Gewöhnliche Differentialgleichungen

22. (HA) Es sei $A \in C(]0,1[,\mathbb{R}^{n\times n}), b \in C(]0,1[,\mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie das lineare System

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + b(t) \quad \text{auf }]0,1[\\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

wobei für eine geeignete über das Intervall $[0,1]$ integrierbare Funktion k die Ungleichung $\|A(t)\|_\infty + \|b(t)\|_\infty \le k(t)$ für $t \in]0,1[$ erfüllt sei. Zeigen Sie, dass die übliche PICARD-Iteration gegen eine Lösung $y \in C([0,1[,\mathbb{R}^n) \cap C^1(]0,1[,\mathbb{R}^n)$ des Systems konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie für $n \ge 0$ und $t \in [0,1]$

$$\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\|_\infty \le \frac{1}{(n+1)!}(\|y_0\|_\infty + 1)\left(\int_{t_0}^{t_1} k(r)dr\right)^{n+1},$$

vgl. auch Aufgabe 20.

23. (HA) Es seien a, b, c auf einem Intervall I stetige Funktionen.
    (a) Zeigen Sie, dass man jede Bernoulli'sche Differentialgleichung $\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit Hilfe der Transformation $y = x^{1-\alpha}$ in eine lineare Differentialgleichung überführen kann.
    (b) Zeigen Sie: Kennt man eine Lösung μ der Riccati'schen Differentialgleichung $\dot{x} = a+bx+cx^2$, so kann man die allgemeine Lösung bestimmen, indem man die Gleichung mit Hilfe der Transformation $y = x - \mu$ in eine Bernoulli'sche Differentialgleichung überführt.

24. (ÜA) Erraten Sie jeweils eine Lösung der Riccati'schen Differentialgleichungen
    (a) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$,
    (b) $y' = y^2 + (2x + x^{-1})y + x^2$

    auf $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und bestimmen Sie dann jeweils die Lösungsgesamtheit.

25. (ÜA, ein Vergleichssatz) Zeigen Sie:
    (a) Ist $h \in C^1([t_0,t_1]))$ mit $h(t_0) = 0$ und gilt $h'(t) \le L|h(t)|$ für $t \in [t_0,t_1]$ und ein $L > 0$, so ist $h(t) \le 0$ für $t \in [t_0,t_1]$.
    (b) Seien $f, g\colon I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, g lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument; sei $[t_0,t_1[\subset I$. Zeigen Sie: Sind $y, z \in C^1([t_0,t_1[)$ Lösungen von

    $$\dot{y} = f(t,y), \quad \dot{z} = g(t,z), \quad y(t_0) = z(t_0),$$

    und gilt $f \le g$ auf $I \times \mathbb{R}$, dann folgt $y \le z$ auf $[t_0,t_1]$.

Zu bearbeiten bis: 27.11.07