MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 10-
18.12.07

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

38. (HA, 4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabe 35 auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

39. (HA, 4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gegeben sei das autonome System $\dot{x} = f(x)$ mit zugehöriger Flussabbildung $\varphi$. Ist $\xi \in G$, so setzt man

$$L_\omega(\xi) := \begin{cases} \{a \in G \mid \exists t_n \to \infty\colon \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, \xi) = a\} & \text{falls } I^+_{max}(\xi) = [0, \infty[ \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) Gehören $x$ und $z$ zur gleichen Trajektorie, so gilt $L_\omega(x) = L_\omega(z)$.

(b) Ist $D \subset G$ abgeschlossen in $G$ (also $G \setminus D$ ist offen in $\mathbb{R}^n$) und positiv invariant, d.h. gilt
$$\xi \in D \Rightarrow \forall t \in I^+_{max}(\xi)\colon \varphi(t, \xi) \in D,$$
so ist $L_\omega(z) \subset D$ für alle $z \in D$.

(c) $L_\omega(\xi)$ ist positiv invariant und abgeschlossen in $G$.

40. (ÜA, 4 Zusatzpunkte, St.ex.) Auf dem Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$ sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - y - ax) \\ \dot{y} &= y(-1 + x) \end{aligned}$$

gegeben, wobei $0 < a < \frac{1}{2}$ sei. Zeigen Sie, dass das gegebene System keine Lösung besitzt, die periodisch und nicht konstant ist. *Hinweis:* Betrachten Sie $V(x, y) = x - \log x + y - (1 - a) \log y$ längs einer Lösung $(x, y)$.

41. (ÜA, 4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 37 eingeführten Polynome $P_n$ ein Orthogonalsystem in $L^2([-1, 1])$ bilden. Bestimmen Sie auch $\|P_n\|_{L^2([-1,1])}$.

**Bitte beachten:** *Auf diesem Blatt können bis zu acht Zusatzpunkte erarbeitet werden. Des Weiteren wünschen wir allen Teilnehmern ein frohes Weihnachtsfest und einen erquickenden Jahreswechsel.*

**Zu bearbeiten bis:** 08.01.08