Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung II (SS 2000)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 4

Abgabetermin: 12. Mai 2000

1. Man bestimme den Rand folgender Mengen:
   $\mathbb{Q}$, $\{z \in \mathbb{R} : \exists n, m \in \mathbb{Z} : z = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\}$, $[0,1[\setminus\mathbb{Q}$.

2. Sei V ein normierter Vektorraum. Die *SNCF Metrik* auf V wird folgendermassen definiert:
   $$\delta(v,w) = \begin{cases} ||v-w|| & \text{falls } v \text{ und } w \text{ auf einer Gerade durch 0 liegen} \\ ||v|| + ||w|| & \text{sonst} \end{cases}$$
   Zeige, dass δ tatsächlich eine Metrik ist.

3. Sei Y Teilmenge in einem metrischen Raum. Zeige:
   Y ist genau dann offen, wenn $\partial Y \cap Y = \{\}$ und genau dann abgeschlossen, wenn $\partial Y \subset Y$.

4. Seien K und L kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige:
   $$K + L = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in K, z \in L : y + z = x\}$$
   ist auch kompakt.

5. Sei $x \in I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.
   Zeige: Die durch $\epsilon_x : f \mapsto f(x)$ gegebene Abbildung $\epsilon_x : C^1(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(*) 6. Seien I, J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, und F die durch
   $$F(x) = \sup_{y \in J} f(x,y)$$
   definierte Abbildung.
   Zeige, dass F stetig ist.