MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 9-
11.12.07

Gewöhnliche Differentialgleichungen

34. (HA, 4 Punkte) Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $y' = f(t, y)$ wobei f auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erkärt und dort stetig sei. Weiter sei f lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variablen.

    (a) Sei $\lambda(t; t_0, \xi_0)$ allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung. Zeigen Sie: $\lambda(t; t, \xi) = \xi$ und $\lambda(t; s\lambda(s; t_0, \xi_0)) = \lambda(t; t_0, \xi_0)$ für alle t, ξ_0, s, t_0, für die die jeweiligen Ausdrücke definiert sind.

    (b) Welche der folgenden Funktionen $\lambda_i(t; \tau, \xi)$ sind allgemeine Lösung einer Differentialgleichung?

$$\lambda_1(t; \tau, \xi) = \xi e^{t-\tau}, \quad \lambda_2(t; \tau, \xi) = \xi e^{t+\tau}, \quad \lambda_3(t; \tau, \xi) = \xi e^{(t-\tau)^2}$$

35. (HA, St.ex. (gekürzt), 4 Punkte) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), y(0) = 1,$$

wobei f durch

$$f(x, y) := \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^2$ erklärt ist. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt ein Intervall $[-a, a]$ mit $a > 0$, auf dem eine eindeutig bestimmte Lösung existiert.

    (b) Diese Lösung ist eine gerade Funktion.

    (c) Sie besitzt keine Nullstellen.

36. (ÜA) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei $x_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $x' = f(x)$. Die Folge $x_n(0)$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass eine Teilfolge der Folge (x_n) gleichmäßig gegen eine Lösung von $x' = f(x)$ konvergiert. (*Hinweis*: Satz von Arzelà-Ascoli.)

37. (ÜA) Zeigen Sie, dass die Polynome $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$ Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ sind.

Zu bearbeiten bis: 18.12.07