Prof. Dr. Jörg Winkelmann WS 2008/2009

Übungen zur Vorlesung Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1.

Es sei V ein Vektorraum über einen Körper K und $W \subset V$ ein echter Untervektorraum ("echt" bedeutet hier: $W \neq V$).

1. Man zeige dass es eine Basis B von V mit $B \subset V \setminus W$ gibt,
2. Es seien W_1, W_2 echte Untervektorräume von V.
   Gibt es eine Basis B mit $B \subset V \setminus (W_1 \cup W_2)$?

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen A mit reellen Koeffizienten für die

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 3.

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 23 & 42 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Produkte $A_i \cdot A_j$ $(1 \leq i, j \leq 4)$, die definiert sind.

Aufgabe (∗).

Freiwillige Zusatzaufgabe. Es sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$ und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Des weiteren sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = id$.
Man zeige:

$$V = \ker(f - id) \oplus \ker(f + id)$$

Hinweis: Zeige zuerst $\ker((f - id) \circ (f + id)) = V$.

Abgabe: Dienstag, den 9. 12. 2008, vor der Vorlesung.

Hinweise: Bitte Namen und Übungsgruppe auf jedem Blatt. Maximal 3 Namen zusammen.
Für jede Aufgabe ein separates Blatt. Verschiedene Aufgaben *nicht* zusammenheften.