – nicht notwendigerweise die Stetigkeit impliziert.

Höhere partielle Ableitungen

Sind die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ selbst wieder partiell differenzierbar, kann man höhere partielle Ableitungen bilden.

(5.4) Definition
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt k-fach **stetig partiell differenzierbar**, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_{j_1} f, \cdots, \partial_{j_k} f$ für alle $1 \leq j_1, \cdots, j_k \leq n$ existieren und stetig sind.

(5.5) Satz *(Satz von Schwarz)*
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei zweimal stetig partiell differenzierbar.
Dann gilt $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$. Das heißt: partielle Ableitungen darf man vertauschen.

Beweis
Es sei ohne Einschränkung $n = 2$ (da nur nach zwei Variablen partiell abgeleitet wird).
Sei $a = (a_1, a_2) \in D$. Betrachte die Funktion $H : D \setminus \{z : z_1 = a_1, z_2 = a_2\} \to \mathbb{R}$,
$H(x_1, x_2) = \frac{f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2) - f(x_1,a_2) + f(a_1,a_2)}{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)} = (x_1 - a_1)^{-1} \frac{[f(x_1,x_2) - f(x_1,a_2)] - [f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2)]}{x_2 - a_2}$.
Für $g : \mathbb{R} \setminus \{a_2\} \to \mathbb{R},\ g(x_2) = [f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2)] - [f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)]$ gilt nach dem Mittelwertsatz $H(x_1, x_2) = \frac{\partial_2 f(x_1,\xi) - \partial_2 f(a_1,\xi)}{x_1 - a_1} = \partial_1 \partial_2 f(\eta, \xi)$ für ein η zwischen x_1 und a_1 und ein ξ zwischen x_2 und a_2.
Schreiben wir umgekehrt $H(x_1, x_2) = (x_2 - a_2)^{-1} \frac{[f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2)] - [f(x_1,a_2) - f(a_1,a_2)]}{x_1 - a_1}$, so gilt analog $H(x_1, x_2) = \frac{\partial_1 f(\eta',x_2) - \partial_1 f(\eta',a_2)}{x_2 - a_2} = \partial_2 \partial_1 f(\eta', \xi')$ für ein η' zwischen x_1 und a_1 und ξ' zwischen x_2 und a_2.
Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen jedoch stetig, folglich gilt für jeden Punkt $a \in D$:
$\lim_{(x_1,x_2) \to (a_1,a_2)} H(x_1, x_2) = \partial_1 \partial_2 f(a_1, a_2) = \partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2)$. $\square$

Nun möchten wir allgemeiner den Differenzierbarkeitsbegriff für $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, einführen. Hierzu zerlegen wir die Funktion: $f = (f_1, \cdots, f_m)$. Jede Komponente ist eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$.

(5.6) Definition
Die Matrix $J(f; x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(x) \right)_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 1 \leq \nu \leq n}}$ nennt man – sofern sie existiert – die **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix** von f an der Stelle x.

Es stellt sich folgendes Problem: $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : D' \to \mathbb{R}^p,\ D' \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(D) \subset D'$. Wie lautet die partielle Ableitung von $h = g \circ f$? Zur Erinnerung: Im Fall $n = m = p = 1$ lautet die Kettenregel $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$. Können wir diese Formel verallgemeinern?

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ definiert eine lineare Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \ell_A(x) = y$. [1]

Ist $\ell_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ eine weitere lineare Abbildung mit $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$, so kann man die zusammengesetzte Abbildung $\ell_B \circ \ell_A =: \ell_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ betrachten.
Aus der linearen Algebra wissen wir, dass diese wiederum durch die Matrix $C = B \cdot A$ beschrieben wird; das heißt: $c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj},\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n$ also $B(A(x)) = C(x)$.

Nun formulieren wir zunächst die Definition der Differenzierbarkeit um.
Es gilt $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, das heißt, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = R(x)$ mit $R(x) \xrightarrow{x \to a} 0$.

[1] Es gilt $\ell_A(x) = A \cdot x$, hierbei wird x als Spaltenvektor aufgefasst. Man schreibt in diesem Fall auch einfach $A(x)$.

Definiert man nun $r(x) = (x-a)R(x)$, so gilt $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$ mit $\frac{r(x)}{x-a} \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} 0$, [1] wobei offensichtlich $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)R(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} R(x) = 0$ gilt.

Somit ist $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$ bzw. $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$ hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit im Punkt a.

Dies lässt sich nun auf den allgemeinen Fall übertragen:
Ersetze $f'(a)$ durch die Jacobi-Matrix $J(f;a)$. Da $(x-a) \in \mathbb{R}^n$ ist, ist $J(f;a)(x-a)$ wohldefiniert.
Man kann $r(x)$ definieren durch $f(x) = f(a) + J(f;a)(x-a) + r(x)$.
Wann gilt $\frac{r(x)}{\|x-a\|} \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} 0$, wobei $\|.\|$ die Maximumsnorm (Produktmetrik) sei?

26.6.2014

(5.7) Satz

Die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei für ein festes $a \in D$ stetig partiell differenzierbar.
Definiert man $r(x)$ durch die Gleichung $f(x) = f(a) + J(f;a)(x-a) + r(x)$, so gilt $\frac{r(x)}{\|x-a\|} \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Übungsaufgabe!

(5.8) Definition

Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt in einem Punkt $a \in D$ **total differenzierbar**, wenn es eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ gibt, so dass $f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x)$ mit $\frac{r(x)}{\|x-a\|} \stackrel{x\to a}{\longrightarrow} 0$ gilt.

Mithilfe dieses Begriffs kann man Satz (5.7) wie folgt ausdrücken:
Jede stetig (partiell) differenzierbare Abbildung ist total differenzierbar.

(5.9) Lemma

Die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen sei total differenzierbar in $a \in D$.
Dann ist sie auch partiell differenzierbar in a und es gilt: $J(f;a) = A$. [2]

Beweis (für den Spezialfall $n = 2,\ m = 1$)
In diesem Fall sieht die obige Formel folgendermaßen aus:
$f(x_1,x_2) = f(a_1,a_2) + \underbrace{(\alpha_1,\alpha_2)}_{1\times 2\text{-Matrix}}\binom{x_1-a_1}{x_2-a_2} + r(x_1,x_2)$. Es folgt $\frac{f(x_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{x_1-a_1} = \alpha_1 + \frac{r(x_1,a_2)}{x_1-a_1}$.
Mit dem Grenzübergang $x_1 \to a_1$ folgt $\partial_1 f(a_1,a_2) = \alpha_1$ und analog $\partial_2 f(a_1,a_2) = \alpha_2$. □
Also gilt: $\boxed{\text{stetig partiell differenzierbar} \Rightarrow \text{total differenzierbar} \Rightarrow \text{partiell differenzierbar.}}$

(5.10) Satz *(Kettenregel)*

Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Abbildungen
$f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : D' \to \mathbb{R}^p,\ D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(D) \subset D'$.
Dann ist auch $h := g \circ f$ stetig (partiell) differenzierbar und es gilt: $J(g \circ f;a) = J(g;f(a)) \cdot J(f;a)$.

Beweis: Übungsaufgabe!

---

[1] $f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - (x-a)f'(a) = f(a) + (x-a)f'(a) + r(x)$.

[2] A bezeichnet hierbei die Matrix nach Definition (5.8).

(5.11) Spezialfälle

(i) $(p = 1)$ $f : D \to \mathbb{R}^m,\ g : D' \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $D' \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f(D) \subset D'$.
In diesem Fall ist die Jacobi-Matrix von g genau $J(g; b) = (\partial_1 g, \cdots, \partial_m g)(b)$.
Somit lautet die Kettenregel: $\frac{\partial h}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(b)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$ mit $b = f(a)$. [1]

(ii) $(p = n = 1)$ $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), \cdots, f_m(x)),\ x \in D \subset \mathbb{R}$.
h ist somit eine Funktion in einer Veränderlichen.
Die Kettenregel lautet in diesem Fall: $h'(x) = \sum_{k=1}^m \partial_k g(f(x)) \cdot f_k'(x)$.

(5.12) Anwendungen

(i) Richtungsableitung
$f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f stetig differenzierbar, $a \in D,\ \alpha \in \mathbb{R}^n$.
Die **Richtungsableitung** von f im Punkt a in Richtung α ist die Ableitung der Funktion g gegeben durch $g(t) = f(a + t\alpha)$ im Punkt $t = 0$. [2]
Aus der Kettenregel folgt $g'(0) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(a)\alpha_k$, dies ist das Skalarprodukt der Vektoren $(\nabla f)(a) = (\partial_1 f(a), \cdots, \partial_r f(a))$ und α. $(\nabla f)(a)$ nennt man den **Gradienten** von f in α.
Also gilt $g'(0) = \langle(\nabla f)(a), \alpha\rangle$.

(ii) Koordinatentransformation
$D, D' \subset \mathbb{R}^n$ seien offen.
Ein C^k**-Diffeomorphismus** $(k \in \mathbb{N})$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi : D \to D'$ mit der Eigenschaft, dass sowohl φ als auch φ^{-1} k-fach stetig differenzierbar sind.
$f : D' \to \mathbb{R}$ sei k-fach stetig differenzierbar.
Dann ist auch $g : D \to \mathbb{R},\ g = f \circ \varphi$ k-fach stetig diff'bar mit $\partial_j g(a) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(\varphi(a)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(a)$.

(iii) Polarkoordinatentransformation
Es seien $D' := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)\},\ D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}$.
Betrachte $h : D' \to D,\ h(r, \varphi) = (x, y)$ mit $x := r\cos\varphi$ und $y := r\sin\varphi$.
Die **Polarkoordinaten** von (x, y) sind (r, φ).
Der **Laplace-Operator** Δ ist definiert durch $\Delta f := \partial_x\partial_x f + \partial_y\partial_y f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2},\ f \in C^2(D)$.
Nun wollen wir diesen Operator auf Polarkoordinaten umtransformieren.
Das heißt, für den transformierten Operator Δ^* gilt $\Delta^* g = \Delta^*(f \circ h) = (\Delta f) \circ h,\ f \in C^2(D)$.
Man kann zeigen: $\Delta^* g = \frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial_r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{(\partial\varphi)^2}$. (Übungsaufgabe!)

2 Der Satz für implizierte Funktionen

Gegeben seien n Funktionen in n Veränderlichen. Betrachte eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wann ist diese Abbildung umkehrbar, wann existiert also $g : f(D) \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = y \iff x = g(y)$?

Sind f und g beide stetig diff'bar, gilt nach der Kettenregel $J(g; f(a)) \cdot J(f; a) = E_n$, denn $g \circ f = \mathrm{id}$. Das heißt, die Jacobi-Matrix $J(f; a)$ muss für alle $a \in D$ invertierbar sein.

Wir folgern: Notwendig für die Umkehrbarkeit einer Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^n$ ist unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix $J(f; a)$ für jedes $a \in D$.
Leider ist diese Bedingung nicht hinreichend. Hierzu betrachten wir folgendes Gegenbeispiel:
$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ f : D \to \mathbb{R}^2,\ f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. [3]
Es gilt $J(f; (r, \varphi)) = \begin{pmatrix} cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ und $\det(J(f; (r, \varphi))) = r(cos\varphi)^2 + r(\sin\varphi)^2 = r > 0$.
Somit ist $J(f; (r, \varphi))$ invertierbar $\forall\ (r, \varphi) \in D$, wegen der 2π-Periodizität ist f jedoch nicht injektiv!

[1] Hierbei ist $\partial y_k = \partial_k g(f(a))$.
[2] t ist hierbei aus $(a - t^*, a + t^*)$, wobei t^* hinreichend klein gewählt ist, so dass $U_{t^*} \subset D$ ist.
[3] $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist die sogenannte **punktierte Ebene**.

(5.13) Satz *(Satz für umkehrbare Funktionen, 1. Teil)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, stetig diff'bar mit invertierbarem $J(f;a)$ für jedes $a \in D$. Dann gilt:
(i) f ist offen (das heißt, $D_0 \subset D$ offen $\Rightarrow$ $f(D_0) \subset \mathbb{R}^n$ offen).
(ii) f ist lokal umkehrbar, zu jedem $a \in D$ existiert also eine offene Umgebung $D_0,\ a \in D_0,\ D_0 \subset D$, so dass die Einschränkung $f|_{D_0}$ umkehrbar ist.

Beweis
Wir werden zeigen, dass zu jedem $a \in D$ positive Zahlen $R, r > 0$ existieren, so dass zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_0 - f(a)\| < R$ genau ein $x_0 \in D$ mit $\|x_0 - a\| < r$ und $f(x_0) = y_0$ existiert.
Dann gilt nämlich: $U_R(f(a)) \subset f(D)$, das heißt, $f(D)$ ist offen und $f|_{D\cap U_r(a)}$ ist injektiv.

30.6.2014

Zunächst betrachten wir den Spezialfall $f(a) = a = 0,\ J(f;a) = E_{n\times n}$.
Idee: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes.
Definiere dazu F durch $F(x) := x - f(x) + y_0$, denn dann gilt $f(x_0) = y_0 \ \Leftrightarrow\ F(x) = x_0$.
Nun sollen $R, r > 0$ so bestimmt werden, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:
(i) $\bar{U}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subset D$;
(ii) Für jedes $y_0 \in U_R(0)$ gilt: $\|x\| \leq r \ \Leftrightarrow\ \|F(x)\| = \|x - f(x) + y_0\| \leq R$;
(iii) Für $x, x' \in \bar{U}_r(0)$ gilt: $\|F(x) - F(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$.

Zur Konstruktion von r überlegen wir uns:
(i) ist durch eventuelle Verkleinerung von r leicht zu erfüllen (denn $0 \in D$ mit D offen);
(ii) berücksichtigen wir erst bei der Wahl von R.
(iii) Die Bedingung $\|F(x) - F(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$ ist unabhängig von y_0.
Im Fall $n = 1$ folgt sie aus dem Mittelwertsatz, denn für die Funktion h mit $h(x) := x - f(x)$ folgt $|x - f(x) - x' + f(x')| = |h'(\xi)||x - x'|$ für eine Zwischenstelle ξ zwischen x und x'.
Zu realisieren ist die Ungleichung $|h'(\xi)| \leq \frac{1}{2}$. Wegen $J(f;a) = E$ ist $f'(0) = 1$, also $h'(0) = 0$. Für ein hinreichend kleines r gilt die Ungleichung also, da h stetig ist.
Offensichtlich ist es nun naheliegend, ein Analogon zum Mittelwertsatz für $n > 1$ zu suchen.

(5.14) Hilfssatz *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)*
Sei $h : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, stetig differenzierbar.
Ferner seien $a, b \in D$, so dass die gesamte Verbindungsstrecke $a + t(b-a),\ 0 \leq t \leq 1$, in D enthalten ist.
Dann existiert auf der Verbindungsstrecke ein Punkt ξ, so dass gilt: $h(b) - h(a) = \sum_{k=1}^n \partial_k h(\xi)(b_k - a_k)$.
Speziell gilt dann: $|h(b) - h(a)| \leq C \cdot \|b - a\|$ mit $C \geq \sum_{k=1}^n |\partial_k h(\xi)|$.

Beweis
Zunächst wenden wir den gewöhnlichen Mittelwertsatz an: Wir definieren die Funktion $h_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $h_0(t) = h(a + t(b-a))$ und erhalten $\frac{h_0(1) - h_0(0)}{1-0} = h_0'(t_0)$ für ein $t_0 \in (0,1)$.
Aus der Kettenregel folgt dann $h_0'(t_0) = \sum_{k=1}^n \partial_k h(\xi)(b_k - a_k)$ mit $\xi = a + t(b-a)$. □

Zurück zum Beweis von (5.13):
Wenden wir (5.14) nun auf die Komponenten $h_1, \cdots, h_n$ von $h : D \to \mathbb{R}^n,\ h(x) = F(x) - y_0 = x - f(x)$ an, so folgt $\|x - f(x) - x' + f(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$, vorausgesetzt, r ist hinreichend klein gewählt, so dass $\max_i \sum_{k=1}^n |\partial_k h_i(\xi)| \leq \frac{1}{2}$ für alle ξ mit $|\xi| \leq r$ gilt. Dies ist möglich, da $J(h;0) = E_{n\times n} - E_{n\times n} = 0_{n\times n}$ gilt und somit $\partial_k h_i(0) = 0\ \forall 1 \leq i, k \leq n$ folgt und die partiellen Ableitungen stetig sind.

Zur Konstruktion von R überlegen wir uns nun:
(ii) muss erfüllt sein; für jedes $y_0 \in U_R(0)$ muss also gelten: $\|x\| \leq r \ \Rightarrow\ \|F(x)\| = \|x - f(x) + y_0\| \leq R$.
Eventuell müssen wir hierzu auch r noch weiter verkleinern.

Da nach Voraussetzung $f(0) = 0$ und $J(f;0) = E_{n\times n}$ gelten, folgt:
$f(x) = f(0) + J(f;0)(x-0) + r(x) = x + r(x)$ mit $\frac{r(x)}{\|x\|} \xrightarrow{x\to 0} 0$.
Also ist $\|x - f(x) + y_0\| \leq \|x - f(x)\| + \|y_0\| \leq \|r(x)\| + \|y_0\|$.
Sei nun r bereits so klein gewählt, dass $\frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{2}$ für $\|x\| \leq r$ gilt.
Dann erfüllt die Wahl $R = \frac{r}{2}$ nämlich die Bedingung (ii), denn:
$\|x - f(x) + y_0\| \leq \|r(x)\| + \|y_0\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y_0\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ für $\|x\| \leq r$ und $\|y_0\| \leq R$.

Bislang hatten wir nur $f(0) = 0,\ J(f;0) = E_{n\times n}$ betrachtet. Dies muss noch verallgemeinert werden. Seien also die Voraussetzungen aus (5.13) gegeben. Betrachte die Abbildung $g : D_0 \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch $g(x) = J(f;a)^{-1}[f(x+a) - f(a)]$ mit $D_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x + a \in D\}$.
Offenbar erfüllt diese Abbildung genau $g(0) = 0,\ J(g;0) = E_{n\times n}$. Folglich existieren offene Umgebungen U, V um 0, so dass $g(x) = y_0$ für jedes $y_0 \in V$ eindeutig durch $x \in U$ lösbar ist.
Somit ist die Gleichung $f(x) = y_0$ für jedes $y_0 \in V_0$ eindeutig durch $x \in U_0$ lösbar; hierbei seien
$U_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x - a \in U\},\ V_0 := \{y \in \mathbb{R}^n : J(f;a)^{-1}(y - f(a)) \in V\}$.
Beide Mengen sind offen, da Urbilder offener Mengen offen sind. Somit ist f lokal umkehrbar. $\square$

(5.15) Satz *(Satz für umkehrbare Funktionen, 2. Teil)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine stetig diff'bare Abb. mit inv'barer Jacobi-Matrix $J(f;a)\ \forall\ a \in D$.
Zusätzlich sei f umkehrbar, es existiere also $g : f(D) \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = g(y)$.
Dann ist auch g stetig partiell differenzierbar und es gilt:
$J(g;b) = J(f;a)^{-1}$ für $b = f(a) \;\Leftrightarrow\; a = g(b)$.

Beweis: Übungsaufgabe!

(5.16) Satz *(Satz für implizierte Funktionen)*
Sei $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, eine stetig differenzierbare Abbildung.
Außerdem sei ein Punkt $(a,b) \in D,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$ gegeben, so dass $f(a,b) = 0$ ist und für die Abbildung $f_a : D_0 \to \mathbb{R}^m,\ D_0 := \{y \in \mathbb{R}^m : (a,y) \in D\},\ f_a(y) := f(a,y)$ die Jacobi-Matrix $J(f_a;b)$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Mengen $a \in A \subset \mathbb{R}^n,\ b \in B \subset \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $x \in A$ genau eine Lösung $y \in B$ der Gleichung $f(x,y) = 0$ existiert.

Beweis: Übungsaufgabe!

(5.17) Beispiel *(Polarkoordinatentransformation)*
Wir betrachten die Abbildung $h : (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Die Jacobi-Matrix lautet $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$.
Diese ist invertierbar für $r > 0$, denn $\det(J(h;(r,\varphi))) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \neq 0$.
Aus dem Satz für umkehrbare Funktionen folgt nun, dass h in einer geeigneten Umgebung eines beliebigen Punktes (r_0, φ_0) mit $r_0 > 0$ invertierbar ist.

3 Extremwerte differenzierbarer Funktionen *3.7.2014*

(5.18) Definition
Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je 2 Punkten $a, b \in D$ auch die gesamte Verbindungsstrecke $a + t(b-a),\ 0 \leq t \leq 1$ in D enthalten ist.
Beispielsweise ist $U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ konvex, wobei $\|.\|$ die Maximumsnorm sei. [4]

[4] Die Kugel mit euklidischer Norm ist somit insbesondere auch konvex.

(5.19) Bemerkung

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, eine total differenzierbare Funktion, deren partielle Ableitungen $\partial_1 f, \cdots, \partial_n f$ auf D verschwinden. Dann ist f auf D konstant (und umgekehrt).

Beweis

Seien $a, b \in D$ beliebig; zu zeigen: $f(a) = f(b)$.
Nach Konvexität von D liegt die gesamte Verbindungsstrecke $a + t(b-a),\ 0 \leq t \leq 1$, in D.
Also ist $g : (-\epsilon, 1+\epsilon) \to \mathbb{R},\ g(t) := f(a + t(b-a))$ definiert und es gilt nach der Kettenregel:
$g'(t) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\partial_k f(a + t(b-a))}_{=0}(b_k - a_k) = 0$. Somit ist g konstant, also ist $f(a) = g(0) = g(1) = f(b)$.□

(5.20) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.
(i) $D \subset X$ heißt **zusammenhängend**, wenn jede lokal konstante Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konstant ist.
(ii) $D \subset X$ heißt **bogenweise zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in D$ eine stetige Abbildung φ gibt mit $\varphi : [0,1] \to D,\ \varphi(0) = a$ und $\varphi(1) = b$.
(iii) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn D offen und zusammenhängend ist.

(5.21) Bemerkung

(i) Jedes Intervall $D \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.
(ii) Jeder bogenweise zusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.

Beweis

(i) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ lokal konstant, so gilt $f'(x) = 0\ \forall\ x \in D$. Wie wir aus der Analysis I wissen, muss in diesem Fall f konstant sein, da für $a \neq b \in D$ gilt: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0$; somit $f(b) = f(a)$.
(ii) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ lokal konstant. Zu zeigen ist, dass f konstant ist, also $f(a) = f(b)\ \forall\ a, b \in D$ gilt.
Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $\varphi : [0,1] \to X,\ \varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b$.
Da f lokal konstant ist, existiert zu jedem $x \in X$ ein $\epsilon = C(x) > 0$, so dass $f|_{U_\epsilon(x)}$ konstant ist.
Somit existiert zu jedem $t \in [0,1]$ ein $\epsilon > 0$, so dass $f \circ \varphi|_{[0,1] \cap U_\epsilon(t)}$ konstant ist.
Somit ist $f(a) = f \circ \varphi(0) = f \circ \varphi(1) = f(b)$. □

(5.22) Bemerkung

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ total differenzierbar, so dass alle partiellen Ableitungen verschwinden. Dann ist f konstant.

Beweis

Da alle partiellen Ableitungen von f verschwinden, ist f lokal konstant.
Da D ein Gebiet und somit zusammenhängend ist, ist f per definitionem konstant. □

(5.23) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Ein Punkt $a \in X$ heißt **lokales Maximum** von f, wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von a gibt, so dass $f(x) \leq f(a)\ \forall\ x \in U$ gilt.
Ein Punkt $a \in X$ heißt **lokales Minimum** von f, wenn es eine Umgebung $U \subset X$ von a gibt, so dass $f(x) \geq f(a)\ \forall\ x \in U$ gilt.
Ein Punkt $a \in X$ heißt **lokales Extremum**, falls a lokales Minimum oder Maximum ist.

(5.24) Bemerkung

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, total differenzierbar und $a \in D$ lokales Extremum von f.
Dann gilt $\partial_k f(a) = 0\ \forall\ k = 1, \cdots, n$.

Beweis
Sei $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\epsilon > 0$, so dass $U_\epsilon(a) \subset U$ ist, wobei U so gewählt sei, dass a in U Extremum ist.
Die Funktion $g_{a-j} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R},\ g_{a-j}(\delta) := f(a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j + \delta, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ ist differenzierbar und besitzt eine lokale Extremstelle in $\delta = 0$. Somit ist $0 = g_{a-j}(0) = \partial_j f(a)$. □

Leider ist das Verschwinden partieller Ableitungen keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer lokalen Extremstelle. Lässt sich, wenn wir die höheren Ableitungen betrachten, eine Analogie zu folgendem Kriterium aus dem eindimensionalen Fall finden?

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offenes Intervall, zweimal stetig diff'bar in $a \in D$ mit $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$.
Dann ist a lokales Maximum, denn der Mittelwertsatz besagt: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$ mit ξ zwischen a und x.
Nun ist aber $f''(a) < 0$ und f'' stetig, also gilt $f''(x) < 0$ in einer geeigneten Umgebung $U_\epsilon(a)$.
Somit ist f' in $U_\epsilon(a)$ monoton fallend, denn $\frac{f'(x_1)-f'(x_2)}{x_1-x_2} = f''(\xi_{x_1,x_2}) < 0$, somit folgt:
$f'(x_1) \leq f'(x_2)$ für $x_1 > x_2$ bzw. $f'(x_1) \geq f'(x_2)$ für $x_1 < x_2$.
Insbesondere gilt für $x_1 = a$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) < 0$ für $x > a$ und $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\xi) > 0$ für $y < a$.
Somit ist $f(a) > f(x)$ für alle $x \in U_\epsilon(a)$.

Wir haben gezeigt:
(5.25) Satz
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $a \in D$ mit $f'(a) = 0$.
Sei $D_0 \subset D$ ein offenes Teilintervall mit $a \in D_0$, auf welchem f'' negativ ist.
Dann besitzt $f|_{D_0}$ ihr absolutes Maximum in a, also $f(x) < f(a)\ \forall\ x \in D_0 \setminus \{0\}$.

Finden wir nun eine Analogie für den mehrdimensionalen Fall?

Die Matrix $H = H(f;a) := \begin{pmatrix} \partial_{11}f(a) & \cdots & \partial_{n1}f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{1n}f(a) & \cdots & \partial_{nn}f(a) \end{pmatrix}$ nennt man die **Hesse-Matrix** von f in $a \in D$.
Da f zweimal stetig differenzierbar ist, ist die Hesse-Matrix wegen $\partial_{ij}f(a) = \partial_{ji}f(a)$ symmetrisch.

(5.26) Definition
Eine symmetrische Matrix $H = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ heißt **positiv definit**, falls für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$x^T H x = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} x_i x_j > 0$. Analog nennt man sie **negativ definit**, falls $-H$ positiv definit ist.
Eine symmetrische Matrix nennt man **definit**, falls sie entweder positiv oder negativ definit ist.

(5.27) Satz
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei zweimal stetig differenzierbar.
Sei $a \in D$ so, dass $\partial_j f(a) = 0$ für $j = 1, \cdots, n$ gilt und $H(f;a) = (\partial_{ji}f(a))_{1 \leq i,j \leq n}$ negativ definit ist.
Dann besitzt f in a ein lokales Maximum.

Beweis
Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ und g_α gegeben durch $g_\alpha(t) = f(a + t\alpha)$.
Für ein geeignetes $\epsilon = \epsilon(\alpha) > 0$ ist g_α auf ganz $U_\epsilon(0)$ definiert.
Nach der Kettenregel gilt $g'_\alpha(a) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(a)\alpha_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \alpha_k = 0$.
Somit folgt $g''_\alpha(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j[\partial_k f(a + t\alpha)\alpha_k] = \sum_{j,k=1}^n \partial_{jk} f(a + t\alpha)\alpha_j\alpha_k$.
Sei $U := \{(\alpha, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : a + t\alpha \in D,\ g''_\alpha(t) < 0\}$.
Da $h^{-1}(D)$ mit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ (\alpha, t) \mapsto a + t\alpha$ stetig ist und auch $g''_\alpha(t)$ eine in t und α stetige Funktion ist und die Menge $U = \{(\alpha, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : a + t\alpha \in D\} \cap \{(\alpha, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : g''_\alpha(t) < 0\}$ gilt, ist U als Vereinigung zweier offener Mengen offen in $\mathbb{R}^{n+1}$. Es gilt $S^n \times \{0\} \subset U$, wobei S^n die Sphäre $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : \|\alpha\|_2 = 1\}$ ist und $\|.\|_2$ die euklidische Norm bezeichnet.

Zu jedem Punkt $(\alpha, 0) \in S^n \times \{0\}$ existiert wegen Offenheit von U eine ϵ_α-Kugel $U_{\epsilon_\alpha}((\alpha,0)) \subset U$, und da $S^n \times \{0\} \subset \bigcup_{\alpha \in S^n} U_{\epsilon/2}((\alpha,0)) \subset U$ gilt und S^n kompakt in $\mathbb{R}^n$ ist, ist $S^n \times \{0\}$ kompakt in $\mathbb{R}^{n+1}$.
Somit ist $S^n \times \{0\} \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\epsilon_k/2}((\alpha_k, 0))$ mit n geeignet und $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ geeignet.
Sei $\epsilon_n := \min_{1 \le k \le n} \epsilon_{\alpha_k}$, dann gilt $U_{\epsilon_n/2}((\alpha,0)) \subset U_{\epsilon_n}((\alpha_k,0)) \subset U$ mit $\alpha_k = \arg\min_{j=1,\cdots,n} d(\alpha, \alpha_j)$, also $U_{\epsilon_n/2}((\alpha,0)) \subset U \ \forall \ \alpha \in S^n$.
Folglich existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\|\alpha\|_2 = 1,\ |t| < \epsilon$, also $a + t\alpha \in D,\ g_\alpha(t) < 0$.
Nun hat $g_\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R},\ t \mapsto g_\alpha(t),\ \|\alpha\|_2 = 1$ in $t = 0$ ein absolutes Maximum.
Aber $M = \{x = a + t\alpha : |t| < \epsilon,\ \|\alpha\|_2 = 1$ ist eine Umgebung von a. □

Extremwerte unter Nebenbedingungen

7.7.2014

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer, beschränkt und offen, dann ist $\bar{D}$ kompakt.
Sei $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal stetig differenzierbar auf D.
Da $\bar{D}$ kompakt ist, nimmt f auf $\bar{D}$ ein Maximum an.
Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder wird das Maximum in $a \in D$ oder in $a \in \partial D$ angenommen.
Merke, ∂D ist im Fall $n > 1$ eine unendliche Punktmenge.
Wie bestimmt man das Maximum von $f|_{\partial D}$? Betrachten wir folgendes Beispiel:
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}$, hier ist offensichtlich $\partial D = S^n$, also die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$.
Was ist also das Maximum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\|x\|_2 = 1$?

<u>(5.28) Satz</u>

Gegeben seien eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^m$.
Die Jacobi-Matrix $J(g; x)$ habe für jedes $x \in D$ den maximal möglichen Rang m ($m \times (n+m)$-Matrix).
Sei $M := \{x \in D : g(x) = 0\}$ (Nebenbedingungsmenge). Ferner sei $a \in M$ lokales Extremum von $f|_M$.
Dann existieren $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (**Lagrange-Multiplikatoren**), so dass gilt:
$\partial_i f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(a)$ für $i = 1, \cdots, n+m$.

<u>Bemerkung</u>

Die lokalen Extrema von $f|_M$ sind unter den Lösungen des folgenden Gleichungssystems zu suchen:
$g_j(a) = 0$ für $j = 1, \cdots, m, \quad \partial_i f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(a)$ für $i = 1, \cdots, n+m$.
Die Anzahl der Gleichungen ist hierbei $2m + n$, also die Anzahl der Unbestimmten. [1]

<u>Beweis</u> *(in 3 Schritten)*

<u>Schritt 1</u>

Wir betrachten den Spezialfall $g : D \to \mathbb{R}^m$ mit $f_i(x) = x_{n+i}$. Ist a lokales Extremum von $f|_M$, so gilt $\partial_i f(a) = 0$ für $i = 1, \cdots, n$, denn $D_n := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in D\}$ ist offen. [2]
Setzt man nun $\lambda_j := \partial_{n+j} f(a)$ für $j = 1, \cdots, m$, gilt $\sum_{j=1}^n \partial_{n+j} f(a) \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \le i \le n, \\ \partial_i f(a) & \text{für } n < i \le n+m; \end{cases}$
also $\partial_i f(a) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$.

<u>Schritt 2</u> *(Transformationsinvarianz der Aussage aus (5.28))*

Sei $\varphi : D \to \tilde{D},\ D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, ein Diffeomorphismus.
Definiere $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R},\ \tilde{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^m$ durch $\tilde{f} \circ \varphi := f$ und $\tilde{g} \circ f := g,\ \tilde{a} := f(a)$.
Wir zeigen nun, dass die Aussage für (D, f, g, a) genau dann gilt, wenn sie auch für $(\tilde{D}, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{a})$ gilt.
Gelte also die Behauptung aus (5.28), das heißt, $J(f; a) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) J(g; a)$ für geeignete $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.
Nun folgt aus der Kettenregel $J(\tilde{f}; \tilde{a}) \cdot J(\varphi; a) = J(f; a)$ und $J(\tilde{g}; \tilde{a}) \cdot J(\varphi; a) = J(g; a)$.
Somit ist $J(\tilde{f}; \tilde{a}) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) J(\tilde{g}, \tilde{a})$ und umgekehrt.

---

[1] Die Unbestimmten sind hierbei die Konstanten $a_1, \cdots, a_{n+m}$ sowie die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.
[2] Zu $(x, 0) \in D$ existiert eine ϵ-Kugel bezüglich der Maximumsmetrik $U_\epsilon^{\mathbb{R}^{n+m}}((x,0)) \subset D \ \Rightarrow\ U_\epsilon^{\mathbb{R}^n}(x) \subset D_n$.

Schritt 3
Aus den Schritten 1 und 2 des Beweises folgt die Behauptung des Satzes, wenn wir einen geeigneten Diffeomorphismus $\varphi : D \to \tilde{D}$ finden können, so dass $\tilde{g}_i(x) = x_{n-i}$ für $i = 1, \cdots, m$ gilt.
Da (5.28) eine notwendige Bedingung einer lokalen Extremstelle zum Gegenstand hat, reicht es, einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to \tilde{U}$ mit geeigneten offenen Umgebungen $U, \tilde{U}$ um a (und $\varphi(a)$) zu finden.
Nun hat $J(g; a)$ maximalen Rang m, das heißt, die m Zeilenvektoren spannen einen m-dimensionalen Teilraum $\mathbb{R}^{n+m}$ auf und lassen sich zu einer Basis von $\mathbb{R}^{n+m}$ ergänzen. Somit lässt sich $J(g; a)$ zu einer $(m + n) \times (m + n)$-Matrix $\tilde{J}$ mit vollem Rang $n + m$ ergänzen, wobei die letzten Zeilen von $\tilde{J}$ mit denen von $J(g; a)$ übereinstimmen. Außerdem existiert eine Abbildung $G : D \to \mathbb{R}^{n+m}$ mit $G_{n+j} = g_j$ für $j = 1, \cdots, m$, deren Jacobi-Matrix $J(G; a)$ invertierbar ist, also $J(G; a) = \tilde{J}$.
Nach Satz (5.13) ist G lokal umkehrbar mit stetiger lokaler Umkehrabbildung. Somit definiert G einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to \tilde{U},\ a \in U \subset D,\ \varphi(x) := G(x)$ für $x \in U$, U offen, $a \in U$ geeignet.
Dieser Diffeomorphismus hat also die gewünschte Eigenschaft. $\square$

(5.29) Beispiel
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = (\prod_{i=1}^n x_i)^2,\ S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Was ist das Maximum von $f|_{S^n}$?
Nebenbedingung: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$.
f ist stetig und S^n kompakt, somit nimmt $f|_{S^n}$ ein Minimum und ein Maximum an.
Die Extremstellen erfüllen nach (5.28): $\partial_i f(a) = \lambda \cdot \partial_i g(a)$ für $i = 1, \cdots, n$. Das heißt:
$\frac{2\cdot(\prod_{i=1}^n x_j)^2}{x_i} = \lambda 2x_i \iff (\prod_{i=1}^n x_j)^2 = x_i^2$; hierbei sei $x_i \neq 0$, da das Maximum von $f|_{S^n}$ offenbar > 0 ist.
Somit ist $\lambda \neq 0$, also $\lambda = \prod_{j\neq i} x_j^2\ \forall\ i = 1, \cdots, n$; folglich $x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_n^2 = \frac{1}{n}$.
Da sich der Funktionswert $f(x)$ nicht ändert, wenn man x_i durch $-x_i$ ersetzt, wird das Maximum angenommen an $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ mit $f((\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}})) = (\frac{1}{n})^n$. Also gilt $\prod_{i=1}^n x_i^2 \leq (\frac{1}{n})^n$ für alle $x \in S^n$.

4 Die Taylor-Formel

Wie lautet die Taylor-Reihe einer Funktion in mehreren Veränderlichen?
Zunächst führen wir die Notation mit Multiindizes ein: $\boxed{\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n),\ \nu_j \in \mathbb{N}_0 \text{ für } 1 \leq j \leq n}$
$\boxed{|\nu| := \sum_{k=1}^n \nu_k}$ $\boxed{\nu! := \prod_{k=1}^n (\nu_k!)}$ $\boxed{x^\nu := \prod_{k=1}^n x_k^{\nu_k} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n}$ $\boxed{x \cdot y = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i}$
Ist f auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ hinreichend oft stetig differenzierbar, setzt man:
$\partial_x f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ und $\partial^\nu f := \frac{\partial^{|\nu|} f}{(\partial x_1)^{\nu_1} \cdots (\partial x_n)^{\nu_n}}$.
Sei nun $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, k-fach stetig differenzierbar, $a \in D$.
Für einen beliebigen Richtungsvektor α definieren wir $g_\alpha(t) := f(a + t\alpha)$.
Diese Funktion ist in einer offenen Umgebung um $t = 0$ k-fach stetig differenzierbar.

Es gilt: *10.7.2014*
$$g'_\alpha(t) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a + t\alpha)\alpha_i \quad \text{sowie}$$
$$\begin{aligned} g''_\alpha(t) &= \sum_{j=1}^n \partial_j \big(\sum_{i=1}^n \partial_i f(a + t\alpha)\alpha_i\big)\alpha_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \partial^2_{ji} f(a + t\alpha)\alpha_i\alpha_j \\ &= \sum_{i=1}^n \partial^2_{ii} f(a + t\alpha)\alpha_i + 2 \cdot \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial^2_{ij} f(a + t\alpha)\alpha_i\alpha_j \\ &= \sum_{|\nu|=2} \frac{2!}{\nu!}(\partial^n u f(a + t\alpha))\alpha^\nu. \end{aligned}$$
Per Induktion zeigt man unter entsprechenden Diff'barkeitsannahmen: $g_\alpha^{(k)}(t) = \sum\limits_{|\nu|=k} \frac{k!}{\nu!}\partial^\nu f(a+t\alpha)\alpha^\nu$.
Nun sei f mindestens $(N + 1)$-mal stetig diff'bar. Dann gilt nach der Taylor-Formel in einer Variable:
$g_\alpha(t) = \sum_{k=0}^N \frac{g^{(k)}(0)t^k}{k!} + \frac{1}{N!}\int_0^t (t - u)^N g^{(N+1)}(u)\mathrm{d}u$ im Entwicklungspunkt 0.
Mit $x = a + t\alpha$ gilt $(x - a)^\nu = t^k\alpha^\nu$ für $|\nu| = k$, womit nach der Kettenregel folgt:

(5.30) Satz *(Taylor-Formel)*

Sei $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $(n+1)$-mal stetig diff'bar und $a \in D$. Dann gilt $\forall\ x \in D$:
$f(x) = \sum\limits_{|\nu| \leq n} \frac{\partial^\nu f(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + R_n(x)$ mit $R_n(x) = (n+1) \sum\limits_{|\nu|=n+1} \frac{1}{\nu!} \int_0^t (t-u)^n (\partial^\nu f(a+t\alpha))(a+u\alpha)^\nu \mathrm{d}u$,
beispielsweise $\sum_{|\nu|\leq 2} \frac{\partial^\nu f}{\nu!}(a)(x-a)^\nu = f(a) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(a)(x_i-a_i)(x_j-a_j)$.

(5.31) Bemerkung

Angenommen, $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, sei in $a \in D$ beliebig oft stetig partiell diff'bar.
Die Reihe $\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\nu f(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ heißt **Taylorreihe** von f zum Entwicklungspunkt a.
Wie bereits im eindimensionalen Fall ist nicht klar, für welche $x \in \mathbb{R}^n$ die Reihe konvergiert und ob sie im Falle der Konvergenz mit der Funktion f übereinstimmt.
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt **analytisch**, wenn sie unendlich oft stetig partiell differenzierbar ist und wenn zu jedem $a \in D$ eine offene Umgebung U um a existiert, innerhalb der die Taylorreihe absolut konvergent ist und mit der Funktion f übereinstimmt.

6 Integrationstheorie

1 Das Integral für stetige Funktionen auf Kompakta

Es sei durch $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k,\ k = 1, \cdots, n\}$ ($a_k \leq b_k$ für $k = 1, \cdots, n$) ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^n$ gegeben sowie eine stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$.
Wir möchten das mehrfache Integral $\int_Q f(x)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$ definieren.
Wir versuchen, dies auf die eindimensionale Integrationstheorie zurückzuführen:
$\int_{a_2}^{b_2}[\int_{a_1}^{b_2} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1]\mathrm{d}x_2 = \int_{a_2}^{b_2} F(x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_2$.
In diesem Fall ließe sich zwischen a_2 und b_2 über x_2 integrieren et cetera.

(6.1) Hilfssatz

Die Funktion $f : Q \to \mathbb{R},\ Q$ als Quader wie oben, sei stetig.
Dann ist die Funktion $F : Q' \to \mathbb{R},\ Q' = \{(x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : a_k \leq x_k \leq b_k,\ k = 2, \cdots, n\}$, gegeben durch $F(x_2, \cdots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1$, wieder stetig.

Beweis

Da Q kompakt und f auf Q als stetige F'n gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass $|f(x_1, x_2 \cdots, x_n) - f(y_1, y_2, \cdots, y_n)| < \epsilon\ \forall\ x, y \in Q$ mit $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| < \delta$ gilt. Insbesondere:
$|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1, y_2, \cdots, y_n)| < \epsilon\ \forall\ (x_1, \cdots, x_n), (x_1, y_2, \cdots, y_n) \in Q$ mit $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| < \delta$.
Somit ist $|F(x_2, \cdots, x_n) - F(y_2, \cdots, y_n)|$
$= |\int_{a_1}^{b_1} f(z_1, \cdots, z_n)\mathrm{d}z - \int_{a_1}^{b_1} f(z_1, y_2, \cdots, y_n)\mathrm{d}z|$
$= |\int_{a_1}^{b_1} f(z_1, x_2, \cdots, x_n) - f(z_1, y_2, \cdots, y_n)\mathrm{d}z|$
$\leq \int_{a_1}^{b_1} |f(z_1, x_2, \cdots, x_n) - f(z_1, y_2, \cdots, y_n)|\mathrm{d}z$
$< \epsilon \leq \epsilon(b_1 - a_1)\ \forall\ (x_2, \cdots, x_n), (y_2, \cdots, y_n) \in Q$ mit $\max_{2 \leq k \leq n} |x_k - y_k| < \delta$. $\square$

(6.2) Definition

Das Integral über die stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R},\ Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_k \leq x_k \leq b_k\ \forall\ k = 1, \cdots, n\}$, wird induktiv definiert durch $\int_Q f(x)\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n = \int_{Q'}[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1]\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$ mit $Q' = \{(x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1},\ a_k \leq x_k \leq b_n\ \forall\ 2 \leq k \leq n\}$; $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ (a < b)$ für $n = 1$.

Schreibweise: $\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

(6.3) Satz

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, σ eine Permutation der Variablen.
Dann gilt: $\int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{a_{\sigma_n}}^{b_{\sigma_n}} \cdots \int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} f(x)\mathrm{d}x_{\sigma_1} \cdots \mathrm{d}x_{\sigma_n}$;
mit anderen Worten: es kommt nicht auf die Integrationsreihenfolge an.

Beweis

Für Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k)$ mit stetigen Funktionen in jeweils einer Veränderlichen $f_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R},\ k = 1, \cdots, n$, ist die Behauptung trivial. [1]

[1] Beispiel: $n = 2,\ f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$. Wegen $\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \prod_{k_1}^n \int_{a_1}^{b_1} f_k(x_k)\mathrm{d}x_k$ gilt:
$\int_{a_2}^{b_2}(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1)f(x_2)\mathrm{d}x_1)\mathrm{d}x_2 = (\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_2)\mathrm{d}x_2)(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\mathrm{d}x_1) = \int_{a_1}^{b_1}(\int_{a_2}^{b_2} f(x_2)f(x_1)\mathrm{d}x_2)\mathrm{d}x_1$.

Sei nun $A := \{g : Q \to \mathbb{R} : g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{1_k}(x_1)\cdots f_{n_k}(x_n),\ f_{\ell_k} : [a_\ell, b_\ell] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \forall\ \ell = 1, \cdots, n\}$ die Menge der stetigen F'nen, die sich als endl. Linearkombination von F'nen obigen Typs schreiben lassen. Wegen der Linearität des eindimensionalen Integrals gilt

$\int_Q g(x)\mathrm{d}x = \int_Q \sum_{k=1}^m f_{1_k}(x_1)\cdots f_{n_k}(x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$
$= \int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_2}^{b_2}(\int_{a_1}^{b_1}\sum_{k=1}^m f_{1_k}(x_1)\cdots f_{1_k}(x_n)\mathrm{d}x_1)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$
$= \sum_{k=1}^n \int_Q f_{1_n}(x_1)\cdots f_{n_k}(x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ und die Behauptung gilt ebenfalls für alle $g \in A$.

Da jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ gleichmäßig durch eine Folge von Funktionen aus A approximierbar ist, [1] ist der Satz bewiesen, sofern das mehrfache Integral ebenso wie das eindimensionale Integral stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz ist. Dies folgt aus dem nächsten Hilfssatz.

(6.4) Hilfssatz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann gilt: $|\int_Q f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n| \le \|f\|_{\sup}\prod_{k=1}^n(b_k - a_k)$.

Beweis

Sind $f, g : Q \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in Q$, so gilt wegen der Monotonie des eindim. Integrals:

$\int_Q f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_2}^{b_2}(\underbrace{\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1}_{\le\int_{a_1}^{b_1} g(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1})\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_Q g(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

Insbesondere gilt also:
$|\int_Q f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n| \le \int_Q |f(x)|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \le \int_Q \|f\|_{\sup}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \|f\|_{\sup}\prod_{k=1}^n(b_k - a_k)$. □

(6.5) Folgerung

Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_k : Q \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f : Q \to \mathbb{R}$, so gilt $\lim_{k\to\infty}\int_Q f_k(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_Q(\lim_{k\to\infty} f_k(x))\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

Beweis

Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig. Somit ist f stetig, also existiert das mehrfache Integral darüber. Aus (6.4) folgt:

$|\int\limits_Q f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n - \int\limits_Q f_k(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n| \le \int\limits_Q |f(x) - f_k(x)|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \le \|f_k - f\|_{\sup}\prod\limits_{k=1}^n(b_k - a_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. □

14.7.2014

(6.6) Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.
Der **Träger** [2] einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ wird definiert als Träger$(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Beispiel: $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ -x + 2 & \text{für } 1 < x \le 2. \end{cases}$

Es gilt $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} = (0, 2)$ und somit Träger$(f) = \overline{(0, 2)} = [0, 2]$.

Bezeichnung: $C_C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ stetig und Träger}(f) \text{ kompakt}\}$.

Es gilt: $f, g \in C_C(X) \Rightarrow f + g, f \cdot g, \alpha f \in C_C(X)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. (Übungsaufgabe!)

Die konstanten F'nen gehören nur dann zu $C_C(X)$, wenn (X, d) selbst ein kompakter metr. Raum ist.

[1] Übungsaufgabe: Dies folgt als Konsequenz aus dem Satz von Stone-Weierstraß, 2. Variante.
[2] *englisch:* **support**

(6.7) Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger.
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit Träger$(f) \subset Q$.
Ein solches Q existiert, da Träger(f) kompakt und somit nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt ist.
Dann definieren wir: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}_{\mathrm{d}x} := \int_Q f(x)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

Man zeige als Übungsaufgabe, dass das Integral für C_C-Funktionen wohldefiniert ist, die Definition also nicht von der speziellen Wahl von Q abhängt, solange Träger$(f) \subset Q$ erfüllt ist.

2 Erweiterung des Integrals auf halbstetige Funktionen

$(C_C(\mathbb{R}^n), d_{\text{sup}})$ ist ein metrischer Raum. Definiere $I : (C_C(\mathbb{R}^n), d_{\text{sup}}) \to \mathbb{R},\ I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$.
I ist also eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Man spricht hier auch von einem **Funktional**, da die Abbildung Funktionen abbildet. Welche Eigenschaften besitzt I? Bislang wissen wir:
(i) I ist ein lineares Funktional, das heißt, $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)\ \forall\ f, g \in C_C(\mathbb{R}^n),\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(ii) I ist positiv, das bedeutet: Ist $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ f \in C_C(\mathbb{R}^n)$, so ist $I(f) \geq 0$.

Lässt sich dieser Integralbegriff nun auf größere Funktionenklassen erweitern, so dass die Eigenschaften (i) und (ii) erhalten bleiben? Wir werden versuchen, allgemeinere Funktionen durch C_C-Funktionen zu approximieren. Dies bedeutet allerdings, dass wir auf gleichmäßige Konvergenz verzichten müssen, da gleichmäßige Limites stetiger Funktionen stetig sind. Es stellt sich die Frage, ob wir unstetige Funktionen überhaupt integrieren können wollen? Die Antwort lautet, ja, leider wollen wir dies.
Daher führen wir einen neuen Konvergenzbegriff ein: die monotone Konvergenz.

Der Daniell-Lebesgue-Prozess, 1. Teil *(Das Integral für halbstetige Funktionen)*
Wir erinnern uns an den Fall $n = 1$:
Dort hatten wir das Integral durch gleichmäßige Approximation durch Treppenfunktionen definiert.
Vorab bemerken wir: Ist $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, gegeben, so kann man diese Funktion auf D zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^n$ erweitern, indem man definiert: $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D, \\ 0 & \text{für } x \notin D. \end{cases}$

In diesem Falle definieren wir $\int_D f(x)\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\mathrm{d}x$, vorausgesetzt, die rechte Seite ist definiert. Wir betrachten also von vornherein F'nen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und führen das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$ ein.

(6.8) Definition

Die Funktion $\chi_D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in D, \\ 0 & \text{für } x \notin D \end{cases}$ heißt **charakteristische Funktion** von D. [1]

In Anlehnung an die Überlegungen von eben wollen wir Volumen$(D) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_D(x)\mathrm{d}x$ definieren, allerdings ist χ_D nicht stetig und das Integral auf der rechten Seite ist bisher nur für abgeschlossene Quader definiert. Das Integral für C_C-Funktionen reicht also bereits für solche Zwecke nicht aus!

(6.9) Satz *(Satz von Dini)*

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die monoton gegen die Nullfunktion konvergiert, das heißt,
(i) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in X$,
(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ \forall\ x \in X$.
Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

[1] Diese wird auch **Indikatorfunktion** genannt und gelegentlich mit 1_D bezeichnet.

Beweis

Sei $\epsilon > 0$. Wegen (ii) ex. zu jedem $x \in X$ ein $N = N(x,\epsilon)$ mit $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| < \epsilon \ \forall\ n \geq N(x,\epsilon)$. Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ existiert eine offene Umgebung $U(x_0)$ mit $|f_{N(x_0,\epsilon)}(x)| < \epsilon \ \forall\ x \in U(x_0)$ und $X \subset \bigcup_{x_0 \in X} U(x_0)$. Da X kompakt ist, existiert somit eine endliche Teilüberdeckung, das heißt, es gilt $X \subset \bigcup_{k=1}^m U(x_{0,k}),\ x_{0,k}$ für geeignete $k = 1, \cdots, m$. Setze nun $N = N(\epsilon) := \max_{1 \leq k \leq m} N(\epsilon, x_{0,k})$. Dann gilt $|f_N(x)| < \epsilon \ \forall\ x \in X$ und wegen (i) gilt zudem $|f_n(x)| < \epsilon \ \forall\ x \in X,\ \forall\ n \geq N$. □

Mithilfe des Satzes von Dini soll nun das Integral für Funktionen, die sich monoton durch C_C-Funktionen approximieren lassen, definiert werden. Hierbei lassen wir (aus technischen Gründen) Funktionen zu, die die Werte $-\infty$ bzw ∞ annehmen, d.h. solche mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Es gelten folgende Regeln: $\infty > x \ \forall\ x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad -\infty < x \ \forall\ \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
Der Vorteil ist, dass jede nichtleere Menge M eine kleinste obere und größte untere Schranke in $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt; diese bezeichnen wir mit $\operatorname{Sup} M$ bzw. $\operatorname{Inf} M$.
Der Nachteil ist jedoch die Unmöglichkeit, die algebraischen Rechenregeln für $(+,\cdot)$ so zu erweitern, dass Kommutativ-, Assoziativ- & Distributivgesetze gelten. Widerspruchsfrei ist folgende Konvention:
$\boxed{\infty + x = \infty \ \forall\ x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$, $\boxed{-\infty + x = -\infty \ \forall\ x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}}$, $\boxed{x \cdot \infty = \infty \ \forall\ x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ mit } x > 0}$, $\boxed{x \cdot (-\infty) = -\infty \ \forall\ x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ mit } x > 0}$, $\boxed{(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty}$.
Bemerke, dass $\infty - \infty$ sowie $0 \cdot \infty$ hierbei undefiniert bleiben!

(6.10) Definition

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gehört der **Baireschen Klasse** B^+ an, wenn eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $C_C(\mathbb{R}^n)$-F'nen ex. mit
(i) $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$,
(ii) $f(x) = \operatorname{Sup}_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

Falls (i) und (ii) gelten, schreiben wir $f_n \uparrow f$ oder $f_n \nearrow f$.
F'nen aus B^+ können den Wert ∞ annehmen, nicht jedoch $-\infty$. B^+ ist also unter Addition abgeschlossen: $f, g \in B^+ \Rightarrow f+g \in B^+$, aus $f \in B^+$ folgt aber nicht $-f \in B^+$; B^+ ist also kein Vektorraum.

(6.11) Bemerkung

Es seien $f \in B^+,\ (f_k)_{k \in \mathbb{N}}, (g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von $C_C(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit $f_k \nearrow f,\ g_k \nearrow f$.
Dann gilt: $\sup_{k \in \mathbb{N}}(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x) = \sup_{k \in \mathbb{N}}(\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\mathrm{d}x)$.

Beweis

Zunächst: $f, g \in C_C(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ f \wedge g, f \vee g \in C_C(\mathbb{R}^n)$. Sei also $f_k \nearrow f,\ g \in C_C(R^n)$ beliebig mit $f \geq g$.
Wir zeigen: $\sup_k(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x) \geq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x$.

Die Folge $(g - g \wedge f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine monotone Nullfolge und konvergiert nach dem Satz von Dini gleichmäßig gegen Null. Das Integral ist wegen (6.5) stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz von C_C-F'nen. Somit folgt $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{R^n} \underbrace{(f_k \wedge g)}_{\leq f_k}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x$; folglich ist $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x \leq \operatorname{Sup}\limits_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x$.
Sei nun $g_k \nearrow f$ mit $g_k \in C_C(\mathbb{R}^n) \ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Da jedes g_k die obige Voraussetzung an g erfüllt, gilt $\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\mathrm{d}x \leq \operatorname{Sup}_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x$, also auch $\operatorname{Sup}_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\mathrm{d}x \leq \operatorname{Sup}_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x$. Analog erhält man die umgekehrte Ungleichung durch Vertauschen der Rollen von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$. □

17.7.2014

(6.12) Definition

Sei $f \in B^+$. Das Integral von f wird definiert durch $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x := \operatorname{Sup}_k(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x)$, wobei $(f_k)_k$ eine $C_C(\mathbb{R}^n)$-Folge mit $f_k \nearrow f$ ist.

Rechenregeln für die Bairesche Klasse

(6.13) Bemerkung

Seien $f \in B^+,\ C \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $f(a) > C$. Dann ist $f(x) > C$ in einer vollen Umgebung von $a.(*)$

Beweis

Sei $f_k \nearrow f,\ f_k \in C_C(\mathbb{R}^n),\ f(a) > C$.
Wegen $f(a) = \mathrm{Sup}_k f_k(a)$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$ mit $f(a) \geq f_m(a) > C$.
Da f_m stetig ist, gilt $f_m(x) > C$ in einer vollen Umgebung von a, somit folgt die Behauptung für $f.\square$

Allgemein nennt man Funktionen mit der Eigenschaft $(*)$ **unterhalbstetig**.
Man kann zeigen, dass jede unterhalbstetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x) \geq 0$ außerhalb eines Kompaktums in B^+ liegt.

Als nächstes zeigen wir, dass das Integral für B^+-F'nen stabil gegenüber monotoner Approximation ist.

(6.14) Hilfssatz

Sei $(f_k)_k,\ f_k \in B^+\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge aus B^+, also $f_k \leq f_{k+1}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $f = \mathrm{Sup}_k f_k \in B^+$ sowie $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Sup}_k(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x)$.

Beweis

Sei $f_k \nearrow f,\ f_k \in B^+$. Offenbar existieren $f_{\ell,k} \in C_C(\mathbb{R}^n)$ mit $\ell, k \in \mathbb{N},\ f_{\ell,k} \nearrow f_k$.
Definiere nun $g_m := \max_{\ell+k\leq m} f_{\ell,k}$; diese ist als Maximum endlich vieler C_C-F'nen selbst eine C_C-F'n.
Weiter ist nach Konstruktion: $g_m \leq g_{m+1}\ \forall\ m \in \mathbb{N}$ mit $g_m \leq f\ \forall\ m \in \mathbb{N}$; somit $\mathrm{Sup}_k\, g_k =: g \leq f$.
Wegen $f_{\ell,k} \leq g_{\ell+k} \leq g\ \forall\ \ell, k$ folgt weiter $f_k \leq g\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, also auch $\mathrm{Sup}_k f_k = f \leq g$, also $f = g$.
Wegen $g \in B^+$ ist somit auch $f \in B^+$. Nach Defn. des Integrals gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Sup}_k(\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\mathrm{d}x)$.
Wegen $g_k = \max_{\ell+j\leq k} f_{\ell,j} \leq f_k\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ folgt wegen $(**)$: $\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$.
Dies folgt aus der Monotonie des Integrals über B^+-F'nen. Es folgt $\mathrm{Sup}_k(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.\square$

Zu $(**)$: Seien $g, f \in B^+,\ g \leq f$. Zu zeigen: $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$.
Es existieren $(g_k)_k, (f_k)_k$ mit $g_k, f_k \in C_C(\mathbb{R}^n)\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ mit $g_k \nearrow g,\ f_k \nearrow f$.
Wegen $g \leq f$ ist $f_k \vee g_k \nearrow f$, somit folgt aus der Monotonie des Integrals für C_C-Funktionen:
$\mathrm{Sup}_k \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\mathrm{d}x \leq \mathrm{Sup}_k \int_{\mathbb{R}^n}(g_k \vee f_k)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$.

A Anmerkungen zur Vorlesung

Über die Existenz der komplexen Zahlen

Die Aussage „Ohne Beweis: $\mathbb{C}$ existiert." ist alles andere als befriedigend, jedoch können wir den Existenzbeweis der komplexen Zahlen mit Mitteln aus der Linearen Algebra I führen.

Wir erinnern zunächst daran, dass die Menge der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ einen Ring bildet. [1]

Behauptung: Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ bilden einen Unterring, den wir $\mathbb{C}$ nennen.
Beweis
Wegen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & -(b-b') \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -(a'b+ab') \\ a'b+ab' & aa'-bb' \end{pmatrix}$ ist $\mathbb{C}$ bezüglich der Differenzbildung und Multiplikation in sich abgeschlossen und bildet somit einen Unterring. [2]
Offensichtlich ist das Nullelement des Rings $\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und das Einselement $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Die Multiplikation ist – wie man leicht überprüft – kommutativ.
Um diesen kommutativen Ring einen Körper nennen zu dürfen, fehlt somit nur noch die Eigenschaft, dass alle Elemente des Rings mit Ausnahme des Nullelements multiplikative Inverse besitzen.
Wir stellen fest, dass $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{ab-ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab-ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$ gilt.
Somit ist für jedes $\mathbf{0} \neq z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ das multiplikative Inverse definiert durch $z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. $\square$

Setze $\mathrm{i} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Offensichtlich besitzt jedes $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung $z = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathrm{i}$.
Den Unterkörper der Elemente der Form $z = a \cdot \mathbf{1}$ $(b = 0)$ identifizieren wir mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Bezeichung: Wir schreiben für $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C}$ kurz $z = a + b\mathrm{i}$ und nennen a den Realteil und b den Imaginärteil von z.

[1] vgl. Prof. Flenners Skript zur Linearen Algebra I WS 13/14, Bemerkung 12.6
[2] und insbesondere einen Ring schlechthin

Stichwortverzeichnis