Prof. Dr. Jörg Winkelmann SS 2008

Übungen zur Vorlesung Algebraische Kurven

8. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei R ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal m und $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: $m^n \neq m^{n+1}$, falls $m^n \neq \{0\}$.

Aufgabe 2. Seien $(a, b) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $L = \{(x, y) : ax - by = 0\}$ und sei C die durch ein Polynom $P \in K[X, Y]$ mit $P(0, 0) = 0$ gegebene Kurve.
Zeigen Sie:
$I((0, 0), P, ax - by)$ ist gleich der Vielfachheit der Nullstelle 0 des durch $t \mapsto Q(t) = P(bt, at)$ gegebenen Polynoms.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, I ein Ideal in $K[X, Y]$, $p \in K^2$ sodass $R = \mathcal{O}_p / I\mathcal{O}_p$ als K-Vektorraum endlich-dimensional ist.
Zeigen Sie:
Die natürliche Abbildung von $K[X, Y]$ nach R ist surjektiv.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und S ein multiplikatives System.
Zeigen Sie: Wenn R noethersch ist, dann auch $S^{-1}R$.
Folgern Sie: Für jeden Punkt $p \in K^n$ (wobei K ein Körper ist), ist der lokale Ring $\mathcal{O}_p$ noethersch.

Abgabe: 23. Juni 2008