Prof. Dr. Jörg Winkelmann WS 2008/2009

Übungen zur Vorlesung Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1.

$z \mapsto \bar{z}$ bezeichne die komplexe Konjugation (d.h. $\overline{x+iy} = x - iy$ für $x, y \in \mathbf{R}$.)
Man zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}$$

eine Untergruppe von $GL_2(\mathbf{C})$ bildet.

Aufgabe 2.

Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit Koeffizienten a_{ij} heißt "obere Dreiecksmatrix" wenn $a_{ij} = 0$ für alle $j < i$.
Man zeige: Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wiederum eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 3.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit Dualraum V^* und sei V^{**} der Dualraum von V^*. Man erhält eine Abbildung ζ von V nach V^{**}, indem man jedem Element $v \in V$ die durch $\lambda \mapsto \lambda(v)$ gegebene lineare Abbildung von V^* nach K zuordnet.
Man zeige:
ζ is injektiv. Falls V endlich-dimensional ist, ist ζ sogar bijektiv.

Aufgabe (*).

Freiwillige Zusatzaufgabe. Sei K ein Körper mit einem Element λ sodass $x^2 \neq \lambda \ \forall x \in K$. Sei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

und

$$L = \{A \in M(2 \times 2, K) : AP = PA\}.$$

Man zeige, daß L (bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen) einen Körper bildet.

Abgabe: Dienstag, den 16. 12. 2008, vor der Vorlesung.

Hinweise: Bitte Namen und Übungsgruppe auf jedem Blatt. Maximal 3 Namen zusammen.
Für jede Aufgabe ein separates Blatt. Verschiedene Aufgaben *nicht* zusammenheften.