MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS07/08
-Blatt 1-
16.10.07

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Für Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sei $|A| := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ handelt und dass $|AB| \leq |A||B|$ und $|Ax| \leq |A||x|$ für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{K}^n$.

   (b) Es seien $C, C_0, C_1, \ldots \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $C = (c_{ij}), C_k = (c_{ij}^k)$. Zeigen Sie
   $$\lim_{k\to\infty} |(C_0 + \cdots + C_k) - C| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\colon \sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k = c_{ij}.$$
   In diesem Fall schreibt man $C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$.

   (c) Zeigen Sie (Bezeichnungen wie in (b)):
   $$\sum_{k=0}^{\infty} |C_k| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\colon \sum_{k=0}^{\infty} |c_{ij}^k| < \infty.$$
   In diesem Fall sagt man, die Reihe $\sum_k C_k$ konvergiere absolut.

2. Bestimmen Sie je eine Lösung zu folgenden Differentialgleichungen, in dem Sie *Ansätze vom Typ der rechten Seite* wählen (oder raten Sie richtig).

   (a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x + xe^x$
   (b) $y''(x) + y(x) = 1 + x$
   (c) $y''(x) + y'(x) = 1 + x$
   (d) $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$
   (e) $y'''(x) - y''(x) = 5x + 3$

3. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n, f\colon A \to \mathbb{R}$ und es gelte
   $$\mathrm{Lip}_A(f) := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in A, x \neq y\right\} < \infty.$$
   Zeigen Sie, dass durch $\tilde{f}(x) := \inf\{f(a) + \mathrm{Lip}_A(f)|x - a| : a \in A\}$ eine Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklärt wird mit

   (a) $\tilde{f} = f$ auf A
   (b) $\mathrm{Lip}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{f}) \leq \mathrm{Lip}_A(f)$.

4. Es sei $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $v(x) > x^2$. Zeigen Sie, dass es keine auf ganz $\mathbb{R}$ erklärte differenzierbare Funktion x gibt, die der Beziehung $x'(t) = v(x(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genügt. (*Hinweis:* Betrachten Sie $y(t) = -\frac{1}{x(t)}$.)

Zu bearbeiten bis: 23.10.07, vor der Vorlesung