MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 11-
08.01.08

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

42. (a) Es sei $H\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ein Differentialgleichungssystem der Form

$$p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots p_n), \quad q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots p_n) \tag{1}$$

$(i = 1,\ldots n)$ heißt *hamiltonsch* (mit *Hamiltonfunktion* $H$). Zeigen Sie, dass $H$ längs Lösungen konstant ist.

(b) Vorgelegt sei das Volterra-Lotka-System

$$\dot{x} = ax - bxy, \qquad \dot{y} = bxy - cy \tag{2}$$

wobei $a, b, c$ positive reelle Parameter seien und $x, y \geq 0$ angenommen werde. Führen Sie vermöge $p = \ln x, q = \ln y$ neue Variablen ein und transformieren Sie das Differentialgleichungssystem.

(c) Zeigen Sie, dass das in (b) erhaltene System hamiltonsch ist und geben Sie eine Hamiltonfunktion $H$ an.

(d) Finden Sie eine nichttriviale Funktion $F$, welche längs Lösungen von (2) konstant ist (so ein $F$ nennt man auch ein *erstes Integral*).

43. (HA) Für die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten auf einem abgeschlossenen Intervall $I$ zeige man:

(a) Jede von Null verschiedene Lösung hat nur einfache Nullstellen und die Menge ihrer Nullstellen hat keinen Häufungspunkt in $I$.

(b) Ist $(\varphi, \psi)$ ein Fundamentalsystem, so liegt zwischen je zwei Nullstellen von $\varphi$ eine Nullstelle von $\psi$. (Betrachten Sie $W = \varphi'\psi - \varphi\psi'$.)

44. (ÜA, St.ex.) Gegeben sei eine stetige Abbildung $t \mapsto A(t), t \in \mathbb{R}$, in die Menge $M(n, \mathbb{R})$ aller reellen $n \times n$-Matrizen. Die Abbildung sei periodisch mit der Periode $p > 0$. Sei $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $x' = A(t)x$ und sei $W(t)$ die Matrix mit den Spalten $x^1(t), \ldots, x^n(t)$. Man zeige:

(a) $\tilde{W}(t) := W(t + p)$ ist ebenfalls ein Fundamentalsystem von $x' = A(t)x$.

(b) Es existiert eine invertierbare Matrix $C \in M(n, \mathbb{R})$ mit $\tilde{W}(t) = W(t)C$ für alle $t$. Man gebe $C$ an.

(c) Zu jedem (reellen) Eigenwert $\lambda$ von $C$ gibt es eine von Null verschiedene Lösung $x$ des Differentialgleichungssystems $x' = A(t)x$ mit $x(t + p) = \lambda x(t)$.

45. (ÜA) Es sei $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares divergenzfreies Vektorfeld, d.h. $\sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$. Betrachtet werde die Flussabbildung $\Phi_t(x)$ zur Differentialgleichung $\dot{x} = v(x)$. Nehmen Sie an, dass $\Phi$ bzgl. $x$ stetig differenzierbar ist und zeigen Sie, dass $\det D_{(x)}\Phi_t(x) = 1$ für alle $t$.

**Zu bearbeiten bis:** 15.01.08