MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 4-
06.11.07

Gewöhnliche Differentialgleichungen

14. (HA) Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = ay + b$ mit auf dem Intervall I stetigen Funktionen a und b.

    (a) Bestimmen Sie mittels Trennung der Veränderlichen eine nichttriviale Lösung m von $y' = ay$.

    (b) Lösen Sie die inhomogene Gleichung $y' = ay + b$ durch den Ansatz $y(x) = m(x)c(x)$.

    (c) Finden Sie sämtliche Lösungen der Differentialgleichung $y' + y \sin x = \sin 2x$.

15. (HA) Es seien $y_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon [0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(.,0) = 0$. Es gebe ein $L \in \mathbb{R}$, so dass

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall t \in [0,\infty[, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon X_\lambda \to X_\lambda, \quad y \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_0^x f(t, y(t))dt \right)$$

wobei

$$X_\lambda := \{\varphi \in C([0,\infty[, \mathbb{R}^n) : \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)e^{-\lambda t}| < \infty\}, \quad \|\varphi\|_{X_\lambda} := \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)e^{-\lambda t}|$$

bei geeigneter Wahl von $\lambda > 0$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist.

16. (ÜA) Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \begin{cases} y \ln y & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

    (a) An genau welchen Punkten ist f stetig bzw. lokal Lipschitz-stetig?

    (b) Für genau welche $y_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

    lokal lösbar? Ist die Lösung auch eindeutig?

17. (ÜA, St.ex.) Bestimmen Sie jene Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) = t + e^{-5t},$$

die der Bedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ genügt.

Zu bearbeiten bis: 13.11.07