Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 16. Juni 2000

1. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $<\,,\,>$ und Norm $||v|| = \sqrt{<v,v>}$. Zeige, dass die durch $v \mapsto <v,v>$ gegebene Abbildung differenzierbar ist, und bestimme das Differential.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{K}$ die Menge der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass durch

$$\delta(K,L) = \max\left\{\max_{x\in K}\{d(x,L)\}, \max_{x\in L}\{d(x,K)\}\right\}$$

mit $d(x,K) = \min_{y\in K} d(x,y)$ eine Metrik δ auf $\mathcal{K}$ definiert wird.

3. Berechne die Krümmung der "Zykloide" $\gamma : t \mapsto 23(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

4. Können die Vektorfelder $(3x^2 + xy, xy)$ und $(y, 0)$ auf $\mathbb{R}^2$ als Gradient einer Funktion dargestellt werden?

5. In welchen Punkten in $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f(x,y) = y\sqrt{3x^2 + y^2}$ differenzierbar und in welchen Punkten besitzt sie welche partiellen Ableitungen?

(∗) 6. Sei $f \in C[0,1]$. Zeige: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sin(nx) = 0$.