Dossier de candidature
à un poste de
Maître de Conférence

Laurent Battisti

20 mars 2014

Curriculum vitae . . . 2
Publications . . . 4
Activités administratives . . . 6
Activités d'enseignement . . . 7
Activités de recherche . . . 9
Résumé des résultats obtenus . . . 10
Programme de recherche . . . 15
Bibliographie . . . 18

Laurent BATTISTI

Postdoc à la Ruhr-Universität Bochum

+33 (0) 6 76 91 29 51
laurent.battisti@rub.de
homepage.rub.de/laurent.battisti/
né le 19 décembre 1985 à Istres - nationalité française

Adresse professionnelle :
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Raum NA 4/26
D-44780 Bochum
Allemagne

Adresse personnelle :
Haus der nationen - Appt. 004
Spechtsweg 20
D-44801 Bochum
Allemagne

Intérêts de recherche : Géométrie complexe, Géométrie différentielle, Variétés toriques, Groupes de Lie complexes, Groupes de Cousin

Postes occupés

2013–présent **Post-doctorat**, *Ruhr-Universität Bochum*, Allemagne.
Invitation par les Professeurs P. Heinzner et A. T. Huckleberry.

2012–2013 **ATER (Mathématiques section 25)**, *Université Aix-Marseille*.
Il s'agissait d'un poste à mi-temps, soit 96h équivalent TD.

Interrogations orales, *Lycée Notre Dame de Sion*, Marseille, MPSI & MP.
Cinq heures hebdomadaires.

2009–2012 **Doctorant contractuel avec monitorat**, *Université de Provence*, Marseille.
Durée des enseignements : 64h équivalent TD par an. J'ai effectué une partie de mes enseignements à l'**Ecole de l'Air** à Salon de Provence entre 2010 et 2012.
Financement : Une bourse ministérielle m'a été attribuée par le laboratoire à l'issue du Master 2, ainsi qu'une bourse Europe-Région par l'Université. La bourse régionale étant nominative, j'ai opté pour celle-ci afin que l'Ecole Doctorale puisse bénéficier d'un financement supplémentaire.

2008–2009 **Tuteur de Mathématiques**, *CTES (Université de Provence)*, Marseille.

Formation, diplômes

2009–2012 **Doctorat de Mathématiques**, *Université Aix-Marseille* (*anciennement Université de Provence*).
Thèse effectuée sous la direction du Professeur Karl OELJEKLAUS.
Titre : *Variétés toriques à éventail infini et construction de nouvelles variétés complexes compactes : quotients de groupes de Lie complexes et discrets.*
Jury : Georges DLOUSSKY, Professeur, Université d'Aix-Marseille - LATP, *Examinateur*
Jean-Jacques LOEB, Professeur, Université d'Angers - LAREMA, *Rapporteur*
Laurent MEERSSEMAN, Professeur, Université de Bourgogne - IMB, *Rapporteur*
Karl OELJEKLAUS, Professeur, Université d'Aix-Marseille - LATP, *Directeur*
Matei TOMA, Professeur, Université de Lorraine - IEC, *Président*
David TROTMAN, Professeur, Université d'Aix-Marseille - LATP, *Examinateur*
Mention : Très Honorable. **Date de soutenance** : 10 décembre 2012.
Qualification pour le corps MCF dans la section CNU n°25 au titre de la campagne 2013.

2008–2009 **Master 2 de Mathématiques Fondamentales**, *Université de Provence*, Marseille.
Mention : Très Bien (rang 1).
Mémoire réalisé sous la direction de Monsieur Karl OELJEKLAUS.
Titre : *Variétés toriques*. **Date de soutenance** : 15 juin 2009.

2007–2008	**Agrégation externe de Mathématiques**, *Préparation à l'Université de Provence*, Marseille, rang 172. Durant l'année 2007–2008 j'ai bénéficié d'une bourse sur critères universitaires.
2006–2007	**Master 1 de Mathématiques**, *Université de Provence*, Marseille. **Mention** : Très Bien (rang 1). Mémoire réalisé sous la direction de Monsieur Karl OELJEKLAUS. **Titre** : *La courbure*. **Date de soutenance** : 22 mai 2007.
2005–2006	**Licence 3 de Mathématiques**, *Université de Provence*, Marseille. **Mention** : Très Bien (rang 1).
2003–2005	**Classes préparatoires scientifiques (MPSI, MP*)**, *Lycée Thiers*, Marseille.
2003	**Baccalauréat série Scientifique**, *Lycée de l'Empéri*, Salon de Provence.

Compétences informatiques

Systèmes	Mac OS X, Linux, Windows.
Logiciels	Maple, Mathematica, Matlab, Sage, bureautique (LaTeX, Office), dessin vectoriel.
Langages	Basic, C, Python, HTML, PHP, Java, Caml, AppleScript.

Langues parlées

Français	Langue maternelle
Anglais	Courant
Italien	Courant
Allemand	Notions - en cours d'apprentissage

Publications

Articles publiés ou à paraître dans des revues à comité de lecture :

[4] **Appendice**, *de l'article "**Nonreciprocal units in a number field with an application to Oeljeklaus-Toma manifolds**" par A. Dubickas, New York Journal of Mathematics : Volume 20, (2014).*

Si je suis convoqué pour une audition, j'adresserai cet article au jury.

Dans cet article, Artūras Dubickas étudie un problème de théorie des nombres qui provient d'un critère d'existence de métriques LCK sur les variétés OT que j'ai démontré. C'est la démonstration de ce critère qui fait l'objet de la première partie de l'appendice. Dans la seconde partie, je donne une démonstration alternative d'un résultat de l'article principal en utilisant des propriétés géométriques des variétés OT (à savoir leur non-Kählerianité) eu lieu et place d'un argument de théorie des nombres.
L'article principal et l'appendice ont été rédigés simultanément et ils nous a semblé naturel d'opter pour ce "format" de publication.

[3] **Holomorphic line bundles over domains in Cousin groups and the algebraic dimension of OT-manifolds**, *à paraître dans Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, preprint sur arXiv:1306.3047v1*, avec K. Oeljeklaus.

Si je suis convoqué pour une audition, j'adresserai cet article au jury.

Dans ce papier on étend des résultats de Vogt à propos des fibrés en droite au-dessus de groupes de Cousin au cas de domaines de tels groupes stables sous l'action du sous-groupe maximal compact. On utilise ensuite ceci pour montrer que la dimension algébrique des variétés OT est nulle. Enfin on établit que certains groupes de Cousin (en particulier ceux qui apparaissent dans la construction des variétés OT) ont une irrégularité de dimension finie.

[2] **LVMB manifolds and quotients of toric varieties**, *Mathematische Zeitschrift : Volume 275, Numéro 1 (2013), pp. 549-568.*

Si je suis convoqué pour une audition, j'adresserai cet article au jury.

Dans cet article, on étudie une classe de variétés construites par Bosio, appelées variétés LVMB. On donne une interprétation de sa construction en termes de quotient de variétés toriques par des groupes de Lie complexes. De plus, les variétés LVMB étendent une classe de variétés obtenues par Meersseman, appelées variétés LVM, et on donne une caractérisation de ces variétés à l'aide de notre description torique. Finalement, on répond à une question posée par Cupit-Foutou et Zaffran.

[1] **Surfaces de Stein associées aux surfaces de Kato intermédiaires**, *Documenta Mathematica, Volume 16 (2011), pp. 355–371.*

Soient S une surface de Kato intermédiaire, D le diviseur formé des courbes rationnelles de S, $\widetilde{S}$ le revêtement universel de S et $\widetilde{D}$ la préimage de D dans $\widetilde{S}$. On donne deux résultats concernant la surface $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$, à savoir qu'elle est de Stein (ce qui était connu dans le cas où S est une surface d'Enoki ou d'Inoue-Hirzebruch) et on donne une condition nécessaire et suffisante pour que son fibré tangent holomorphe soit holomorphiquement trivialisable.

Articles soumis :

[5] **A generalization of Sankaran and LVMB manifolds**, *preprint sur arXiv :1403.5130v1*, avec K. Oeljeklaus.

Si je suis convoqué pour une audition, j'adresserai cet article au jury.

Dans cet article on décrit la construction d'une nouvelle classe de variétés complexes compactes, qui peuvent être vues à la fois comme un généralisation des variétés de Sankaran, des variétés LVMB et des variétés OT. Une fois construits, on donne des premières propriétés de ces nouveaux espaces. Comme dans le cas des variétés OT ou de Sankaran, la construction fait intervenir de façon non triviale la théorie des nombres. Le point de départ est le choix d'un corps de nombres, dont des propriétés purement algébriques permettent de déduire des propriétés géométriques de nos nouveaux espaces.

En préparation :

[6] **A generalization of LVMB manifolds**, *avec S. Cupit-Foutou et V. Tsanov.*

Dans cet article l'objectif est d'étendre une caractérisation des variétés LVM parmi les variétés LVMB et également de donner une nouvelle généralisation possible de cette construction.

Autres :

[7] **What is an OT manifold?**, *Notes de cours*.
Ces notes correspondent à un mini-cours d'introduction aux variétés OT que j'ai donné à la Ruhr-Universität Bochum entre février et mars 2014. Elles sont disponibles en ligne sur ma page web.

Activités administratives

2013–2014 Organisation du groupe de travail “Arbeitsgruppe für Matheaufgaben” à la Ruhr-Universität Bochum.

Séminaire pour les doctorants et post-doctorants. Résolution collective d'exercices niveau recherche.

2013–2014 Coorganisation du séminaire “Komplexe Geometrie” à la Ruhr-Universität Bochum.

Avec V. Tsanov.

2012–2013 Participation à la journée de présentation des Masters aux étudiants de Licence.

Accueil des étudiants, présentation des filières.

2012–2013 Membre de la commission informatique du laboratoire (LATP, Marseille).

2011–2012 Participation à l'élaboration de l'emploi du temps du semestre 6 en Licence 3 de Mathématiques.

2010–2013 Représentant des doctorants au conseil du laboratoire (LATP, Marseille).

2009–2013 Veille informatique auprès des membres du laboratoire.

Conseils pour l'acquisition et l'installation de nouveaux matériels ou logiciels.

2009 Création et maintenance d'un logiciel pour se connecter aux serveurs du laboratoire *via* VNC.

L'utilitaire automatise la création d'un tunnel SSH et le lancement d'un logiciel serveur VNC sur les ordinateurs du laboratoire. Il reste simplement à lancer un client VNC sur sa machine.

Activités d'enseignement

À la page suivante figure une liste détaillée de mes enseignements.

J'ai débuté mon expérience de l'enseignement dans le supérieur en 2008 durant mon année Master 2 en tant que tuteur de Mathématiques. Pendant la préparation de ma thèse entre 2009 et 2012, j'ai effectué un monitorat encadré par les formations du CIES, ce qui représentait un volume horaire annuel de 64h (équivalent TD). Une partie de ces enseignements était effectuée à l'Ecole de l'Air à Salon de Provence. En 2012/2013 j'ai occupé un poste d'ATER à mi-temps, soit 96h (équivalent TD).

Depuis septembre 2009, j'ai été chargé d'enseigner aussi bien en travaux dirigés qu'en cours magistraux, à un public très varié d'étudiants et dans des matières différentes (algèbre, analyse, géométrie, probabilités, informatique). Exceptionnellement, en 2013-2014 j'effectue un post-doctorat sans enseignement, hormis un mini-cours sur les variétés OT de niveau M2/doctorat entre février et mars 2014 à mon initiative. J'ai rédigé des notes ([7]) pour ce cours qui sont disponibles sur ma page web.

À l'Université je suis intervenu en filières de Mathématiques, Biologie, Physique et Sciences de l'Ingénieur, de la première à la troisième année de Licence. J'ai également participé aux cours du Centre de Télé-Enseignement de l'Université, où l'on contacte les étudiants par l'intermédiaire d'une messagerie électronique et d'un forum. Entre septembre 2012 et juin 2013 j'ai effectué des interrogations orales pour les classes de MPSI et MP au Lycée Notre Dame de Sion à Marseille.

A l'Ecole de l'Air à Salon de Provence, j'ai enseigné à des étudiants issus des CPGE (EA 1, filière d'où sont notamment issus les pilotes de la Patrouille de France), des étudiants étrangers (CSEA 1) tout comme des personnels militaires ayant obtenu leur baccalauréat plusieurs années auparavant, à qui un diplôme de niveau L2 assurait l'obtention d'une promotion de grade (EMA 1). L'Ecole de l'Air est une école militaire créée en 1933, qui forme notamment les officiers de l'Armée de l'Air. Elle est accessible aux étudiants en CPGE scientifiques par la voie du concours. Sa devise est "Faire face", attribuée au Capitaine G. Guynemer.

La variété de ces profils d'étudiants m'a offert la possibilité de me confronter à des situations sans cesse nouvelles, ce qui fut extrêmement enrichissant aussi bien sur le plan didactique que personnel. Par exemple, les problématiques qui se posent lorsque l'on répond *via* un forum à des étudiants qui travaillent depuis chez eux en Télé-Enseignement sont très différentes de celles que l'on rencontre face à un groupe d'étudiants dans une filière donc la matière principale n'est pas les Mathématiques. Il faut tantôt maintenir l'intérêt du public, par exemple en donnant des exercices se rapprochant de leur sujet d'étude principal, tantôt être capable de déceler rapidement les points qui posent problème à une personne qui se trouve à plusieurs centaines de kilomètres. Dans tous les cas, c'est à l'enseignant de faire en sorte de s'adapter au mieux à son public, afin d'être en mesure le plus rapidement possible d'avancer avec énergie et efficacité.

J'ai toujours offert aux étudiants la possibilité de me contacter en dehors des heures de cours (par email le plus souvent, mais aussi dans mon bureau sur rendez-vous) pour répondre à leurs questions. Il est également arrivé plusieurs fois que ceux-ci viennent me faire part de leurs interrogations dans des matières pour lesquelles je n'étais pas leur enseignant, y compris les années suivantes, ou pour les conseiller dans leurs choix d'orientation.

Dès le début de mon monitorat, j'ai trouvé l'activité d'enseignement très complémentaire et bénéfique pour l'activité de recherche. Cela permet d'améliorer constamment sa façon de communiquer des idées aux autres, ce qui est également utile pour les exposés scientifiques. À l'inverse, la recherche permet de prendre du recul sur les notions que l'on enseigne. Au final je pense que cet équilibre entre les deux tâches principales d'un enseignant-chercheur est très important et positif.

Pendant mes études je me suis toujours intéressé à l'informatique et ai acquis des compétences dans ce domaine, qui m'ont permis de participer à des TP d'informatique (Maple et Matlab), notamment à l'Ecole de l'Air. D'autre part, j'ai appris à utiliser la plateforme en ligne Moodle pour mes interventions au Centre de Télé-Enseignement de Sciences de l'Université d'Aix-Marseille.

2012–2013 **Chargé de TD**, en *Outils Mathématiques*, cours de M. Boissy.
(Licence 1 Sciences pour l'Ingénieur, Université d'Aix-Marseille) - 20 heures

Chargé de TD, en *Calcul différentiel*, cours de M. Boissy.
(Licence 1 Sciences pour l'Ingénieur, Université d'Aix-Marseille) - 48 heures

Cours et TD, d'*Initiation à la rédaction de documents mathématiques*.
(Licence 2 Mathématiques, CTES, Université d'Aix-Marseille) - 30 heures

Interrogations orales, en classes préparatoires, élèves de Mlle Renaud et M. Rouget.
(MPSI et MP, Lycée Notre Dame de Sion à Marseille) - 5 heures hebdomadaires

2011–2012 **Chargé de TD**, en *Analyse complexe*, cours de M. Youssfi.
(Licence 3 de Mathématiques, Univ. d'Aix-Marseille [anciennement : Univ. de Provence]) - 36 heures

Cours et TD, d'*Algèbre linéaire*.
(CSEA 1 - École de l'Air à Salon de Provence) - 24 heures

Cours et TD, de *Calcul matriciel*.
(EMA 1 - École de l'Air à Salon de Provence) - 24 heures

2010–2011 **Chargé de TD**, en *Analyse complexe*, cours de M. Youssfi.
(Licence 3 de Mathématiques, Univ. d'Aix-Marseille [anciennement : Univ. de Provence]) - 36 heures

Chargé de TD, de *Mathématiques pour la Biologie*, cours de Mme Aimar.
(Licence 1 Biologie, Univ. d'Aix-Marseille [anciennement : Univ. de Provence]) - 20 heures

Chargé de TD, en *Probabilités*, cours de M. Goffaux.
(EA 1 - École de l'Air à Salon de Provence) - 16 heures

Chargé de TD, de *Calcul matriciel*, cours de M. Barache.
(EMA 1 - École de l'Air à Salon de Provence) - 18 heures

2009–2010 **Chargé de TD**, en *Analyse complexe*, cours de M. Youssfi.
(Licence 3 de Mathématiques, Univ. d'Aix-Marseille [anciennement : Univ. de Provence]) - 36 heures + 8 heures de soutien

Chargé de TD, de *Mathématiques pour la Biologie*, cours de Mme Aimar.
(Licence 1 Biologie, Univ. d'Aix-Marseille [anciennement : Univ. de Provence]) - 20 heures

2008–2009 **Tutorat de Mathématiques**, au CTES via la plateforme Moodle.
(Licence 1, Licence 2 & Licence 3 de Mathématiques, Univ. d'Aix-Marseille [anciennement : Univ. de Provence])

Activités de recherche

Exposés en conférences, séminaires ou groupes de travail

Avril 2014	**Séminaire de Géométrie**, *Université de Bordeaux*.
Avril 2014	**Séminaire de Topologie et de Géométrie algébrique**, *Université de Nantes*.
Mars 2014	**Séminaire Algèbre et Géométries**, *Université de Grenoble*.
Mars 2014	**Séminaire Systèmes dynamiques et géométrie**, *Université d'Angers*.
Février 2014	**Séminaire d'Analyse et Géométrie complexe**, *Université Paul Sabatier*, Toulouse.
Février 2014	**Séminaire d'Algèbre, Topologie et Géométrie**, *Université Nice Sophia Antipolis*, Nice.
Jan/Fév 2014	**Mini-cours d'introduction aux variétés OT**, *Ruhr-Universität Bochum*.
Sept. 2013	**Oberseminar komplexe Analysis**, *Ruhr-Universität Bochum*.
Avril 2013	**Géométrie et Systèmes Dynamiques**, *Université de Bourgogne*, Dijon.
Déc. 2012	**Séminaire d'Analyse et Géométrie Complexe**, *Université de Lorraine*, Nancy.
Mars 2011	**Séminaire d'Algèbre, Dynamique, Géométrie, Topologie**, *Univ. de Provence*, Marseille.
Février 2011	**Séminaire des doctorants**, *Université de Provence*, Marseille, France.

Participation à des conférences et écoles (sans exposé)

Mars 2014	**Komplex Analysis Winter Schools**, *École d'hiver au CIRM*, Marseille.
Février 2014	**Workshop bi-annuel du SFB**, Langeoog, Allemagne.
Nov. 2013	**Transformation Groups and Mathematical Physics**, *Workshop*, Jacobs University, Brême, Allemagne.
Octobre 2013	**Géométrie birationnelle des variétés algébriques complexes**, *Conférence au CIRM*, Marseille.
Janvier 2013	**Komplex Analysis Winter School**, *École d'hiver*, Toulouse.
Juillet 2011	**Birational Automorphisms of Varieties of General Type**, *École d'été*, Fribourg, Allemagne.
Février 2011	**Géométrie complexe et riemannienne**, *Conférence au CIRM*, Marseille.
Octobre 2010	**Géométrie des Variétés complexes IV**, *Conférence au CIRM*, Marseille.

Séminaires suivis

2013/2014	**Groupe de travail "Arbeitsgruppe für Matheaufgaben"**, *Ruhr-Universität Bochum*.
2013/2014	**Oberseminar komplexe Geometrie**, *Ruhr-Universität Bochum*.
2013/2014	**Oberseminar komplexe Analysis**, *Ruhr-Universität Bochum*.
2013/2014	**Oberseminar über konforme Feldtheorien**, *Ruhr-Universität Bochum*.
2008/2013	**Algèbre, Dynamique, Géométrie, Topologie**, *LATP - Université d'Aix-Marseille*.
2009/2013	**Séminaire des doctorants**, *Université d'Aix-Marseille*.

Séjours à l'étranger

Juin 2014	Invitation pour un séjour d'une semaine à l'Université d'Islande.
Juillet 2012	Invitation pour un séjour d'une semaine à l'Université de Bochum. Invitation par le Professeur P. Heinzner.

Résumé des résultats obtenus

Mes travaux portent essentiellement sur l'étude des variétés complexes compactes et je m'intéresse en particulier aux variétés non-kählériennes. Par rapport au cas projectif ou kählérien, la géométrie non-kählérienne est toujours très mystérieuse, même en dimension 2. Elle fait l'objet de recherches actives et récemment plusieurs classes d'exemples ont été introduites et étudiées.

Au cours de la préparation de ma thèse et de ma première année de postdoctorat, j'ai travaillé sur plusieurs classes de telles variétés : les surfaces de Kato, les variétés LVMB, les variétés Oeljeklaus-Toma et j'ai également construit une nouvelle classe de variétés non-kählériennes.

Surfaces de Kato - [1]

On s'intéresse ici aux surfaces complexes compactes, i.e. aux variétés complexes compactes de dimension (complexe) 2. La classification de Kodaira-Enriques les regroupe en 10 classes. L'une d'elles, la **classe $\mathbf{VII}$**, est constituée des surfaces complexes compactes qui ont leur premier nombre de Betti égal à 1 (ainsi, elles sont non-kählériennes) et dont la dimension de Kodaira est $-\infty$. Les surfaces de Kato font partie de cette classe. Elles ont été introduites dans [Kat78], rappelons brièvement leur construction :

On se donne une succession finie d'éclatements $\pi_1, ..., \pi_n$ de la boule unité ouverte B de $\mathbb{C}^2$ au-dessus de 0 et on appelle $\pi := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n : B^\pi \to B$ la composée de ces éclatements. On fixe également une application $\sigma : \overline{B} \to B^\pi$ biholomorphe sur un voisinage de $\overline{B}$. Un tel couple (π, σ) est appelé une **donnée de Kato**. On construit alors la **variété de Kato** $S(\pi, \sigma)$ en identifiant les deux bords de $\mathrm{Ann}(\pi, \sigma) := B^\pi \setminus \sigma(\overline{B})$ à l'aide de l'application $\sigma \circ \pi$.

On appelle **surface de la classe $\mathbf{VII_0}$** une surface de la classe VII qui est minimale. Le cas de ces surfaces dont le second nombre de Betti b_2 est nul est entièrement compris, ce sont des surfaces de Hopf ou des surfaces d'Inoue. Le cas $b_2 > 0$ est toujours étudié actuellement. Il a été conjecturé que ces surfaces sont toutes des surfaces de Kato. La preuve de ce résultat terminerait la classification des surfaces complexes compactes. Teleman en a donné la démonstration pour $b_2 = 1$ et 2 dans [Tel05] et [Tel10] respectivement.

Les surfaces de Kato se regroupent en trois classes : les surfaces d'Enoki, d'Inoue-Hirzebruch et enfin les surfaces intermédiaires. Étant donnée une surface de Kato minimale S, notons D le diviseur maximal de S formé des courbes rationnelles de S et $\varpi : \tilde{S} \to S$ le revêtement universel de S. Une question était de savoir si $\tilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D)$ est une variété de Stein. La réponse était connue pour le cas des surfaces d'Enoki et d'Inoue-Hirzebruch. En effet, pour une surface d'Inoue-Hirzebruch, la réponse a été donnée par Zaffran (voir [Zaf01], proposition 2.2) tandis que pour une surface d'Enoki, on a $\widetilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D) \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. En revanche, le résultat n'était pas connu pour le cas intermédiaire.

Dans [1] j'ai répondu à cette question en montrant que $\tilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D)$ est une variété de Stein lorsque S est une surface de Kato intermédiaire. L'idée est d'écrire $\tilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D)$ comme union croissante d'ouverts U_i qui sont de Stein. En général, un tel espace n'est pas de Stein, mais avec une condition supplémentaire sur chaque paire (U_i, U_{i+1}) (à savoir la densité de $\mathcal{O}(U_{i+1})|_{U_i}$ dans $\mathcal{O}(U_i)$) le résultat est vrai.

Enfin, étant donnée une surface de Kato intermédiaire, on lui associe un invariant appelé son **indice**, qui est un entier que l'on lit sur la forme normale associée au germe contractant d'application holomorphe $\varphi = \pi \circ \sigma$.

Dans la suite de [1], j'ai montré que la variété $\tilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D)$ est parallélisable (i.e. le fibré tangent est holomorphiquement trivialisable) si et seulement si son indice est égal à 1. On a ainsi des exemples de variétés de Stein parallélisables. Il est conjecturé qu'une telle variété est un domaine de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}^n$ (i.e. qu'il existe une immersion holomorphe dans $\mathbb{C}^n$).

Variétés LVMB et construction de nouvelles variétés - [2], [5], [6]

Dans la suite de mes travaux, je me suis intéressé à une construction de variétés appelées **variétés LVMB**. Mon objectif principal était de généraliser cette construction en la combinant avec une méthode due à Sankaran, ce que j'ai fait dans ma thèse. Au cours de cette étude, une nouvelle description de la construction des variétés LVMB s'est également dégagée, reposant fortement sur la théorie des variétés toriques, ce qui a donné lieu à un second article, soumis en juillet 2012 et publié en 2013 dans la revue « Mathematische Zeitschrift », sous le titre « *LVMB manifolds and quotients of toric varieties* ».

Variétés LVMB - [2]

Dans leur article [LdMV97], López de Medrano et Verjovsky on découvert une famille de variétés complexes compactes, obtenues comme quotient d'un ouvert dense U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par l'action d'un groupe de Lie complexe isomorphe à $\mathbb{C}$. Cette construction a ensuite été étendue au cas d'une action de $\mathbb{C}^m$ (où m est un entier non nul) par Meersseman dans [Mee00] et ces nouvelles variétés sont appelées **variétés LVM**.

Ensuite, Bosio a généralisé dans [Bos01] la construction de Meersseman en autorisant d'autres actions de $\mathbb{C}^m$ sur certains ouverts denses de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et les variétés qu'il obtient sont appelées **variétés LVMB**.

En résumé, étant donné une famille $\mathcal{E}_{m,n}$ de sous-ensembles de $\{0, ..., n\}$ à $2m+1$ éléments (on suppose que n et m sont des entiers non nuls avec $2m \leqslant n$) et une famille $\mathcal{L}$ de $n+1$ formes linéaires sur $\mathbb{C}^m$ satisfaisant certaines conditions, Bosio associe à $\mathcal{E}_{m,n}$ un ouvert U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et à $\mathcal{L}$ une action de $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, de telle sorte que le quotient $U/\mathbb{C}^m$ soit une variété complexe compacte. On dit que la paire $(\mathcal{E}_{m,n}, \mathcal{L})$ est une **donnée LVMB** et que c'est une **donnée LVM** si la variété obtenue est une variété LVM.

Étant donné un éventail Δ de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un ensemble de cônes polyhédraux de $\mathbb{R}^n$ (engendrés par des vecteurs d'un réseau de $\mathbb{R}^n$) satisfaisant à des conditions de compatibilité, on lui associe une **variété torique**, notée X_Δ. En résumé, on construit à partir de chaque cône σ de l'éventail Δ une sous-variété affine X_σ d'un certain $\mathbb{C}^k$ et grâce aux conditions de compatibilité entre les cônes, deux variétés X_{σ_1} et X_{σ_2} contiennent chacune une même copie d'un ouvert le long duquel on les recolle. En répétant ce procédé pour tous les cônes de l'éventail, on construit la variété X_Δ. L'espace projectif complexe est l'un des premiers exemples de variété torique.

Le cadre des variétés toriques est très commode car la donnée combinatoire de départ (l'éventail Δ) permet d'obtenir de nombreuses informations géométriques sur la variété (on peut caractériser aisément la compacité, la présence de singularités, calculer les nombres de Betti, ...). Par exemple, une variété torique X_Δ est compacte si et seulement si son éventail Δ est fini et complet, c'est-à-dire que son support $|\Delta| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier.

Le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ agit sur X_Δ avec une orbite ouverte dense isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^n$, d'où le nom de "variété torique". Le quotient de X_Δ par le sous-groupe $(\mathbb{S}^1)^n$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ est une image réelle de X_Δ, appelée la **variété à coins** de X_Δ.

La première étape de mon travail fut de reformuler la construction de Bosio en termes de géométrie torique. Il faut pour cela déterminer un éventail Δ de $\mathbb{R}^n$ tel que la variété torique associée soit l'ouvert U et voir ensuite comment la projection de cet éventail par un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $2m$ aide à comprendre l'action de $\mathbb{C}^m$ sur U.

Grossièrement parlant, l'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ correspond à l'éventail Δ et le choix des formes linéaires sur $\mathbb{C}^m$ "donne" le sous-espace $\mathbb{R}^{2m}$ de $\mathbb{R}^n$. La réciproque fonctionne également, i.e. avec des conditions adaptées sur un éventail Δ et le choix d'un sous-espace de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^n$, on obtient une donnée LVMB. Plus précisément, on a l'énoncé suivant :

Théorème 1. *i) Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée LVMB. Alors il existe une paire (E, Δ) où E est un sous-espace vectoriel de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^n$ et Δ est un sous-éventail de l'éventail $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

$a)$ la projection $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ est injective sur le support $|\Delta|$ de Δ,

$b)$ l'éventail $\pi(\Delta)$ est complet dans $\mathbb{R}^n/E$, i.e. $|\pi(\Delta)| = \mathbb{R}^n/E$.

ii) Réciproquement, étant donné une paire (E, Δ) ayant les deux propriétés ci-dessus, on obtient une donnée LVMB.

Pour la preuve de ce théorème, j'utilise la notion de variété à coins d'une variété torique que j'ai généralisée au cas d'un éventail non nécessairement rationnel. Dans ce cas, on ne peut plus associer à cet éventail une variété torique, mais il est possible de lui associer une variété à coins qui, dans le cas où l'éventail est rationnel, coïncide avec la notion originale.

Dans son article [Bos01], Bosio fournit également un critère pour décider lorsqu'une donnée LVMB est une donnée LVM ou pas. Le second objectif de mon article est de traduire ce critère dans la "version" torique de la construction, ce qui mène au théorème suivant :

Théorème 2. *Soient $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée LVMB et (E, Δ) la paire obtenue par le théorème 1. Alors, $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée LVM si et seulement si la projection par rapport à E de l'éventail Δ est un éventail polytopal.*

Un éventail est dit **polytopal** lorsqu'il est constitué des cônes engendrés par les faces d'un polytope contenant l'origine de $\mathbb{R}^n$ dans son intérieur.

Il est également possible d'utiliser ce critère pour montrer que si deux variétés LVMB, disons X et Y, sont biholomorphes et si X est une variété LVM, alors Y est aussi une variété LVM. Cette question a été posée par Cupit-Foutou et Zaffran dans [CFZ07], où une réponse partielle est fournie (ibid., remarque (ii), p. 786). On peut y répondre complètement avec le théorème suivant :

Théorème 3. *Soient $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m,n})$ et $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m',n'})$ deux données LVMB qui donnent lieu à deux variétés LVMB biholomorphes, alors $n = n'$, $m = m'$ et $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée LVM si et seulement si $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m,n})$ est une donnée LVM.*

De plus, j'ai établi que la construction de Bosio est la plus "générale" dans ce contexte, au sens du théorème suivant :

Théorème 4. *Soient $G \cong \mathbb{C}^m \subset (\mathbb{C}^*)^n$ un sous-groupe fermé et $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un ouvert tel que U/G soit une variété complexe compacte. Alors U est stable sous l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$, donc donné par un sous-éventail de l'éventail de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.*

Enfin, j'ai introduit une sorte de "généralisation" des variétés LVMB, dans le sens où il est possible de décrire cette construction en remplaçant $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par n'importe quelle variété torique.

Construction de nouvelles variétés - [5]

Ensuite, j'ai décrit dans ma thèse une construction de nouvelles variétés complexes compactes non-kählériennes en combinant une méthode due à Sankaran (introduite dans [San89]) et celle donnant les variétés LVMB. Sankaran considère un ouvert U d'une variété torique dont le quotient par un groupe discret W est une variété complexe compacte. Le groupe W est un sous-groupe du groupe des unités d'un corps de nombres choisi comme point de départ.

Ici, on commence une fois encore par choisir un corps de nombres K avec $s > 0$ et $2t > 0$ plongements réels et complexes respectivement. On munit une certaine variété torique Y de l'action d'un sous-groupe de Lie

$G \cong \mathbb{C}^t$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ de sorte que le quotient X de Y par G soit une variété complexe, qui est non compacte en général. La deuxième étape consiste à considérer le quotient d'un ouvert U de X par un groupe discret W de rang $b \in \{1, ..., s-1\}$ similaire à celui intervenant dans la méthode de Sankaran. On note Z le quotient U/W.

La variété X possède un ouvert dense qui est un groupe de Cousin (i.e. un groupe de Lie complexe ne possédant pas de fonction holomorphe non constante), c'est le quotient de $(\mathbb{C}^*)^n$ par G. Ce renseignement est crucial pour comprendre la géométrie de la variété Z. Ainsi on peut démontrer qu'elle est de dimension de Kodaira égale à $-\infty$ et qu'elle est non-kählérienne. Il est à noter que les cas "limites" $b = 0$, $b = s$ et $H = \{0\}$ correspondent respectivement aux variétés LVMB, OT et de Sankaran.

Récemment j'ai également obtenu d'autres invariants, notamment le second nombre de Betti b_2 de ces variétés avec une hypothèse technique peu restrictive et ai démontré dans ce cas que leur dimension algébrique est nulle. Ces résultats font l'objet de l'article [5].

Grâce à l'utilisation des variétés à coins, il est possible d'exprimer de façon concrète un domaine fondamental compact dans U pour l'action du groupe W, ce que Sankaran évoque dans [San89], sans le faire (il obtient la compacité en regardant les groupes de cohomologie). Pour décrire le domaine fondamental, ce qui ne lui semblait pas réalisable en général, il est nécessaire d'avoir une présentation adéquate de la variété à coins.

Cette nouvelle classe de variétés unifie la construction des variétés de Sankaran, des variétés LVMB et également des variétés OT (définies au paragraphe suivant). Pour étudier ces nouveaux espaces, des apports techniques importants ont été réalisés, qui souvent s'appliquent aux classes des variétés généralisées. Cependant, de nombreuses propriétés géométriques restent à étudier. Je renvoie pour cela à la partie "Projet de recherche".

Variétés OT - [3], [4], [5], [7]

Enfin, j'ai porté mon attention sur les variétés OT. Il s'agit d'une autre classe de variétés non-kählériennes, pour lesquelles nous avons établi avec K. Oeljeklaus que leur dimension algébrique est nulle ([3]).

Les variétés OT ont été construites par Oeljeklaus et Toma dans [OT05]. Cette famille de variétés englobe les surfaces d'Inoue, qui sont des surfaces de la classe VII. Elles sont obtenues de la façon suivante : on considère tout d'abord un corps de nombres K de degré $n = s + 2t$ sur $\mathbb{Q}$ (où $s > 0$ et $2t > 0$ sont respectivement le nombre de plongements réels et complexes de K). On appelle $\sigma_1, ..., \sigma_s$ les plongements réels et $\sigma_{s+1}, ..., \sigma_n$ les plongements complexes de K, numérotés de telle sorte que $\sigma_{s+j} = \overline{\sigma_{s+t+j}}$ pour $j \in \{1, ..., t\}$ et enfin on définit $\sigma : K \to \mathbb{C}^m$ (où $m := s + t$) par $\sigma(k) := (\sigma_1(k), ..., \sigma_m(k))$. On considère le quotient de l'ouvert $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ de $\mathbb{C}^m$ par le produit semi-direct du réseau $\sigma(\mathcal{O}_K)$ des entiers de K et d'un sous-groupe U de $\mathcal{O}_K^*$ bien choisi. On note alors $X(K, U)$ cet espace, qu'on appelle une **variété OT**.

Afin d'établir que la dimension algébrique des variétés OT est nulle, j'ai tout d'abord étendu des résultats de Vogt issus de [Vog82] concernant les fibrés en droites holomorphes au-dessus de groupes de Cousin. Le principal résultat est qu'un tel fibré topologiquement trivial est holomorphiquement trivial si et seulement si il admet une section non nulle. Ce résultat se généralise au cas d'un ouvert d'un groupe de Cousin, stable par le sous-groupe maximal compact de ce groupe. On peut alors l'appliquer à $(\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/\sigma(\mathcal{O}_K)$, qui est un tel ouvert. C'est l'objet de la première partie de l'article [3].

Les variétés OT n'admettent pas de métriques kählériennes. On peut toutefois s'intéresser à une définition un peu moins restrictive, celle de métrique **localement conformément kählérienne** (LCK). Une variété complexe M admet une telle métrique s'il existe une métrique kählérienne ω sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M et une représentation $\rho : \pi_1(M) \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que pour tout $g \in \pi_1(M)$, on ait $g^*\omega = \rho(g)\omega$. Les surfaces de Hopf sont des exemples de telles variétés.

Récemment j'ai donné une caractérisation de l'existence de métriques LCK sur ces variétés, qui se formule en un problème de théorie des nombres. Ceci a mené à une discussion avec le Professeur Dubickas qui a répondu en partie à la question dans l'article principal de [4], à paraître dans le New York Journal of Mathematics.

Le critère d'existence d'une métrique LCK sur une variété OT figure dans l'appendice ([4]) que j'ai rédigé pour son article, ainsi qu'une reformulation de l'une des preuves de l'article principal en utilisant les propriétés géométriques des variétés OT (leur non-kählérianité).

Il y a peu, j'ai également obtenu le second nombre de Betti des variétés OT avec une hypothèse plus faible que ce qui était déjà connu depuis 2005. Cette nouvelle condition est par exemple toujours satisfaite lorsque le degré du corps de nombres K est impair. De façon analogue au cas des nouvelles variétés construites dans [5], cette hypothèse est l'existence d'une unité non réciproque dans le groupe discret U par lequel on quotiente. La démonstration se trouve également dans [5].

Projet de recherche

Nouvelles variétés
Pour ce qui est des nouvelles variétés construites dans [5], il reste de nombreux invariants à déterminer, notamment la cohomologie de Dolbeault, et bien d'autres propriétés géométriques et topologiques à explorer (feuilletages, existence de métriques, déformations...).

Certaines des techniques développées pourront s'adapter en grande partie au cas des variétés LVMB, OT ou aux variétés de Sankaran comme cela s'est déjà produit. On peut s'attendre à utiliser une fois encore très fortement les propriétés du corps de nombres choisi comme point de départ. On aboutira ainsi à de nouvelles formulations de ces problèmes en termes de théorie des nombres.

À court terme, je souhaite entièrement déterminer la dimension algébrique de ces espaces, car actuellement je ne l'ai calculée dans [5] qu'à la condition d'utiliser une hypothèse technique, à savoir l'existence d'une unité non-réciproque dans le groupe W, voir page 12 pour les notations. Bien que cette condition soit peu restrictive (elle est par exemple satisfaite dès que le degré du corps de nombres choisi est impair), j'ai pour objectif d'obtenir un énoncé sans cette hypothèse.

Ensuite, j'aborderai en détails la question de l'existence d'une métrique LCK sur ces variétés. On ne peut pour l'instant obtenir que des résultats partiels en utilisant les mêmes méthodes que pour les variétés OT et il va falloir développer de nouvelles méthodes. Le premier obstacle est que, à l'inverse du cas des variétés OT, la structure du revêtement universel est un peu plus compliquée. Dans le cas des variétés OT, il s'agit du produit cartésien $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$, tandis que dans le cas de ces nouvelles variétés, on a un revêtement analogue (i.e. $\mathbb{H}^b \times \mathbb{C}^{s-b+t}$) uniquement au-dessus d'un ouvert dense. J'ai déjà des résultats partiels, qui sont une sorte d'extension du cas des variétés OT. Le revêtement universel de la variété est un ouvert d'une variété torique, ce qui reste un cadre dans lequel il est agréable de travailler. Les diviseurs sont des variétés LVMB "généralisées" au sens introduit dans [2].

Enfin, comme indiqué plus haut, dans les cas "limites" pour la construction des nouvelles variétés on retrouve les variétés LVMB, OT et de Sankaran. En particulier, pour les variétés de Sankaran il convient de remplacer l'espace vectoriel $H \cong \mathbb{C}^t$ par $\{0\}$. Une généralisation naturelle est d'étudier les espaces que l'on obtient en remplaçant H par un sous-espace dont la dimension complexe est comprise entre 1 et $t-1$.

Variétés OT
Les variétés OT sont activement étudiées pour explorer leurs propriétés géométriques : [Kas13], [Ver13], [PV12], [Ver11], [OV11], sont des exemples d'articles récents.

Bien que l'on ait à présent un critère pour l'existence d'une métrique LCK sur ces variétés (démontré dans [4]), on ne sait actuellement toujours pas s'il existe des exemples de variétés OT satisfaisant cette condition, autres que dans le cas où $t = 1$. La réponse paraît être négative d'après les résultats obtenus par A. Dubickas et c'est ce que j'essaye de démontrer. Intuitivement, le fait d'admettre une métrique LCK est extrêmement restrictif sur le corps de nombres K de départ. Par exemple, s'il est de degré impair (avec $t \geqslant 2$), Dubickas a montré que le corps K ne peut jamais satisfaire à ces conditions et ainsi la variété OT associée n'est pas LCK.

Un problème qui prolonge naturellement la question de la dimension algébrique est d'étudier les sous-variétés d'une variété OT. Dans [Ver11] et [Ver13] il est démontré que les variétés OT ne contiennent aucune sous-variété compacte de dimension 1 ou 2 respectivement, sauf éventuellement des surfaces d'Inoue. Dans [OV11] il est établi que les variétés OT avec $t = 1$ n'admettent pas de sous-variété complexe. Une conjecture est que les seules sous-variétés d'une variété OT sont encore des variétés OT.

Variétés LVMB
Dans [Bos01] et [CFZ07], des caractérisations des variétés LVM parmi les variétés LVMB sont données. Cela étant, l'une des caractérisations données dans [CFZ07] nécessite une hypothèse supplémentaire, appelée

“condition (K)”. Cette condition signifie que les coefficients des formes linéaires de la famille $\mathcal{L}$ sont rationnels (les notations sont introduites à la page 11). Grâce à la nouvelle description donnée dans [2], il a été possible de généraliser ce résultat en ôtant cette hypothèse de rationnalité des coefficients des formes linéaires.

On sait que toute variété LVM possède un feuilletage transversalement Kähler et c'est, toujours avec la condition (K), une autre caractérisation des variétés LVM parmi les variétés LVMB qui a été démontrée dans [CFZ07]. Dans ce même article, il est conjecturé que la généralisation de cette caractérisation sans la condition (K) est vraie. Avec le nouveau cadre de travail et les outils introduits dans ma thèse, il est possible d'aborder le problème sous un autre angle. J'espère ainsi pouvoir supprimer cette hypothèse dans l'énoncé de la caractérisation. J'y travaille actuellement.

Il sera également intéressant d'étudier une “généralisation” des variétés LVMB (reprenant la même construction, mais en remplaçant l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par une autre variété torique compacte) ; il est naturel de se demander quelles sont les propriétés vérifiées par ces variétés et si ce sont déjà d'autres espaces connus. Il est à noter que les diviseurs des nouvelles variétés que j'ai construites sont toujours de tels espaces.

Un problème que je n'ai pas encore considéré est celui de l'étude des groupes d'automorphismes des variétés LVMB.

Enfin, je travaille avec S. Cupit-Foutou et V. Tsanov (Bochum) sur une autre généralisation de la construction des variétés LVMB en se plaçant dans un cadre un peu différent. Cette fois-ci ce sont des variétés sphériques qui prendront le rôle des variétés toriques.

Variétés à coins
Une partie importante de mes travaux est consacrée à l'étude de quotients non kählériens de variétés toriques sous l'action de groupes de Lie complexes. Dans le cas des variétés LVMB et de la nouvelle classe de variétés introduites dans [5], cette étude fait intervenir la généralisation de la notion de “variété à coins” associée à un éventail, obtenue en ôtant l'hypothèse de rationnalité de l'éventail, introduite dans ma thèse.

Tout d'abord il est possible d'établir de nombreux résultats concernant la topologie des variétés à coins “généralisées” en prolongeant le cas torique. Ensuite, l'un des problèmes à considérer est de regarder si les espaces construits possèdent une structure semi-algébrique (c'est *a priori* le cas, mais cette question reste à étudier).

Surfaces de Kato
L'étude des surfaces de Stein provenant des surfaces de Kato fournit une classe d'exemples de variétés de Stein parallélisables.

Un problème actuellement ouvert ([For03]) est de savoir si toute variété de Stein parallélisable est un domaine de Riemann, i.e. s'il existe une immersion holomorphe d'une telle variété de dimension n dans $\mathbb{C}^n$.

Les exemples étudiés dans [1] sont intéressants car la question de savoir si ce sont des domaines de Riemann ou non n'est pas encore résolue. Dans tous les cas, la réponse présentera un intérêt puisque cette famille d'exemples pourrait soit répondre négativement au problème, ou bien la démonstration du fait que ce sont des domaines de Riemann pourrait mener à une preuve plus générale.

Variétés Oka
Une variété complexe M est une **variété Oka** si toute application holomorphe f définie sur un (voisinage d'un) compact de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans M peut être approchée uniformément sur K par des applications entières à valeurs dans M. Par exemple, les groupes de Lie complexes sont des variétés Oka, tandis que le théorème de Picard entraîne que $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ n'est pas Oka. Plus généralement, les seules variétés complexes de dimension 1

qui sont des variétés Oka sont $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou les tores.

Cette définition a pour origine un article de Gromov ([Gro89]) et a été introduite par Forstnerič dans [For09], qui étudie intensivement ces espaces depuis. On renvoie à [For11] et [FL11] pour des caractérisations équivalentes, des propriétés des variétés Oka et également une liste de problèmes ouverts actuellement.

L'un des problèmes encore non résolus est de savoir si $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ (pour $n \geqslant 2$) est une variété Oka. Avec S. Trivedi (postdoctorant à Cracovie) nous explorons actuellement une nouvelle direction pour tenter de décider si $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ est, ou non, Oka. Le point de départ de notre réflexion est l'article [Win98] de Winkelmann discutant d'un théorème de Mergelyan pour $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$.

En général, il est possible grâce au théorème d'Oka-Weil d'approcher sur un compact convexe K de $\mathbb{C}^n$ une application f holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$, mais "seulement" par une application entière à valeurs dans $\mathbb{C}^2$. Dans son article, Winkelmann parvient à contrôler les applications entières sur $\mathbb{C}$ approchant la fonction de départ pour qu'elles restent à valeurs dans $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$. Pour ce faire il a recourt à un théorème d'Arakelyan pour approcher des fonctions continues sur des sous-ensembles fermés (non-nécessairement bornés) de $\mathbb{C}$ par des fonctions entières. Des analogues de ce résultat existent en dimension plus grande, mais ils ne s'appliquent pas directement à notre cadre. Notre objectif est d'essayer d'obtenir un théorème d'approximation pour cette situation et ainsi adapter la preuve de Winkelmann en dimension plus grande.

Références

[Bos01] F. Bosio. Variétés complexes compactes : une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) :1259–1297, 2001.

[CFZ07] S. Cupit-Foutou and D. Zaffran. Non-Kähler manifolds and GIT-quotients. *Math. Z.*, 257(4) :783–797, 2007.

[FL11] F. Forstnerič and F. Lárusson. Survey of Oka theory. *New York J. Math.*, 17A :11–38, 2011.

[For03] F. Forstnerič. Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds. *Acta Math.*, 191(2) :143–189, 2003.

[For09] F. Forstnerič. Oka manifolds. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(17-18) :1017–1020, 2009.

[For11] F. Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings*, volume 56 of *Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, 2011.

[Gro89] M. Gromov. Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4) :851–897, 1989.

[Kas13] H. Kasuya. Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 45(1) :15–26, 2013.

[Kat78] Ma. Kato. Compact complex manifolds containing "global" spherical shells. *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo*, pages 45–84, 1978.

[LdMV97] S. López de Medrano and A. Verjovsky. A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 28(2) :253–269, 1997.

[Mee00] L. Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. *Math. Ann.*, 317(1) :79–115, 2000.

[OT05] K. Oeljeklaus and M. Toma. Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(1) :161–171, 2005.

[OV11] L. Ornea and M. Verbitsky. Oeljeklaus-Toma manifolds admitting no complex subvarieties. *Math. Res. Lett.*, 18 :747–754, 2011.

[PV12] M. Parton and V. Vuletescu. Examples of non-trivial rank in locally conformal Kähler geometry. *Math. Z.*, 270(1-2) :179–187, 2012.

[San89] G. K. Sankaran. A class of non-Kähler complex manifolds. *Tohoku Math. J. (2)*, 41(1) :43–64, 1989.

[Tel05] A. Teleman. Donaldson theory on non-Kählerian surfaces and class VII surfaces with $b_2 = 1$. *Invent. Math.*, 162(3) :493–521, 2005.

[Tel10] A. Teleman. Instantons and curves on class VII surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 172(3) :1749–1804, 2010.

[Ver11] S. Verbitsky. Curves on Oeljeklaus-Toma manifolds. *Preprint at Arxiv :1111.3828.*, 2011.

[Ver13] S. Verbitsky. Surfaces on Oeljeklaus-Toma manifolds. *Preprint at Arxiv :1306.2456.*, 2013.

[Vog82] C. Vogt. Line bundles on toroidal groups. *J. Reine Angew. Math.*, 335 :197–215, 1982.

[Win98] J. Winkelmann. A Mergelyan theorem for mappings to $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$. *J. Geom. Anal.*, 8(2) :335–340, 1998.

[Zaf01] D. Zaffran. Serre problem and Inoue-Hirzebruch surfaces. *Math. Ann.*, 319(2) :395–420, 2001.