

Gewöhnliche Differentialgleichungen

18. (HA) Betrachtet werde das AWP $y' = y + y^3; y(0) = y_0$.
- (a) Bestimmen Sie die Lösung $y(\cdot, y_0)$ dieses AWP's explizit.
 - (b) Bestimmen Sie die Länge $T_{max}(y_0)$ des maximalen Vorwärtsexistenzintervalls $I_{max}(y_0) = [0, T_{max}(y_0)[$ in Abhängigkeit von y_0 .
 - (c) Sei $t^* > 0$ fix. Geben Sie ein maximales $\epsilon > 0$ an, sodass $t^* \in \bigcap_{|y_0| < \epsilon} I_{max}(y_0)$.
19. (HA) Zeigen Sie, dass der in Aufgabe 15 eingeführte Vektorraum X_λ mit der zugehörigen Norm $\|\cdot\|_{X_\lambda}$ ein Banachraum ist. Interpretieren Sie nun das in Aufgabe 15 erzielte Ergebnis.
20. (ÜA) Sei $k \in C([0, 1])$ über das Intervall $[0, 1]$ integrierbar. Zeigen Sie, dass für $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{n+1} \left(\int_0^t k(r) dr \right)^{n+1} = \int_0^t k(r) \left(\int_0^r k(s) ds \right)^n dr$$

gilt.

21. (ÜA, St.ex.) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y(x) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Durch eine Transformation $y(x) = x^\rho z(x)$ mit einem geeignet zu wählenden $\rho \in \mathbb{R}$ bestimme man für z aus (1) eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Mit ihrer Hilfe ermittle man alle Lösungen von (1), die für $x \rightarrow +0$ beschränkt bleiben.

(*Hinweis:* Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $u'' = -u$ ist durch $u(x) = A \cos x + B \sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$ gegeben.)

Zu bearbeiten bis: 20.11.07