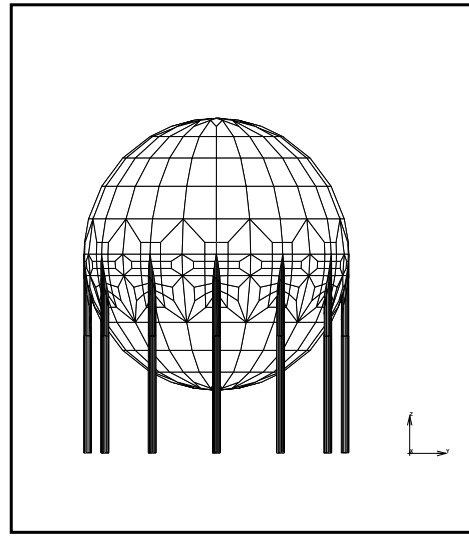


RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

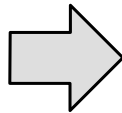
Fakultät für Bauingenieurwesen

Lehrstuhl für Statik und Dynamik

Univ. Prof. Dr. techn. G. Meschke



Realität



Simulation

Jan-Hendrik Hommel

**Untersuchung zusammengesetzter Schalen
auf der Grundlage eines elasto-plastischen
Schädigungsmodelles für duktile Metalle**

Diplomarbeit – Oktober 2001

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Herbst 2001 an der Ruhr-Universität Bochum (Fakultät für Bauingenieurwesen, Lehrstuhl für Statik und Dynamik).

Spezieller Dank gebührt meinem Betreuer, Herrn Dipl.-Ing. Olaf Kintzel. Er stand mir bei allen Fragen und Problemen jederzeit fachlich kompetent und ermutigend zur Seite.

Ganz besondere Motivation ging von Herrn Professor Dr.-Ing. Y. Başar aus, der stets mit guten Ratschlägen und Tipps präsent war, was mir zusätzlich Ansporn bei der Bearbeitung dieses Themas bedeutete. Ich möchte ihm an dieser Stelle auch für alles danken, was ich in den vergangenen 3 Jahren bei meinen Tätigkeiten als wissenschaftliche Hilfskraft bei ihm gelernt habe.

Für die freundliche und angenehme Arbeitsatmosphäre bedanke ich mich ferner bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls.

Ein ganz herzliches Dankeschön gilt meinen Eltern, Marion und Dr.-Ing. Hendrik Hommel, für ihre Unterstützung in jeder Phase meines Studiums. Ihnen habe ich es zu verdanken, dass ich dieses Studium wählte und in die Fußstapfen meines Vaters trete.

Bochum, im Herbst 2001

Jan-Hendrik Hommel

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	viii
1 Einleitung	1
1.1 Einführung in die Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung der Arbeit	4
1.3 Gliederung des Inhalts	5
2 Schalentheorie	7
2.1 Allgemeines	7
2.2 Degenerationskonzept	8
2.3 Unverformtes Schalenkontinuum	9
2.3.1 Referenzflächengeometrie	9
2.3.2 Geometrie der Referenzkonfiguration	11
2.4 Verformtes Schalenkontinuum	12
2.4.1 Geometrie der Momentankonfiguration	12
2.5 Verzerrungstensoren	14
2.6 Spannungstensoren	17
2.6.1 Arbeitskonformer Spannungstensor der GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungen	17
2.6.2 Arbeitskonformer Spannungstensor der ALMANZI'schen Verzerrungen	18
2.7 Materialgesetze	19
2.7.1 Hyperelastische Materialgesetze	19
2.7.1.1 Theoretische Grundlage	19
2.7.1.2 Verwendete Materialmodelle	20
2.7.2 Elasto-plastische Materialgesetze	21
2.7.2.1 Theoretische Grundlage	21

2.7.2.2	Verwendetes Materialmodell	22
2.7.2.3	Numerische Implementierung	24
2.7.3	Schädigungsmodell	25
2.7.3.1	Theoretische Grundlage	25
2.7.3.2	Verwendetes Materialmodell	26
2.7.3.3	Porenentstehungskriterien	27
2.7.3.4	Numerische Implementierung	29
2.8	Parametrisierung des Direktors	30
2.8.1	EULER-Winkel	31
2.8.2	Rotationsformulierung	32
2.9	Mehr-Schichten-Konzept	34
2.10	Prinzip der virtuellen Arbeit	36
2.11	Linearisierung	38
2.11.1	Allgemeines	38
2.11.2	Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit	38
2.11.3	Linearisierung der GREEN'schen Verzerrungen	39
3	Finite-Element-Formulierung	43
3.1	Isoparametrische Elementformulierung	43
3.2	Bilineare Ansatzfunktionen des 4-Knoten-Elementes	44
3.3	Numerische Integration	46
3.3.1	Elementfläche	46
3.3.2	Elementdicke	46
3.4	Direktor	47
3.4.1	1. Variation und Linearisierung der 1. Variation	47
3.4.2	Interpolation	49
3.4.3	Updated Rotation	50
3.5	Behebung der Locking-Phänomene	50
3.5.1	Assumed-Natural-Strain-Konzept (ANS)	50
3.5.2	Enhanced-Assumed-Strain-Konzept (EAS)	51
3.6	Schalenverschneidung	55
3.6.1	Allgemeines	55
3.6.2	Transformationsmatrix	56

3.6.3	Behebung der Singularität	58
3.7	Transformation	59
3.8	Veranschaulichung der Programmstruktur	61
3.9	Anwendungshinweise	62
4	Postprocessing	67
4.1	Schnittstelle zwischen FEMAS und MARC	67
5	Numerische Beispiele	73
5.1	Testbeispiele	73
5.1.1	Pinch-Kugel mit 18°-Loch unter diametraler Einzellast	73
5.1.2	Dickwandiger Zylinder unter Innendruck	79
5.1.3	U-Träger unter Einzellast	84
5.1.4	Pinch-Kugel ohne Loch unter diametraler Einzellast	86
5.1.5	Hyperbolische Schale unter lokaler Zugbelastung	89
5.2	Praxisrelevantes Beispiel	93
5.2.1	Kugelförmiger Gashochdruckbehälter auf Stützen unter Stützensen- kung	93
5.2.2	Vorgaben	93
5.2.3	Diskretisierung	94
5.2.3.1	Ermittlung der Geometrieverschnidung	95
5.2.3.2	Kugelschale	97
5.2.3.3	Zylinderschale	100
5.2.4	Erzeugen einer FEMAS-Input-Datei	102
5.2.5	Berechnung	105
6	Resümee und Ausblick	113
6.1	Resümee	113
6.2	Ausblick	114
	Literaturverzeichnis	115

Tensoralgebra

$\mathbf{A}$	allgemeiner Tensor zweiter Stufe
$\mathbf{a}$	vektorielle Größe (Tensor erster Stufe)
$\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^{-1}$	transponierter und inverser Tensor
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{AB}$	einfache Überschiebung zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	zweifache Überschiebung zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	dyadisches Produkt zweier Tensoren
$\mathbf{A}_{,i}$	partielle Ableitung eines Tensors nach den lokalen Koordinaten ξ^i
$I_{\mathbf{A}}, II_{\mathbf{A}}, III_{\mathbf{A}}$	Hauptinvarianten eines Tensors
$\mathbf{I}$	Einheitstensor zweiter Stufe

Operatoren

tr	Spur ($\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$)
sph	sphärischer (hydrostatischer) Anteil ($\text{sph} \mathbf{A} = \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{A}] \mathbf{I}$)
dev	deviatorischer Anteil ($\text{dev} \mathbf{A} = \mathbf{A} - \text{sph} \mathbf{A}$)
sym	symmetrischer Anteil ($\text{sym} \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{A} + \mathbf{A}^T]$)
skew	schiefsymmetrischer (antimetrischer) Anteil ($\text{skew} \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{A} - \mathbf{A}^T]$)
det	Determinante
$ \cdot $	Norm ($ \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$)
Grad, grad	materielle und räumliche Gradientenbildung
Div, div	materielle und räumliche Divergenzbildung
D	Richtungsableitung
$\mathbf{L}, \Delta$	Linearisierungsoperator
$\frac{d(\cdot)}{dt} = (\dot{\cdot})$	Materielle Zeitableitung
$\mathcal{L}$	LIE-Ableitung
δ	Variation einer materiellen Größe
Δ	Inkrement einer materiellen Größe
$\delta_{\mathcal{L}}$	LIE-Variation einer räumlichen Größe
$\Delta_{\mathcal{L}}$	LIE-Inkrement einer räumlichen Größe

Kontinuumsmechanik

P	Punkt des EUKLID'schen Raums
$\mathbf{X}$	Ortsvektor der Referenzkonfiguration
X^i	Komponenten der Referenzkonfiguration bzgl. orthonormierten Bezugssystems $\mathbf{i}_i$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor der Momentankonfiguration
x^i	Komponenten der Momentankonfiguration bzgl. orthonormierten Bezugssystems $\mathbf{i}_i$
Θ^i	krummlinige, materielle Koordinaten
$\mathbf{G}^i, \mathbf{G}_i$	kontra- bzw. kovariante Basisvektoren in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}^i, \mathbf{g}_i$	kontra- bzw. kovariante Basisvektoren in der Momentankonfiguration
G^{ij}, G_{ij}	kontra- bzw. kovariante Komponenten des Metriktensors der Referenzkonfiguration
g^{ij}, g_{ij}	kontra- bzw. kovariante Komponenten des Metriktensors der Momentankonfiguration
$\mathbf{G}, \mathbf{g}$	Materieller und räumlicher Metriktensor
$ G , g $	Determinanten der Metriktensoren
dV, dv	Materielles und räumliches Volumenelement
δ_j^i	KRONECKER-Delta
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$ J $	Jakobideterminante mit $ J = \sqrt{\frac{ G }{ g }}$
$\mathbf{C}, \mathbf{b}$	Rechter und linker CAUCHY-GREEN-Tensor
$\mathbf{E}, \mathbf{e}$	GREEN-LAGRANGE- und EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY'scher Spannungstensor
$\mathbf{S}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
$\mathbf{P}$	1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau}$	KIRCHHOFF'scher Spannungstensor
$\delta W, \delta w$	Virtuelle Arbeit in materieller und räumlicher Darstellung
Π	Gesamtpotential
$(\cdot)^{int}, (\cdot)^{ext}$	Innerer und äußerer Anteil der Energie- und Arbeitsausdrücke

Schalentheorie

$\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)}$	Ortsvektor der unverformten und verformten Schalenmittelfläche
dA, da	Materielles und räumliches Flächenelement der Schalenmittelfläche im Referenz- und Momentanzustand
$\mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i$	Kovariante Basisvektoren der unverformten und verformten Schalenmittelfläche
$\mathbf{A}$	Metriktenor der unverformten Schalenmittelfläche
$ A $	Determinante des Metriktenors der unverformten Schalenmittelfläche
$\mathbf{B}$	Krümmungstensor der unverformten Schalenmittelfläche
Θ^3	Dickenrichtung
$\mathbf{x}^{(1)}$	Allgemeine Schalendirektoren 1. Ordnung
$nlay$	Anzahl der Subelemente pro Element
$\mathbf{D}, \mathbf{d}$	Unverformter und verformter Schalendirektor 1. Ordnung mit Einheitslänge (Rotationsvariable)
λ	Dickendehnung
Ψ_α, ψ_α	EULER-Winkel (unverformte und verformte Konfiguration)

Materialmodellierung

W_S	Energiefunktion
ψ	freie HELMHOLTZ-Energie
E	Elastizitätsmodul
ν	Querkontraktionszahl
κ	Kompressionsmodul
μ	Schubmodul
$(\cdot)_e$	elastischer Anteil einer Größe
$(\cdot)_i$	inelastischer Anteil einer Größe
$(\cdot)_p$	rein plastischer Anteil einer Größe
$(\cdot)_s$	schädigungsbezogener Anteil einer Größe
$\mathbf{b}_e$	Elastischer linker CAUCHY-GREEN-Tensor
$\mathbf{d}_i$	Rate der inelastischen Deformationen
$\mathbf{n}$	Normalenrichtung an die Fließfläche
γ	Konsistenzparameter (plastischer Multiplikator)
q, k	Interne Verfestigungsvariable mit konjugierter Kraftgröße
β, B	Interne Schädigungsvariable mit konjugierter Kraftgröße
$\mathcal{D}$	Dissipationsfunktion
ϕ	Fließfunktion
f	Porenvolumenanteil (Schädigungsvariable)

f_0	Anfangsporenvolumenanteil
σ_X	Porenentstehungsspannung ($X = A, B$)
σ_{Xn}	Kritische Porenentstehungsspannung ($X = A, B$)
$\mathcal{S}(t)$	Sprungfunktion
f_X	Initiiertes Porenvolumen ($X = A, B$)
f_{nucl}	Anteil der Porenentstehung
f_{growth}	Anteil des Porenwachstums
s	Standardabweichung
ε_{eq}^p	Inelastische Vergleichsverzerrung
σ_{eq}	VON MISES-Vergleichsspannung
σ_{Y0}	Anfangsfließspannung
σ_k, D	Materialparameter (ROUSSELIER)
$C(f)$	Hilfsfunktion (ROUSSELIER)
$(\cdot)_c$	Kritischer Wert einer Größe (Bruchkriterien)
$(\cdot)^{trial}$	Größe im <i>Trial</i> - (Test-) Zustand
$(\cdot)^n$	Inkrementelle Größe zum Zeitpunkt $t = t_n$
$\Delta\gamma$	Inkrement des Konsistenzparameters

FE - Formulierung

ξ^i	normierte, lokale Elementkoordinate $[-1; +1]$
X^{ik}, x^{ik}	Verschiebungsfreiheitsgrade der un- und verformten Struktur
N_k	Ansatzfunktionen
α^i	Wichtungsfaktoren (GAUSS-LEGENDRE-Integration)
$(\cdot)^c$	kompatible Verzerrungen (EAS)
$(\cdot)^{inc}$	inkompatible Verzerrungen (EAS)
$(\cdot)_T$	transversaler Anteil (EAS)
$(\cdot)_M$	Memabrananteil (EAS)
$\mathbf{M}$	Verzerrungsinterpolationsfunktionen (EAS)
$\boldsymbol{\alpha}$	inkompatible Verzerrungsfreiheitsgrade (EAS)
$\mathbf{K}^{EE}$	Steifigkeitsmatrix der erweiterten Anteile (EAS)
$\mathbf{K}^E$	Gemischte Steifigkeitsmatrix aus kompatiblen und erweiterten Anteilen (EAS)
$\mathbf{f}_{int}$	Vektor der inneren Knotenkräfte
$\mathbf{f}_{ext}$	Vektor der äußeren Knotenkräfte

Kapitel 1

Einleitung

„Ein fachkundiger Problemlöser muß zwei unvereinbare Qualitäten besitzen -
rastlose Phantasie und geduldige Beharrlichkeit“

Howard W. Eves

1.1 Einführung in die Problemstellung

Schalentragwerke sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Dicke im Vergleich zu den Längenabmessungen äußerst gering ist. Im 14. Jahrhundert v. Chr. entstand bereits mit dem Schatzhaus des Ateus in Mykene ein schalenartiges Bauwerk. Die Vorzüge dieser kuppelförmigen Bauweise wurden schon sehr früh erkannt und in damaliger Zeit im Kathedralbau verwendet.

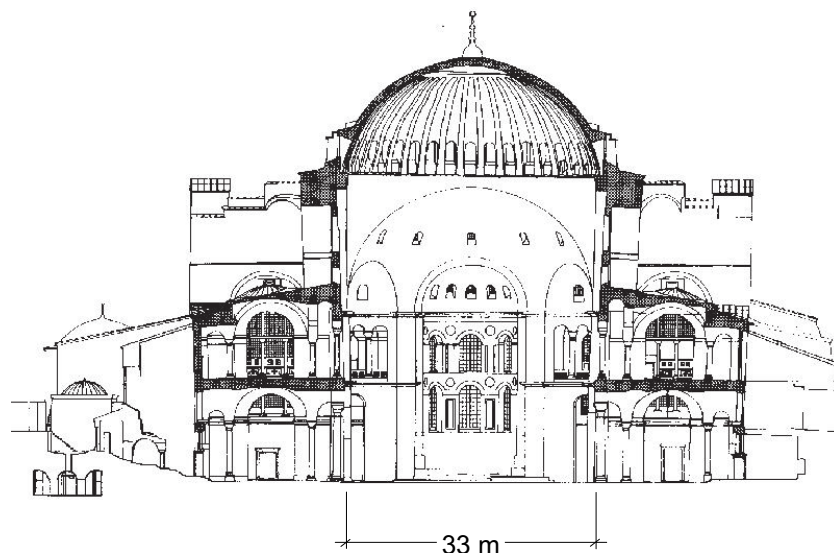


Abbildung 1.1: Kuppel der Hagia Sophia in Istanbul

Das Besondere an einer Kuppel ist ihre Konstruktion, mit deren Hilfe alle entstehenden Kräfte als Druckkräfte abgeleitet werden können. So ist es möglich, mit Baustoffen wie Stein und Zement, welche ausschließlich auf Druck beanspruchbar sind, Kuppeln mit Spannweiten bis zu 40 m zu konstruieren, wie das Beispiel der Hagia Sophia in Istanbul (532-537) zeigt (**Abbildung 1.1**). Das Besondere an dieser Bauart ist, dass sich durch fehlende Stützen eine große Transparenz im Gebäudeinneren verwirklichen lässt.

Erst seit ca. 130 Jahren, mit der Einführung des bewehrten Betons (Stahlbeton), ist es möglich deutlich filigranere Konstruktionen zu entwerfen, welche nicht mehr nur kuppelförmig sein müssen. Sie sind fortan erheblich dünner und somit wirtschaftlicher herzustellen. Während ältere Schalentragerwerke noch eine Dicke von über einem Meter hatten, ließen sich nun auch Schalen mit erheblich größeren Spannweiten und nur wenigen Zentimetern Dicke konstruieren. Ein Beispiel hierfür ist das Opernhaus in Dortmund aus dem Jahre 1964, das mit einer Spannweite von 66 m größtenteils eine Dicke von 8,5 cm besitzt.

Die Anwendungsbereiche von Flächentragwerken sind nahezu uneingeschränkt. Schalentragerwerke werden im Industriebau als Silos oder Kühltürme, im Fahrzeugbau als Konstruktionselemente bei Autos und Flugzeugen eingesetzt. Auch die Natur nutzt die Wirkung der Schalentragerwerke sehr effizient, wie z.B. beim Hühnerknochen oder menschlichen Schädel.

Die Grundzüge der Schalentheorie wurden ab dem Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt. Erwähnenswert sind die Namen AARON, KIRCHHOFF und LOVE, sowie später auch MINDLIN und REISSNER, die mit ihren Ansätzen die Grundlage späterer Forschungen lieferten. Im Laufe der Zeit entstanden eine Vielzahl von Theorien, welche von unterschiedlicher Approximationsgüte geprägt waren. Aufgrund fehlender Hilfsmittel war es in der damaligen Zeit jedoch nur möglich, mit Näherungsannahmen analytische Lösungen dieser klassischen Theorien zu erhalten.

Erst in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts wurden numerische Berechnungsverfahren entwickelt, wie beispielsweise die Finite Element Methode, das Finite Differenzenverfahren oder das Global Ritz Verfahren. Mit ihrer Hilfe konnten Strukturen berechnet werden, die sich der analytischen Lösung aufgrund ihrer Komplexität entzogen. Im Bauwesen, wie auch in anderen Ingenieurdisziplinen, ermöglichte erst die enorme Steigerung der Rechenleistung moderner Computeranlagen den effizienten Einsatz der Methode der Finiten Elemente, da dieses Verfahren auf der Durchführung vieler

numerischer Operationen, gekoppelt mit einer Verwaltung großer Datenmengen basiert.

Bei dieser Methode wird das Schalentragswerk in eine Reihe finiter Elemente unterteilt. In den einzelnen Elementen wird der Deformationszustand durch eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden diskretisiert und mit einer entsprechenden Verteilung über den Elementraum approximiert. Das so ermittelte Ergebnis stellt also nur eine Näherungslösung dar. Eine Konvergenz gegen die exakte Lösung lässt sich durch Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade erreichen.

Zur Berechnung von Schalenstrukturen werden einige unterschiedliche Vereinfachungen und Restriktionen angesetzt. Bei der KIRCHHOFF-LOVE-Normalenhypothese, die in der Stabstatik ihre Analogie in der BERNOULLI-Hypothese findet, sind transversale Schubverzerrungen nicht beschreibbar (schubstarr), da die Dickenkinematik an die Kinematik der Schalenmittelfläche gekoppelt ist. Mit einer Beschränkung auf dünne Tragwerke lässt sich dennoch eine relativ exakte Beschreibung der Geometrie erreichen.

In den 40er Jahren wurde die Schubverzerrungstheorie entwickelt, welche diese Nachteile beseitigte. Sie setzte sich allerdings erst mit der approximativen Beschreibung der Geometrie durch isoparametrische Elemente durch. In ihr sind die Verschiebungen und die Verdrehungen entkoppelt, welches letztendlich auch die Berechnung dicker Schalenstrukturen erlaubte. Mit postulierter Einheitslänge des Direktors, welcher die Kinematik in der Dicke beschreibt, gilt die MINDLIN-REISSNER-Theorie als einfachster Ansatz unter den schubweichen Schalentheorien. Ein großes Problem stellt dabei die Berücksichtigung der Einheitslänge eines a priori inextensiblen Direktors dar. Eine exakte Simulation von dreidimensionalen Zuständen ist mit diesem kinematischen Modell jedoch nicht möglich, da dort Freiheitsgrade zur Beschreibung der transversalen Dehnungen fehlen. Um Strukturen mit großen Dehnungen und finiten Rotationen möglichst exakt berechnen zu können, musste dieses Defizit beseitigt und auf einen höherwertigeren Verschiebungsansatz in Schalendickenrichtung übergegangen werden. Dadurch wird die Einheitslänge des Direktors nicht mehr unbedingt vorausgesetzt.

SIMO schlug eine multiplikative Zerlegung des extensiblen Direktors vor, in einen inextensiblen Direktor und einen skalaren Faktor, welcher die Dickendehnung beschreibt. Durch diesen Ansatz ist jedoch nur eine konstante Dickenverzerrung und somit auch nur ein konstanter Spannungsverlauf beschreibbar.

Zur Simulation genauerer Spannungsverläufe über die Schalendicke kann einerseits der Ansatz in Dickenrichtung erhöht werden, andererseits ist aber auch eine Unterteilung der Schalenhöhe in mehrere Schichten möglich (*Mehr-Schichten* -Konzept), wie sie auch im Rahmen dieser Arbeit Anwendung findet. Wichtig hierbei ist die Erfüllung der C^0 -Kontinuitätsbedingung an den Schichtgrenzen. Jedes Laminat kann darüberhinaus mit einer unterschiedlichen Materialeigenschaft belegt werden. Dieses Konzept ermöglicht die Untersuchung von Spannungskonzentrationen.

Um eine exaktere Simulation von Schalenkonstruktionen zu erreichen, mussten verfeinerte Materialmodelle entwickelt werden. Während ältere Lösungsansätze bei Schalenelementen überwiegend linear-elastisches Materialverhalten voraussetzten, gestatten die neueren Methoden eine Betrachtung nahezu beliebiger physikalischer Nichtlinearitäten bei Schalenelementen, da die Einbindung von elasto-plastischen Materialmodellen und von Materialmodellen zur Erfassung von Schädigung möglich ist. Es kann dadurch z. B. das Schädigungsverhalten duktiler Metalle in Form von Mikroporen analysiert werden.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Finites Element zu entwickeln, welches dazu genutzt werden kann, beliebig zusammengesetzte Flächentragwerke unter Berücksichtigung finiter Rotationen und großer Dehnungen zu simulieren. Einen wesentlichen Schwerpunkt stellt dabei die Parametrisierung des Direktors dar.

Eine 1976 von RAMM [RAMM 1976] vorgeschlagene Methode basiert auf der Parametrisierung des Direktors mit zwei globalen EULER-Winkeln. Die Einhaltung der Einheitslänge des Direktors ist hierbei a priori erfüllt. Es ist jedoch keine Simulation von zusammengesetzten Strukturen möglich, da im Bereich der Verschneidungslinien eine kompatible Kopplung der Verdrehfreiheitsgrade durch nur zwei unabhängige Rotationsvariablen nicht erfolgen kann.

Eine mögliche Lösung dieses Problems stellt der 1986 von SIMO & VU-QUOC [SIMO & VU-QUOC 1986] verwendete RODRIGUES-Vektor dar. Er gestattet eine konsistente Kopplung der Rotationsfreiheitsgrade entlang einer Verschneidungslinie, da er drei unabhängige Freiheitsgrade besitzt.

Hauptbestandteil dieser Arbeit ist die Implementierung einer *Updated-Rotations* Formulierung nach SIMO, welche auch von MENZEL [MENZEL 1996] und KINTZEL

[KINTZEL 1998] verwendet wurde, in ein bestehendes Element des Programmsystems FEMAS2000 (Finite Element Moduln Allgemeiner Strukturen) des Institutes für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum nach ECKSTEIN [ECKSTEIN 1999]. Dadurch entsteht ein leistungsfähiges Element, welches durch bereits implementierte Materialmodelle dazu genutzt werden kann, sowohl Elasto-Plastizität, als auch Elasto-Plastizität unter Schädigungseinfluß an zusammengesetzten Schalenstrukturen zu simulieren.

Abschließend wird anhand numerischer FE-Berechnungen die Leistungsfähigkeit des Elementes überprüft. Die baupraktische Anwendung wird an einem realen Beispiel, einem kugelförmigen Gasdruckbehälter unter Stützensenkung gezeigt.

1.3 Gliederung des Inhalts

Diese Arbeit gliedert sich in insgesamt 6 Kapitel, deren Inhalt im Folgenden kurz erläutert wird.

Nach dieser Einführung in das zu behandelnde Themengebiet, werden in **Kapitel 2** die Grundlagen des dreidimensionalen Schalenkontinuums bereitgestellt. Im Rahmen des Degenerationskonzeptes werden die exakten Gleichungen des 3D-Kontinuums auf eine Schalenkinematik reduziert.

In **Kapitel 3** wird ein Einblick in die Methode der Finiten-Elemente gegeben. Die Verfahren und Methoden, die im Rahmen dieser Arbeit Verwendung finden, werden dort schwerpunktmäßig erläutert.

Das in dieser Arbeit neu entstandene Programm “FemasInMentat” wird detailliert in **Kapitel 4** beschrieben. Einerseits werden dort die Notwendigkeit sowie die Funktionalität des Programmes beschrieben, zum anderen soll es aber gleichzeitig auch als Bedienungsanleitung fungieren.

Kapitel 5 dient der Überprüfung der implementierten Routinen. Es werden in diesem Abschnitt einerseits Testbeispiele mit vorhandenen Referenzlösungen zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit dieses Elementes vorgestellt, andererseits wird aber auch die Praxisrelevanz anhand eines praxisbezogenen Beispiels belegt.

Ein Resümee der gesamten Arbeit wird im **6. Kapitel** gezogen.

Kapitel 2

Schalentheorie

In diesem Abschnitt soll zunächst eine Einführung in die kontinuumsbasierte Schalenformulierung gegeben werden, welche als Grundlage für die weiteren Kapitel dient.

2.1 Allgemeines

Die Geometriebeschreibung von Schalenstrukturen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 . In diesem ist ein globales, orthogonalkartesisches Koordinatensystem X^i gegeben, in dem die Einheitsvektoren $\mathbf{i}_i = \mathbf{i}^i$ die zugehörige orthonormierte Vektorbasis bilden. Es sei an dieser Stelle kurz angemerkt, dass im weiteren Verlauf, durch griechische Indizes die Zahlen 1, 2, durch lateinische hingegen die Zahlen 1, 2, 3 repräsentiert werden.

Im Rahmen der Schalentheorie unterscheidet man zwei Zustände des Schalenkontinuums: Zum einen den unverformten Ausgangszustand, der als Referenzkonfiguration dient, und zum anderen einen infolge einer Belastung resultierenden, verformten oder momentanen Zustand. Mit Hilfe der Schalentheorie gilt es, sie im Rahmen der Genauigkeit mittels kinematischer Variablen zu beschreiben.

Als Ausgangspunkt für die Konstruktion eines Schalenkontinuums dient die Bezugs- oder Referenzfläche, welche im Rahmen dieser Arbeit die geometrische Mitte zwischen Schalenober- und Schalenunterfläche darstellt. Ihre Beschreibung erfolgt mit dem Ortsvektor $\mathbf{X}^0$ in der Momentankonfiguration, der von den krummlinigen, konvektiven, d. h. körpergebundenen, Koordinaten Θ^α abhängig ist (**Abbildung 2.1**).

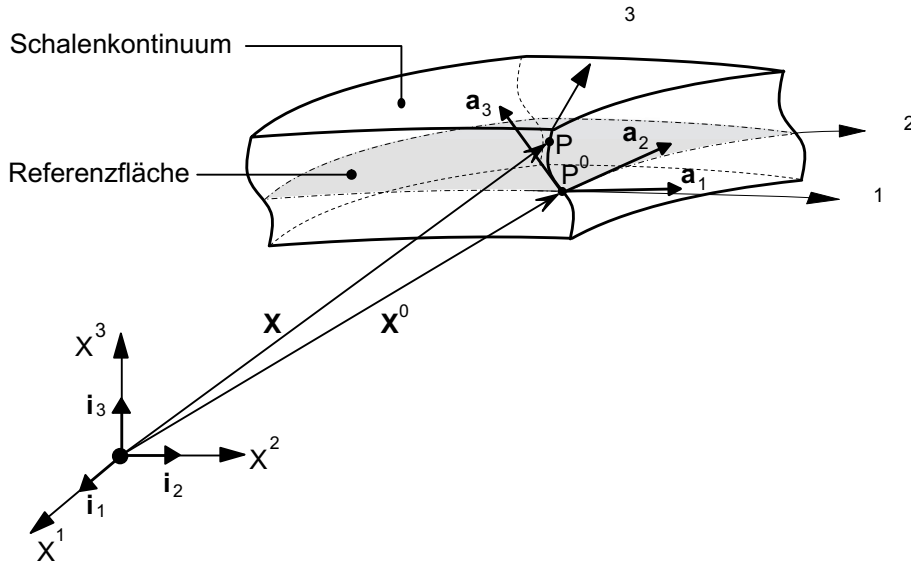


Abbildung 2.1: Schalenkontinuum und Referenzfläche

Zur räumlichen Darstellung eines beliebigen Punktes P im Schalenkontinuum dient der allgemeine vektorielle Polynomansatz

$$\mathbf{x}(\Theta^i) = \mathbf{x}^0(\Theta^\alpha) + \sum_{n=1}^{nn} (\Theta^3)^n \mathbf{d}_n(\Theta^\alpha) \quad (2.1)$$

für die Momentankonfiguration. Die Vektoren $\mathbf{d}_n$ werden als Direktoren bezeichnet. Die exakte Verformung eines dreidimensionalen Körpers ließe sich durch eine Grenzwertbildung $nn \rightarrow \infty$ darstellen. In dieser Arbeit findet der Sonderfall $nn = 1$ Anwendung, d.h. es wird eine lineare Kinematik in der Dickenrichtung verwendet.

2.2 Degenerationskonzept

Das Wort Degenerationskonzept soll zum Ausdruck bringen, dass diese Methode keine Theorie im klassischen Sinne ist, sondern ein Verfahren darstellt, welches durch Ansatzvereinfachung dreidimensionale finite Körperelemente in das Schalenkontinuum überführt.

Als Begründer dieses Konzeptes gilt AHMAD der 1968 die Annahme der Schalentheorie “eine Gerade durch die Schale bleibt stets geradlinig” je Knoten traf. Dadurch wurde die Einführung eines Direktors ermöglicht, der das Schalenkontinuum in Dickenrichtung beschreibt und durch Rotationsfreiheitsgrade parametrisiert werden kann.

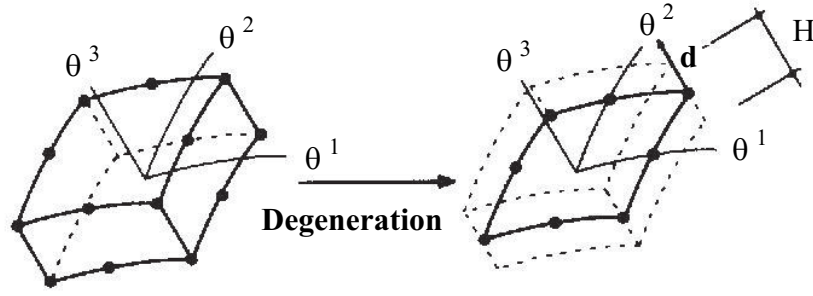


Abbildung 2.2: Degeneration vom Kontinuum- zum Schalelement

Bei diesen “degenerierten” oder “continuum based” Schalelementen genügt es, alle differentialgeometrischen Elemente bezogen auf die Referenzfläche zu ermitteln. Unter der Zuhilfenahme des Direktors ist dann ausgehend von dieser Referenzfläche die Berechnung aller differentialgeometrischen Größen in jedem anderen Punkt des Kontinuums möglich.

2.3 Unverformtes Schalenkontinuum

2.3.1 Referenzflächengeometrie

Nachfolgend wird die Schalenkinematik der Referenzkonfiguration eingeführt. Die kovarianten Basisvektoren der Bezugsfläche bilden sich aus der partiellen Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{X}^0$ nach den Koordinaten Θ^α

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}^0}{\partial \Theta^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha}^0, \quad (2.2)$$

welche demzufolge die Tangentenvektoren zu diesen krummlinigen Koordinaten darstellen. Um eine komplette dreidimensionale Basis zu erhalten, wird der Direktor oder Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}^3 \quad \text{mit a priori} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 1 \quad (2.3)$$

eingeführt. Im Referenzzustand gilt:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \quad (2.4)$$

mit

$$\sqrt{A} = (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{A}_3 = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3] = \sqrt{\det[A_{ij}]} = \sqrt{\det[A_{\alpha\beta}]} . \quad (2.5)$$

Es werden ferner zwei Tensoren zweiter Stufe, der Metriktensor $\mathbf{A}$ und der Krümmungstensor $\mathbf{B}$ eingeführt

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}^i, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B} = B_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta = -\mathbf{A}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{A}^\alpha. \quad (2.7)$$

Die kovarianten Komponenten des Metriktensors ermitteln sich zu

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \\ A_{ij} &= \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j, \quad \text{mit} \quad A_{\alpha 3} = A_{3\alpha} = 0 \\ A_{33} &= 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

der aufgrund der Kommutativität des Skalarproduktes $\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_\alpha$ einen symmetrischen Tensor darstellt, d. h. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Seine Komponenten beschreiben die Längen der Basisvektoren sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel und bilden somit eine wichtige Größe zur Beschreibung der Metrik einer beliebig gekrümmten Struktur. Eine ebenfalls wichtige Größe stellen die Komponenten des Krümmungstensors dar, deren Berechnung durch

$$B_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}_3 = -\mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta \quad (2.9)$$

erfolgt. Aus ihnen lassen sich Aussagen treffen, wie stark eine Fläche gekrümmt ist. Der zweistufige Tensor $\mathbf{B}$ ist ebenfalls symmetrisch, da die partiellen Ableitungen $\mathbf{A}_{\alpha,\beta} = \mathbf{A}_{\beta,\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha\beta}^0 = \mathbf{X}_{,\beta\alpha}^0$ austauschbar sind.

Neben den kovarianten Basisvektoren finden noch ein anderer Satz von Vektoren Verwendung. Es handelt sich dabei um die sogenannten kontravarianten Basisvektoren $\mathbf{A}^i$. Unter Verwendung von (2.3) und (2.4) gelten folgende Beziehungen:

$$\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}^3 = 0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.11)$$

Im Referenzzustand steht der Direktor senkrecht auf der Mittelfläche. Des weiteren folgt aus (2.11), dass ko- und kontravariante Basisvektoren orthogonal zueinander sind.

Zur Berechnung der kontravarianten Basisvektoren $\mathbf{A}^\alpha$ ist es notwendig kontravariante Komponenten des Metriktensors einzuführen:

$$A_{\alpha\rho} A^{\rho\beta} = \delta_\alpha^\beta. \quad (2.12)$$

Durch Lösung des Systems (2.12) erhält man

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

mit der Determinante

$$A = \det A_{\alpha\beta} = |A_{\alpha\beta}| = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2. \quad (2.14)$$

Die kontravarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche lassen sich nun durch Hochziehen der Indizes mit den Metriktensorkomponenten ermitteln:

$$\mathbf{A}^\alpha = A^{\alpha\beta} \mathbf{A}_\beta, \quad (2.15)$$

wobei EINSTEIN's Summen-Konvention gilt. Als differentielles Flächenelement der Schalenmittelfläche wird

$$dA = \sqrt{A} d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.16)$$

eingeführt.

2.3.2 Geometrie der Referenzkonfiguration

Die Geometriebeschreibung der Referenzkonfiguration dreidimensionaler Schalenelemente erfolgt ausgehend von einer Referenzfläche (Degenerationskonzept), welche durch den Ortsvektor $\mathbf{X}^0$ beschrieben ist. Ein beliebiger Punkt P im unverformten Schalenraum ist ausgehend von der Schalenmittelfläche über den Normaleneinheitsvektor erreichbar, der senkrecht auf Referenzfläche steht. Der Punkt P lässt sich also durch einen linearen Ansatz in Richtung von Θ^3 , mit $-H/2 \leq \Theta^3 \leq H/2$, wie folgt beschreiben

$$\mathbf{X}(\Theta^i) = \mathbf{X}^0(\Theta^\alpha) + \Theta^3 \mathbf{D}(\Theta^\alpha). \quad (2.17)$$

Für das unverformte Schalenkontinuum folgt damit für die kovarianten Basisvektoren $\mathbf{G}_i$ eines beliebigen Punktes

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \Theta^3 \mathbf{D}_{,\alpha} = \mathbf{A}_\alpha - \Theta^3 \mathbf{B} \mathbf{A}_\alpha \quad (2.18)$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3 = \mathbf{D}. \quad (2.19)$$

Für den späteren Gebrauch soll an dieser Stelle noch zusätzlich die geometrische Variable dV , das differentielle Volumenelement, mittels der Determinante G eingeführt werden

$$dV = \sqrt{G} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3, \quad (2.20)$$

mit der Determinante G

$$\sqrt{G} = [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3] = \sqrt{|G_{ij}|}. \quad (2.21)$$

2.4 Verformtes Schalenkontinuum

2.4.1 Geometrie der Momentankonfiguration

Nach einer Deformation nimmt der Punkt P die Position $\bar{P}$ in der momentanen Konfiguration ein (**Abbildung 2.3**). Zur Beschreibung des Punktes $\bar{P}$ dient, wie bereits in der Beschreibung der Referenzkonfiguration, ein Ansatz mit linearem Term in Θ^3

$$\mathbf{x}(\Theta^i) = \mathbf{x}^0(\Theta^\alpha) + \Theta^3 \mathbf{x}^1(\Theta^\alpha) . \quad (2.22)$$

Die einfachste Version dieses Ansatzes geht von einem inextensiblen Direktor in Dickenrichtung mit $|\bar{\mathbf{x}}^1| = |\mathbf{d}| = 1$ aus. Hierdurch lässt sich jedoch keine Dickenänderung berücksichtigen. Dadurch sind keine transversalen Verzerrungen ermittelbar. Anwendung findet dieser Ansatz bei dünnen Schalenstrukturen, bei denen die Dickenänderung nicht so große Bedeutung hat. Oft wird hierbei a priori $\tau^{33} = 0$ postuliert.

Bei einer Betrachtung allgemeiner Schalentragwerke, was auch jene mit größeren Dicken einschließt, ist diese Vereinfachung nicht mehr anwendbar. Um auch beachtliche Dickenänderungen beschreiben zu können, ist eine Erhöhung des Ansatzgrades erforderlich. Nach [SIMO, RIFAI & FOX 1990] wird der lineare Term in (2.22) zusätzlich durch eine multiplikative Zerlegung in einen skalarwertigen transversalen Dehnungsfaktor λ und einen inextensiblen Direktor $\mathbf{d}$ mit Einheitslänge aufgeteilt. Dieses führt auf den 6-parametrischen Ansatz

$$\mathbf{x}(\Theta^i) = \mathbf{x}^0(\Theta^\alpha) + \Theta^3 \lambda(\Theta^\alpha) \mathbf{d}(\Theta^\alpha) . \quad (2.23)$$

Für inkompressible Materialien führt diese Theorie nicht zu *Poisson-Locking* [BAŞAR & DING 1996] und ist daher ausreichend genau. Bei der Betrachtung von kompressiblen Strukturen ist es jedoch notwendig den Ansatzgrad weiter zu erhöhen. Im Rahmen dieser Arbeit soll nicht näher auf eine Ansatzgraderhöhung eingegangen werden, es sei an dieser Stelle auf die Arbeit von [BAŞAR & DING 1996] und [BAŞAR, HANSKÖTTER & SCHWAB 2001] verwiesen.

Die Berechnung der differentialgeometrischen Elemente des verformten Zustands erfolgt analog zu (2.2) bis (2.15). Es ergibt sich demzufolge für die Basisvektoren des Schalenraumes

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}(\Theta^i) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \Theta^3 (\lambda_{,\alpha} \mathbf{d} + \lambda \mathbf{d}_{,\alpha}) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,3}(\Theta^i) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^3} = \lambda \mathbf{d} . \quad (2.25)$$

Eine Translation, eine Rotation sowie eine Verformung sind nötig, um von der Referenz- in die Momentankonfiguration zu gelangen (**Abbildung 2.3**).

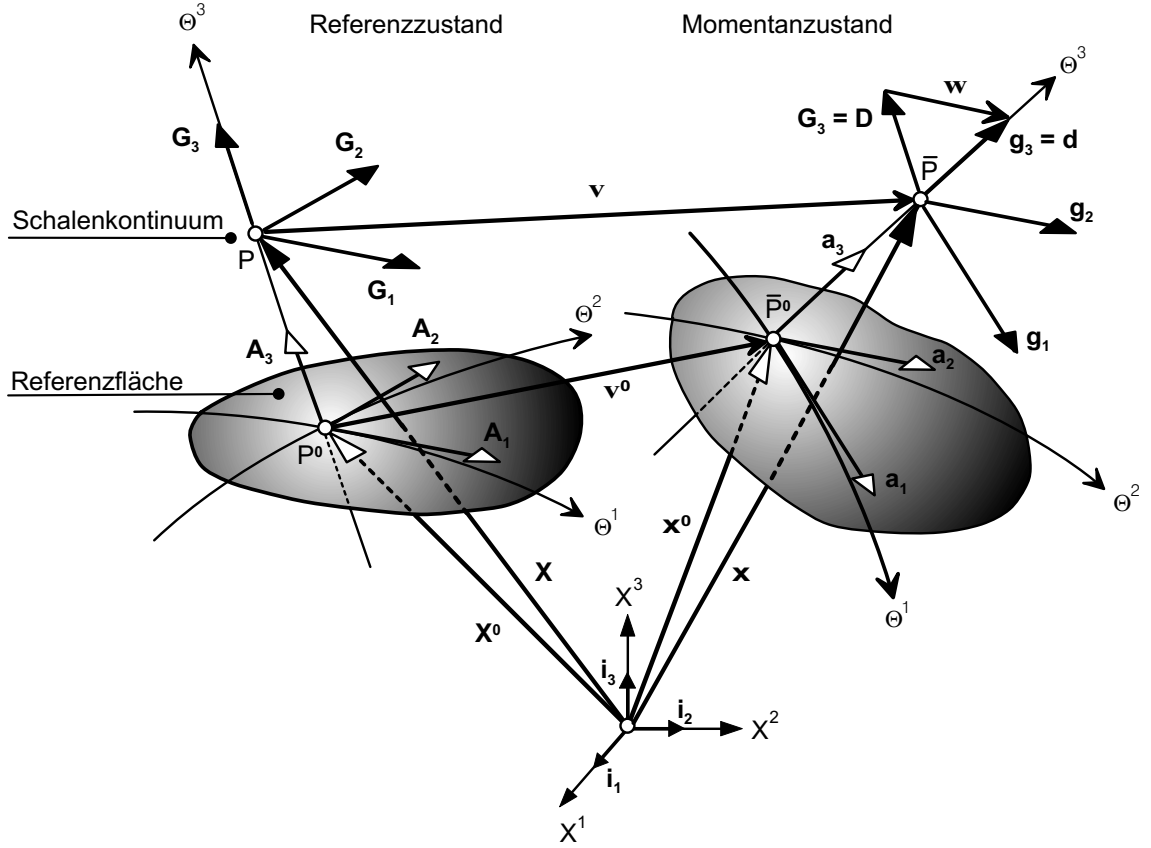


Abbildung 2.3: Verformte und unverformte Konfiguration

Zur Festlegung der momentanen Konfiguration bezüglich des Referenzzustandes werden folgende Verschiebungsvektoren definiert:

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{x}^0 - \mathbf{X}^0 \quad \text{Verschiebung der Referenzfläche,} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \text{Verschiebung des Schalenkontinuums.}$$

Als weitere kinematische Variable wird der Differenzvektor $\mathbf{w}$ eingeführt, welcher sich aus der Drehung des Direktors ergibt

$$\mathbf{w} = \mathbf{d} - \mathbf{D} . \quad (2.27)$$

2.5 Verzerrungstensoren

Für die spätere Formulierung der konstitutiven Beziehungen sind der GREEN-LAGRANGE- und der EULER-ALMANZI-Verzerrungstensor $\mathbf{E}$, bzw. $\mathbf{e}$ von großer Bedeutung. Auf Grund ihrer Invarianz gegenüber Starrkörperrotation und Starrkörpertranslation, stellen sie ein objektives Verzerrungsmaß dar. Ziel dieses Abschnittes ist es, diese Tensoren in kovarianter Form unter expliziter Darstellung der Dickenkoordinate Θ^3 zu definieren. Es werden hierzu noch folgende Tensoren benötigt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = C_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.28)$$

der rechte CAUCHY-GREEN Tensor,

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.29)$$

der Metriktenor der unverformten Geometrie,

$$\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = b_{ij}^{-1} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = (\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.30)$$

der inverse linke CAUCHY-GREEN Tensor,

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.31)$$

der Metriktenor der verformten Geometrie, wobei $\mathbf{F}$ den sogenannten Deformationsgradienten darstellt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i. \quad (2.32)$$

Der Verzerrungstensor, welcher die Differenz der verformten und unverformten Metriktenorkomponenten angibt, ist in materieller Formulierung als GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ bekannt:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \quad (2.33)$$

Sein Pendant findet er in dem nach ALMANZI benannten Tensor, welcher in der räumlichen Formulierung angegeben wird:

$$\mathbf{e} = e_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.34)$$

Durch das Einsetzen der kovarianten Basisvektoren der unver- bzw. verformten Konfiguration ((2.18), (2.19) und (2.24), (2.25)) in die Gleichung (2.35) erhält man die Komponenten des GREEN-LAGRANGE Tensors:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= E_{\alpha\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta + E_{\alpha 3}(\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^3 + \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^\alpha) + E_{33} \mathbf{G}^3 \otimes \mathbf{G}^3 \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit den Komponente $E_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta - \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbf{a}_\alpha + \Theta^3(\lambda_{,\alpha}\mathbf{d} + \lambda\mathbf{d}_{,\alpha})) \cdot (\mathbf{a}_\beta + \Theta^3(\lambda_{,\beta}\mathbf{d} + \lambda\mathbf{d}_{,\beta})) \\ &\quad - (\mathbf{A}_\alpha + \Theta^3\mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{A}_\beta + \Theta^3\mathbf{D}_{,\beta})) . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen und in eine Reihendarstellung bezüglich der Dickenkoordinate Θ^3 überführen:

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{(0)} + \Theta^3 E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\Theta^3)^2 E_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2.37)$$

mit den Komponenten $E_{\alpha\beta}^{(0)}$, $E_{\alpha\beta}^{(1)}$ und $E_{\alpha\beta}^{(2)}$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta) , \\ E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2}(((\lambda\mathbf{d})_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta + (\lambda\mathbf{d})_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha) - (\mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + \mathbf{D}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha)) , \\ E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\lambda_{,\alpha}\lambda_{,\beta} + \lambda^2\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}) . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ferner gilt für die Komponenten $E_{\alpha 3}$:

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 - \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_3) \\ &= \frac{1}{2}((\mathbf{a}_\alpha + \Theta^3(\lambda_{,\alpha}\mathbf{d} + \lambda\mathbf{d}_{,\alpha})) \cdot \lambda\mathbf{d} - (\mathbf{A}_\alpha + \Theta^3\mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

und in Reihendarstellung umgeformt:

$$E_{\alpha 3} = E_{\alpha 3}^{(0)} + \Theta^3 E_{\alpha 3}^{(1)} \quad (2.40)$$

mit den Komponenten $E_{\alpha 3}^{(0)}$ und $E_{\alpha 3}^{(1)}$

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3}^{(0)} &= \frac{1}{2}\lambda\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha , \\ E_{\alpha 3}^{(1)} &= \frac{1}{2}\lambda\lambda_{,\alpha} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Letztlich noch die Komponente in transversaler Richtung E_{33} :

$$\begin{aligned} E_{33} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 - \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{G}_3) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda\mathbf{d} \cdot \lambda\mathbf{d} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

mit der einzigen Komponente $E_{33}^{(0)}$

$$E_{33}^{(0)} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) . \quad (2.43)$$

Aufgrund der vorhandenen Symmetrie dieses Tensors kann auf eine explizite Berechnung der Komponenten $E_{3\beta}$ an dieser Stelle verzichtet werden, da $E_{3\beta} = E_{\alpha 3}$.

Dabei finden folgende vereinfachende Beziehungen Verwendung:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1 \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} = 0 . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Komponenten ergeben sich analog für den ALMANZI Tensor.

Die Definition der Komponenten des Verzerrungstensors E_{ij} ist in **Abbildung 2.4** visualisiert. Bei der hier gewählten Definition charakterisiert der erste Index die Richtung der Verzerrungen und der zweite Index die Flächennormale der bewegten Oberfläche des repräsentativen Volumenelementes.

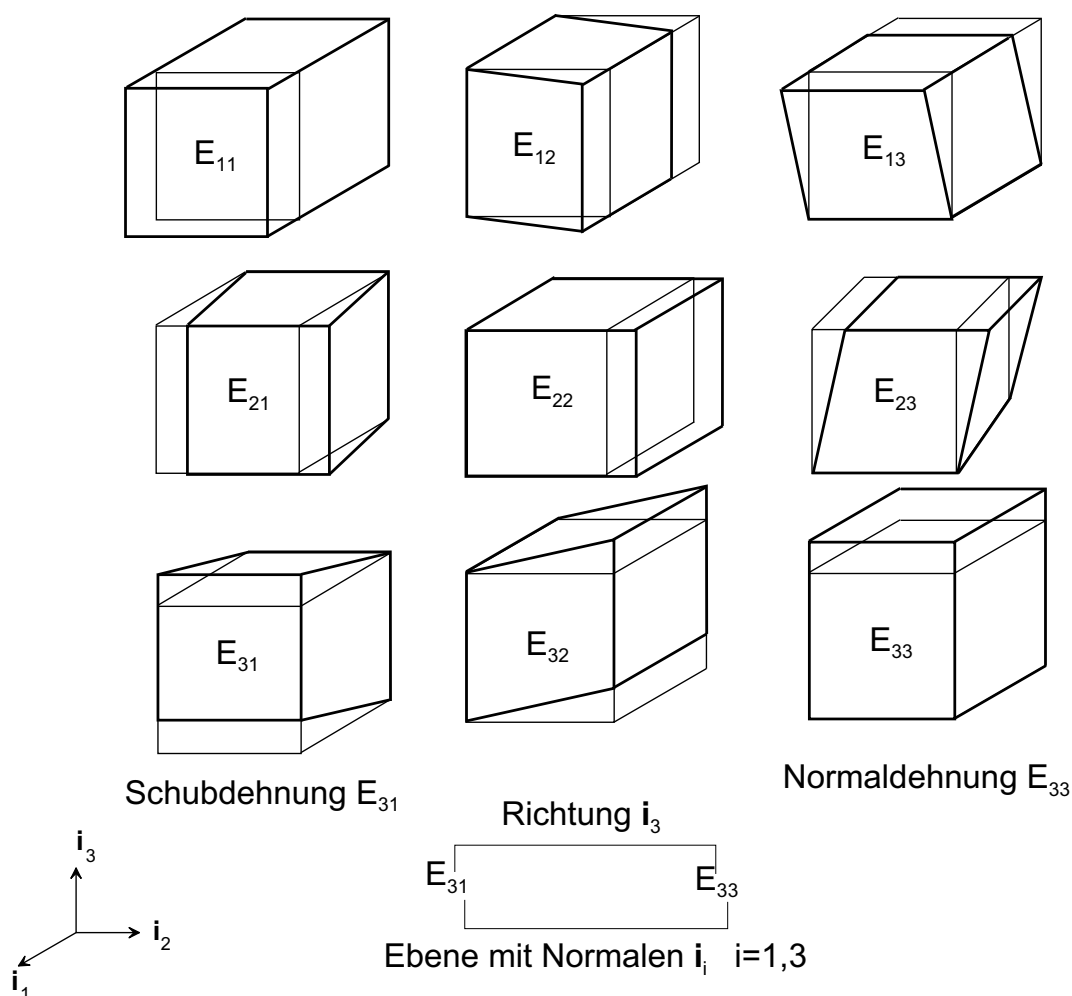


Abbildung 2.4: Schub- und Normalkomponenten des GREEN'schen Verzerrungstensors

2.6 Spannungstensoren

2.6.1 Arbeitskonformer Spannungstensor der GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungen

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad (2.45)$$

und der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ sind nach **Kapitel 2.10** über die innere Elementararbeit miteinander gekoppelt.

$$\delta W^{int} = \int \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV = \int S^{ij} \delta E_{ij} \sqrt{G} \, d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \quad (2.46)$$

Werden jetzt die GREEN'schen Verzerrungen nach (2.37) durch die Reihenentwicklung in der Dickenkoordinate ausgedrückt, lässt sich die innere, virtuelle Arbeit (2.46) weiter umformen

$$\begin{aligned} \delta W^{int} &= \int S^{ij} \delta \left(E_{\alpha\beta}^{(0)} + \Theta^3 E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\Theta^3)^2 E_{\alpha\beta}^{(2)} \right) dV \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left(S_{(0)}^{ij} \delta E_{ij}^{(0)} + S_{(1)}^{ij} \delta E_{ij}^{(1)} + S_{(2)}^{ij} \delta E_{ij}^{(2)} \right) dA \\ &= \int_{\mathcal{A}} \sum_{I=0}^2 S_{(I)}^{ij} \delta E_{ij}^{(I)} \sqrt{A} \, d\Theta^1 d\Theta^2, \end{aligned} \quad (2.47)$$

wenn die materiellen, zweidimensionalen Schnittgrößen $S_{(I)}^{ij}$ ($I = 0, \dots, 2$) des Typs "2. PIOLA-KIRCHHOFF" wie folgt definiert werden:

$$S_{(I)}^{ij} = \int_{-H/2}^{+H/2} \sqrt{\frac{G}{A}} S^{ij} (\Theta^3)^I \, d\Theta^3 \quad (I = 0, \dots, 2). \quad (2.48)$$

Damit liegt eine Variationsformulierung vor, die nach Dickenintegration der inneren Kraftgrößen gemäß (2.47) nur von zweidimensionalen Größen abhängt, die auf der Schalenmittelfläche definiert sind. Die Integrationen in (2.48) können vorab ausgeführt werden und es verbleibt eine zweidimensionale Variationsformulierung als Grundlage einer effektiven FE-Implementierung.

2.6.2 Arbeitskonformer Spannungstensor der ALMANZI'schen Verzerrungen

Die Komponenten des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensors sind physikalisch nicht interpretierbar. Daher wird der wahre CAUCHY-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ eingeführt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (2.49)$$

welcher mit der *Lie*-Variation des ALMANZI'schen Verzerrungstensors skalar multipliziert die virtuelle innere Elementararbeit des dreidimensionalen Kontinuums bildet.

$$\delta W^{int} = \int \boldsymbol{\sigma} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} \, dv \quad (2.50)$$

In dieser Gleichung findet die *Lie*-Variation Anwendung, die nur die Komponenten eines Tensors variiert und die Basis beibehält.

Die Komponenten des CAUCHY'schen Spannungstensors σ_{ij} sind in **Abbildung 2.5** anhand der am repräsentativen Volumenelement angreifenden Spannungsvektoren illustriert. Analog zur Definition der Verzerrungen gibt der erste Index die Richtung der Spannung und der zweite Index die entsprechende Flächennormale an.

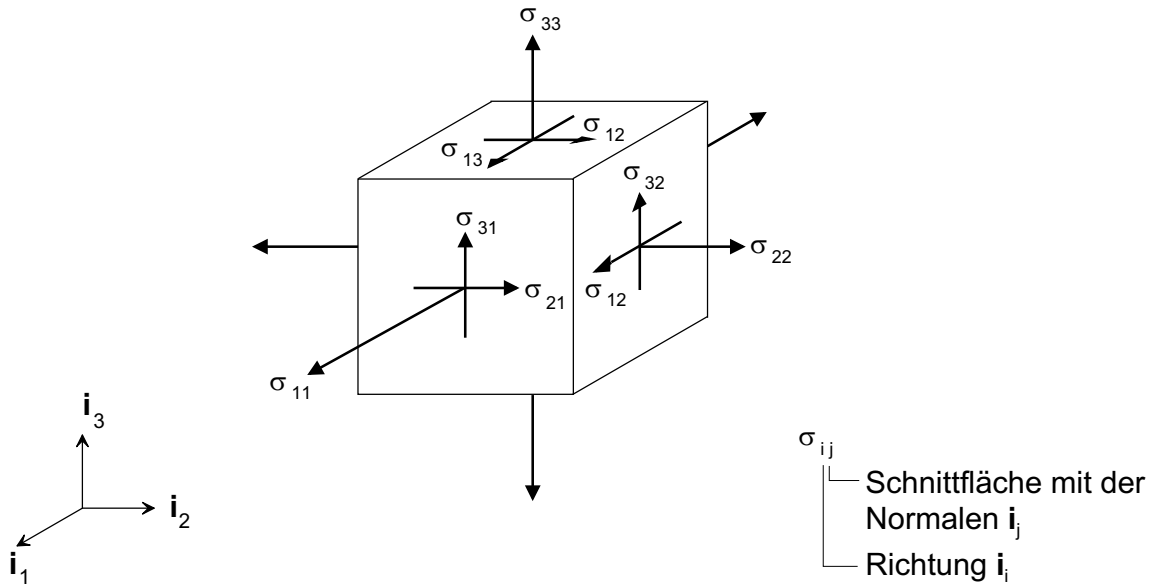


Abbildung 2.5: Schub- und Normalkomponenten des CAUCHY'schen Spannungstensors

2.7 Materialgesetze

Neben den bisher eingeführten stoffunabhängigen Gleichungen und der Kinematik gehört zur vollständigen Beschreibung eines statischen Randwertproblems die Einführung eines Materialgesetzes, d.h. die Formulierung der konstitutiven Beziehungen. Dieses Kapitel führt dazu elastische und elasto-plastische Materialmodelle für finite Deformationen in dreidimensionaler Darstellung ein. Anschließend erfolgt die Beschreibung des elasto-plastischen Werkstoffverhaltens unter dem Einfluss duktiler Mikroporenschädigung.

Anmerkung. Nachfolgend sind im wesentlichen nur die maßgeblichen Formeln wiedergegeben, näheres zu den Herleitungen ist [ECKSTEIN 1999] zu entnehmen.

2.7.1 Hyperelastische Materialgesetze

2.7.1.1 Theoretische Grundlage

Als Grundlage für die Beschreibung von hyperelastischen Materialien dient eine Formänderungsenergie- oder Potentialfunktion W_S

$$W_S = \rho_0 \psi . \quad (2.51)$$

Hierbei stellt ρ_0 die von der Deformation unabhängige Dichte im Referenzzustand und ψ die freie HELMHOLTZ-Energie dar. Setzt man ein isotropes elastisches Materialverhalten voraus, so ist es möglich, die freie Energie in Abhängigkeit des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors $\mathbf{C}$ oder alternativ in Abhängigkeit des linken CAUCHY-GREEN-Tensors $\mathbf{b}$ zu schreiben $\psi = \psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{b})$ [TRUESDELL & NOLL 1992]. Nach den DOYLE-ERICKSEN-Formeln ist es möglich durch partielle Ableitung der Potentialfunktion nach den Verzerrungen die Spannungen zu berechnen. Für die materielle Formulierung gilt daher

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} . \quad (2.52)$$

Ähnliches ist auch für die räumliche Formulierung möglich

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b} . \quad (2.53)$$

Den Materialtensor erhält man durch eine erneute partielle Ableitung dieser Ausdrücke in materieller Form

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (2.54)$$

und in räumlicher Form

$$J\mathbb{c} = 2 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{g}} = 4\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{e}} = 4\rho_0 \mathbf{b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}} \mathbf{b} . \quad (2.55)$$

Für isotropes Materialverhalten gibt es zwei Möglichkeiten die freie Energiefunktion aufzustellen. Zum einen kann sie durch die drei (Haupt-)Invarianten der Verzerrungen charakterisiert werden $\psi = \psi(I, II, III)$ mit $I = I_{\mathbf{C}} = I_{\mathbf{b}}$, $II = II_{\mathbf{C}} = II_{\mathbf{b}}$, $III = III_{\mathbf{C}} = III_{\mathbf{b}}$. Als Beispiele für elastische Materialmodelle in Invariantenformulierung gelten beispielsweise das MOONEY-RIVLIN- oder das Neo-HOOKE-Material.

Andererseits besteht die Möglichkeit, die freie Energie in Abhängigkeit der drei Hauptstreckungen anzugeben $\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit $\lambda_i = \lambda_{i\mathbf{C}} = \lambda_{i\mathbf{b}}$, wie das z.B. bei dem OGDEN-Materialmodell der Fall ist.

Durch die Wahl der Energiefunktion in Abhängigkeit der Invarianten oder der Hauptstreckungen ist das Prinzip der materiellen Objektivität erfüllt. Aufgrund der Hyperelastizität entfällt die Festlegung einer objektiven Spannungsrate. Zur Berechnung der Invarianten und Hauptstreckungen sei an dieser Stelle auf [BAŞAR & WEICHERT 2000] verwiesen.

Bei der Beschreibung hyperelastischer Materialmodelle werden häufig neben dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν auch noch das Schubmodul μ , das Kompressionsmodul κ und die LAME'sche Konstante λ eingesetzt. Es gilt für deren Zusammenhänge:

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu. \quad (2.56)$$

2.7.1.2 Verwendete Materialmodelle

In die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Elemente sind insgesamt vier hyperelastische Materialmodelle implementiert worden.

- ST. VENANT-KIRCHHOFF-Materialmodell:

$$W_S = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_{\mathbf{E}}^2 - 2\mu II_{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\kappa I_{\mathbf{E}}^2 - 2\mu II_{\text{dev}\mathbf{E}} \quad (2.57)$$

- Hyperelastisches Materialmodell 1:

$$W_S = \frac{\lambda}{4}(J^2 - 1) - \frac{1}{2}(\lambda - 2\mu)\ln J + \frac{1}{2}\mu(I_{\mathbf{b}} - 3) \quad (2.58)$$

- Neo-HOOKE'sches Materialmodell 1:

$$W_S = \frac{1}{2}\kappa(\ln J)^2 + \frac{1}{2}\mu[J^{-2/3}\text{tr}[\mathbf{b}] - 3] \quad (2.59)$$

- Neo-HOOKE'sches Materialmodell 2:

$$W_S = \kappa[\frac{1}{2}(J - 1)^2 - \ln J] + \frac{1}{2}\mu[J^{-2/3}\text{tr}[\mathbf{b}] - 3] \quad (2.60)$$

2.7.2 Elasto-plastische Materialgesetze

2.7.2.1 Theoretische Grundlage

In diesem Abschnitt wird die Formulierung der elasto-plastischen Beziehungen des Materialmodells dargestellt. Als Grundlage dieser Ausführungen dient die Arbeit von [SIMO 1992], [ECKSTEIN 1999] und [BAŞAR & ECKSTEIN 2000].

Wie im elastischen Fall stellt auch im elasto-plastischen Fall die Existenz der lokalen, freien Energiefunktion den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen dar. Neben dem linken CAUCHY-GREEN-Tensor $\mathbf{b}_e$ hängt sie zusätzlich noch von internen, skalaren inelastischen Variablen ab, die die Strukturänderung beschreiben. In dieser Arbeit erfolgt eine Beschränkung auf eine interne Variable, die skalare Größe q , mit der sich ein isotropes Verfestigungsverhalten beschreiben lässt. Desweiteren erfolgt eine additive Aufteilung der freien Energiefunktion in einen elastischen und einen inelastischen Anteil:

$$\psi = \psi(\mathbf{b}_e, q) := \psi_e(\mathbf{b}_e) + \psi_i(q) . \quad (2.61)$$

Die lokale Dissipationsungleichung ist im Falle isothermer Prozesse gegeben durch die Differenz der lokalen Spannungsleistung und der zeitlichen Änderung der lokalen freien Energie. Es gilt demzufolge:

$$\mathcal{D} := \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{b}_e, q) \geq 0 . \quad (2.62)$$

Setzt man die materielle Zeitableitung von $\mathbf{b}_e$ mit $\dot{\mathbf{b}}_e = \mathbf{l}\mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e\mathbf{l}^T + \mathcal{L}_v\mathbf{b}_e$ ein, gilt für die Zeitableitung der freien Energie:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}_e} : [\mathbf{l}\mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e\mathbf{l}^T + \mathcal{L}_v\mathbf{b}_e] + \frac{\partial\psi}{\partial q} \dot{q} \\ &= [2\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}_e}\mathbf{b}_e] : [\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1}] + \frac{\partial\psi}{\partial q} \dot{q} , \end{aligned} \quad (2.63)$$

unter der Annahme isotrop elastischen Materialverhaltens mit (2.53). Durch Einsetzen in die Dissipationsungleichung ergibt sich damit:

$$\mathcal{D} = [\boldsymbol{\tau} - 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}_e}\mathbf{b}_e] : \mathbf{d} + [2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}_e}\mathbf{b}_e] : [-\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1}] + \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial q} \dot{q} \geq 0 . \quad (2.64)$$

Der Deformationsgeschwindigkeitsgradient $\mathbf{d}$ kann beliebige Werte annehmen. Daher muss der Klammerausdruck des ersten Terms verschwinden. Hierdurch ergeben sich die folgenden konstitutiven Gleichungen und die reduzierte Form der Dissipationsungleichung:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}_e}\mathbf{b}_e \quad (2.65)$$

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : [-\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1}] + k\dot{q} \geq 0 \quad (2.66)$$

$$\text{mit} \quad k := \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial q} . \quad (2.67)$$

Zur Trennung von elastischen und inelastischen Zuständen wird weiterhin ein elastischer Bereich $\{\mathbb{E} \mid (\boldsymbol{\tau}, k) : \phi(\boldsymbol{\tau}, k) \leq 0\}$ festgelegt, der von einer Fließfläche begrenzt ist. Die Fließfunktion ϕ ist in Abhängigkeit der wahren KIRCHHOFF-Spannungen $\boldsymbol{\tau}$, die in der Momentankonfiguration des Körpers wirken, und der skalaren Variablen k , die energetisch konjugiert zu der internen Variable q ist, definiert.

Nach dem Prinzip der maximalen Dissipation nimmt der aktuelle Zustand $(\boldsymbol{\tau}, k)$ eines plastisch verformten Körpers in einer gegebenen, festgehaltenen Konfiguration und mit den vorgeschriebenen Raten $(\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1}, \dot{q})$ ein Maximum der Dissipation an. Damit muss die Gleichung

$$[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*] : \left[-\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1} \right] + [k - k^*]\dot{q} \geq 0 \quad (2.68)$$

für alle zulässigen Zustände $(\boldsymbol{\tau}^*, k^*)$ erfüllt sein. Aufgrund der Konvexität von $\mathbb{E}$ kann sie jedoch nur dann erfüllt sein, wenn die Koeffizienten $(-\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1}, \dot{q})$ in einem Kegel senkrecht zu $\partial\mathbb{E}$ am Punkt $(\boldsymbol{\tau}, k)$ liegen. Unter Berücksichtigung der Annahme eines glatten Randes $\partial\mathbb{E}$ ergeben sich damit folgende Evolutionsgleichungen:

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1} = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\tau}, k)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (2.69)$$

$$\dot{q} = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\tau}, k)}{\partial k} , \quad (2.70)$$

sowie, als zusätzliche Nebenbedingung, die Be- und Entlastungsbedingungen in KUHN-TUCKER-FORM

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, k) \leq 0, \quad \dot{\gamma}\phi(\boldsymbol{\tau}, k) = 0 , \quad (2.71)$$

womit sich ferner die Konsistenzbedingung

$$\dot{\gamma}\dot{\phi} = 0 \quad \text{mit} \quad \phi = 0 \quad (2.72)$$

ableiten lässt. Außerdem soll an dieser Stelle im Hinblick auf die Fließregel (2.69) folgende Definition für die Verzerrungsrate der inelastischen Deformationen eingeführt werden:

$$\mathbf{d}_i := -\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1} . \quad (2.73)$$

2.7.2.2 Verwendetes Materialmodell

Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Betrachtung des metallischen Werkstoffverhaltens die VON MISES-Fließbedingung angewendet:

$$\phi = \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}k(q) = 0 . \quad (2.74)$$

Zur Beschreibung des isotropen inelastischen Verfestigungsverhaltens dient die skalare Verfestigungsvariable q .

In das Element implementiert sind zwei allgemeine Ansätze für die Verfestigungsfunktion $k(q)$, zum einen Sättigungs-Verfestigungsverhalten mit zusätzlicher linearer Verfestigung

$$k(q) = \sigma_{Y_0} + (\sigma_{Y_\infty} - \sigma_{Y_0})(1 - e^{(-\delta q)}) + \bar{H} q \quad (2.75)$$

und zum anderen potentiell Verfestigungsverhalten

$$k(q) = a_1 (a_2 + q)^{a_3} . \quad (2.76)$$

Die Fließregel ergibt sich durch die Anwendung der Gleichung (2.69) auf die Fließfunktion (2.74):

$$\mathbf{d}_i = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e] \mathbf{b}_e^{-1} = \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (2.77)$$

mit $\mathbf{n} = \frac{\text{dev} \bar{\mathbf{b}}_e}{\|\text{dev} \bar{\mathbf{b}}_e\|}$ und $\bar{\mathbf{b}}_e = J_e^{-2/3} \mathbf{b}_e$.

Desweiteren gilt für die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigungsvariablen

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} . \quad (2.78)$$

Zusammenfassend lauten dann die konstitutiven Gleichungen bei großen elasto-plastischen Dehnungen ohne Schädigungseinfluß:

Elastizitätsgesetz:	$\boldsymbol{\tau} = \text{sph} \boldsymbol{\tau} + \text{dev} \boldsymbol{\tau}$
	$\text{sph} \boldsymbol{\tau} = \kappa \ln[J] \mathbf{g}$
	$\text{dev} \boldsymbol{\tau} = \mu \text{dev} \bar{\mathbf{b}}_e$
Fließfunktion:	$\phi = \ \text{dev} \boldsymbol{\tau}\ - \sqrt{\frac{2}{3}} k(q)$
Fließregel:	$\mathbf{d}_i = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e] \mathbf{b}_e^{-1} = \dot{\gamma} \mathbf{n}$
Evolutionsgleichung:	$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}$
Nebenbedingungen:	$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \phi = 0$

Tabelle 2.1: Elasto-Plastizitätsmodell für große Dehnungen

2.7.2.3 Numerische Implementierung

Tabelle 2.2 zeigt zusammenfassend den schematischen Ablauf der Integration der inelastischen Evolutionsgleichungen im Falle elasto-plastischer Deformationen.

1. <i>Update</i> aktuelle Konfiguration	4. <i>RETURN MAPPING</i>
$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}$	Berechne $\Delta \gamma$ aus
$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{g}^n + \Delta \mathbf{g}$	$\ \text{dev} \boldsymbol{\tau}\ ^{trial} - 2\bar{\mu}\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}}k(\Delta\gamma) = 0$
$= g_{ij}^{n+1} \mathbf{g}^{in+1} \otimes \mathbf{g}^{jn+1}$	mit $\bar{\mu} = \mu \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\mathbf{b}}_e^{trial}$
2. Berechne elastischen Prädiktor	<i>Return – Map :</i>
$\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} = \mu \text{dev} \bar{\mathbf{b}}_e^{trial}$	$\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} - 2\bar{\mu}\Delta\gamma \mathbf{n}$
3. Prüfe, ob Fließen vorliegt	$q^{n+1} = q^n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma$
$\phi^{trial} = \ \text{dev} \boldsymbol{\tau}\ ^{trial} - \sqrt{\frac{2}{3}}k(q^n)$	5. <i>Update</i> der Spannungen
IF $\phi^{trial} < 0$ THEN	$\text{sph} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \kappa \ln[J] \mathbf{g}^{n+1}$
Set $(\cdot)^{n+1} = (\cdot)^{trial}$ & EXIT	$\boldsymbol{\tau}^{n+1} = \text{sph} \boldsymbol{\tau}^{n+1} + \text{dev} \boldsymbol{\tau}^{n+1}$
ELSE	6. Berechne $\text{tr} \bar{\mathbf{b}}_e^{n+1}$ aus den Invarianten
GOTO 4	7. <i>Update</i> $\bar{\mathbf{b}}_e$
ENDIF	$\bar{\mathbf{b}}_e^{n+1} = \text{dev} \boldsymbol{\tau}^{n+1} / \mu + \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_e^{n+1}] \mathbf{g}^n$

Tabelle 2.2: *Return-Mapping*-Algorithmus bei Elasto-Plastizität

2.7.3 Schädigungsmodell

2.7.3.1 Theoretische Grundlage

In den vorausgegangenen Ausführungen der Formulierung des elasto-plastischen Materialgesetzes fand lediglich *eine* skalare inelastische Variable q , welche zur Charakterisierung eines isotropen inelastischen Verfestigungsverhaltens ausreicht, Anwendung. Unter der zusätzlichen Berücksichtigung duktiler isotroper Schädigungseinflüsse bei Metallen sind weitere, skalare interne (inelastische) Variablen erforderlich.

In dieser Arbeit wird das Modell durch Hinzufügen einer zusätzlichen internen Variablen β ergänzt [ROUSSELIER 1987], welche in der freien Energiefunktion Anwendung findet.

$$\psi = \psi(\mathbf{b}_e, q, \beta) . \quad (2.79)$$

Es ergibt sich unter Verwendung der zu β konjugierten Größe $B(\beta) := -\rho_0 \partial\psi/\partial\beta$ sowie $\mathbf{d}_i = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1}$ folgende Dissipationsgleichung:

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_i + k\dot{q} + B\dot{\beta} \geq 0 . \quad (2.80)$$

Mit einer Fließfunktion für rein plastische und schädigungsbezogene Anteile der Form

$$\phi = \phi_{ps} = \phi_{ps}(\boldsymbol{\tau}, k, B) \quad (2.81)$$

folgt somit für die gekoppelte Fließregel

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{ps} = \dot{\gamma} \frac{\partial\phi_{ps}(\boldsymbol{\tau}, k, B)}{\partial\boldsymbol{\tau}} . \quad (2.82)$$

Durch die partielle Ableitung dieser Fließfunktion nach der Variablen B erhält man die Evolutionsgleichung für die interne Variable β :

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma} \frac{\partial\phi_{ps}(\boldsymbol{\tau}, k, B)}{\partial B} . \quad (2.83)$$

2.7.3.2 Verwendetes Materialmodell

Zur Beschreibung der duktilen Schädigung ist das isotrope Porenwachstumsmodell von [ROUSSELIER 1987] in das verwendete Element implementiert worden. Das Schädigungsmodell stellt eine Erweiterung der Elasto-Plastizität dar.

Zur besseren Übersicht soll hier zunächst der inelastische Teil des Materialgesetzes betrachtet werden. Nach [ROUSSELIER 1987] lässt sich die Funktion $B(\beta)$, die in der Beschreibung des Dissipationspotentials ϕ_s auftritt, wie folgt angeben:

$$B(\beta) = \sigma_k F(\beta) . \quad (2.84)$$

Zwischen der physikalisch schlecht interpretierbaren Schädigungsvariablen β und dem Porenvolumenanteil f gilt darüber hinaus noch die differentielle Beziehung:

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{f}}{f(1-f)} . \quad (2.85)$$

Wenn nun noch der Zusammenhang zwischen den KIRCHHOFF- und den CAUCHY-Spannungen berücksichtigt wird, lässt sich die Fließfunktion von ROUSSELIER für große Dehnungen wie folgt darstellen:

$$\phi = \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}k(q) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_k f D \exp\left[\frac{\text{tr}\boldsymbol{\tau}}{3\sigma_k}\right] = 0 . \quad (2.86)$$

Durch die Anwendung der Fließregel erhält man:

$$\mathbf{d}_i = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1} = \dot{\gamma}\mathbf{n} + \dot{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{f}{3}C\mathbf{g} , \quad (2.87)$$

mit

$$\mathbf{n} = \frac{\text{dev}\mathbf{b}_e}{\|\text{dev}\mathbf{b}_e\|} \quad \text{und} \quad C = D \exp\left[\frac{\text{tr}\boldsymbol{\tau}}{3\sigma_k}\right] . \quad (2.88)$$

Es gilt weiterhin für die Evolutionsgleichungen der internen inelastischen Variablen q und des Schädigungsparameters f :

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma} \quad (2.89)$$

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma}f(1-f)D \exp\left[\frac{\text{tr}\boldsymbol{\tau}}{3\sigma_k}\right] . \quad (2.90)$$

Durch den Einfluss der duktilen Mikroporenschädigungsmechanismen ist die Inkompressibilität der inelastischen Dehnungen nicht mehr erfüllt, da das Porenwachstum inelastische sphärische Verzerrungsanteile zur Folge hat. Dennoch lässt sich die Änderung des inelastischen oder volumetrischen Teils der JACOBI-Determinante J_i in einen rein plastischen Anteil J_p und in einen Anteil der Schädigung J_s aufspalten. Es folgt mit $J_s = \frac{1-f_0}{1-f}$ die

Aufteilung der JACOBI-Determinante der Gesamtdeformation J in elastische und schädigungsbezogene Anteile:

$$J_p = 1 \rightarrow J = J_e J_p J_s = J_e \frac{1 - f_0}{1 - f}, \quad (2.91)$$

wobei f_0 das Anfangsporenvolumen, d.h. die Vorschädigung, bezeichnet.

Neben der Fließfunktion ϕ stellt die Verzerrungsenergiefunktion W_S eine wichtige konstitutive Annahme des Materialgesetzes dar. Für dessen freie HELMHOLTZ-Energie ψ wird folgende additive Aufteilung angenommen:

$$\psi = \psi(\mathbf{b}_e, q, f) := \psi_e(\mathbf{b}_e) + \psi_p(q) + \psi_s(f), \quad (2.92)$$

wobei der elastische Anteil durch das hyperelastische kompressible Neo-HOOKE-Material nach Gl. (2.59) festgelegt ist.

2.7.3.3 Porenentstehungskriterien

Die Berücksichtigung der Porenentstehung erfolgt auf zwei Arten:

- zum einen durch das Spannungskriterium von [ARGON & SAFOGLU 1975] und [BEREMIN 1981], für das zusammenfassend gilt:

$$f = \begin{cases} f & \text{für } \sigma_X < \sigma_{Xn} \\ f + \mathcal{S}(t_n) \cdot f_X & \text{für } \sigma_X \geq \sigma_{Xn} \end{cases} \quad (X = A, B), \quad (2.93)$$

wobei $\mathcal{S}(t_n)$ die Sprungfunktion bezeichnet

$$\mathcal{S}(t_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_n \\ 1 & \text{für } t \geq t_n \end{cases}, \quad t = t_n, \text{ wenn } \sigma_X = \sigma_{Xn}, \quad (2.94)$$

und f_X die Größe des Porensprungs darstellt. Die Spannungswerte σ_X ($X = A, B$) der beiden Kriterien werden wie folgt berechnet ($k_A = 1$):

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sigma_{eq} + \sigma_m &= \frac{1}{J} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}\| + \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\tau} \right), \\ \sigma_B &= \sigma_{max} + k_B (\sigma_{eq} - \sigma_{Y0}) &= \frac{1}{J} \left(\boldsymbol{\tau}_{max} + k_B (\sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}\| - \sigma_{Y0}) \right). \end{aligned} \quad (2.95)$$

- zum anderen findet das verzerrungsgesteuerte Porenentstehungskriterium von [CHU & NEEDLEMAN 1980] Verwendung, wonach gilt:

$$\dot{f}_{nucl} = F\dot{q} = F\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma} \quad \text{mit} \quad F(q) = \frac{f_N}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q - \epsilon_N}{s}\right)^2\right]. \quad (2.96)$$

Dadurch erweitert sich die Evolutionsgleichung für den Porenvolumenanteil f wie folgt:

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucl} + \dot{f}_{growth} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma} [F(q) + f(1-f)C(f)], \quad (2.97)$$

wobei die Funktion $F(q)$ der Gl. (2.96) zu entnehmen ist und für die Variable $C(f)$ die folgende Definition gilt:

$$C(f) = D\exp\left[\frac{\text{tr}[\boldsymbol{\tau}]}{3\sigma_k}\right] = D\exp\left[\frac{\kappa \ln J_e(f)}{\sigma_k}\right] = D\exp\left[\frac{\kappa \ln\left(J \frac{1-f}{1-f_0}\right)}{\sigma_k}\right]. \quad (2.98)$$

Desweiteren wird angenommen, daß Porenevolution nur stattfinden kann, wenn Zugspannungen vorliegen, d.h. es gilt

$$\dot{f} = \begin{cases} \dot{f} & \text{für } \text{tr}\boldsymbol{\tau} > 0 \\ 0 & \text{für } \text{tr}\boldsymbol{\tau} \leq 0 \end{cases}, \quad (2.99)$$

Außerdem fließen die verzerrungs- und schädigungsorientierten Bruchkriterien als Nebenbedingung in das Materialgesetz ein.

Zusammenfassend ist schließlich das in diesem Element verwendete Schädigungsmodell von ROUSSELIER in der modifizierten und erweiterten Form für große Dehnungen in **Tabelle 2.3** dargestellt.

Elastizitätsgesetz:	$\boldsymbol{\tau} = \text{sph}\boldsymbol{\tau} + \text{dev}\boldsymbol{\tau}$ $\text{sph}\boldsymbol{\tau} = \kappa \ln[J_e] \mathbf{g}$ $\text{dev}\boldsymbol{\tau} = \mu J_e^{-2/3} \text{dev}\mathbf{b}_e$
Fließfunktion:	$\phi = \ \text{dev}\boldsymbol{\tau}\ - \sqrt{\frac{2}{3}}k(q) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_k f C(f) = 0$ $\text{mit: } C(f) = D \exp\left[\frac{\text{tr}\boldsymbol{\tau}}{3\sigma_k}\right]$
Fließregel:	$\mathbf{d}_i = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_v[\mathbf{b}_e]\mathbf{b}_e^{-1} = \dot{\gamma}\mathbf{n} + \dot{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}f C(f) \mathbf{g}$
Evolutionsgleichungen:	$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma}$ $\dot{f} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma}[f(1-f)C(f) + F(q)]$
Nebenbedingungen:	$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \phi \leq 0 \quad \dot{\gamma}\phi = 0$
Poreninitiiierung:	$F(q) = \frac{f_N}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q - \varepsilon_N}{s}\right)^2\right]$ $f = \begin{cases} f & \text{für } \sigma_X < \sigma_{Xn} \\ f + \mathcal{S}(t_n) \cdot f_X & \text{für } \sigma_X \geq \sigma_{Xn} \end{cases} \quad (X = A, B)$ $\sigma_A = \frac{1}{J} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \ \text{dev}\boldsymbol{\tau}\ + \frac{1}{3} \text{tr}\boldsymbol{\tau} \right)$ $\sigma_B = \frac{1}{J} \left(\boldsymbol{\tau}_{max} + k_B \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \ \text{dev}\boldsymbol{\tau}\ - \sigma_{Y_0} \right) \right)$
Porenwachstum:	$\dot{f} = \begin{cases} \dot{f} & \text{für } \text{tr}\boldsymbol{\tau} > 0 \\ 0 & \text{für } \text{tr}\boldsymbol{\tau} \leq 0 \end{cases}$
Bruchkriterien:	$p = \int_0^t \frac{1}{1-f} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p d\tau = p_c$ $\varepsilon = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\tau = \varepsilon_c$ $f = f_c$ $\ln \frac{R}{R_0} = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_c} 0.283 e^{\frac{3}{2} \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}} d\varepsilon_{eq}^p = \left(\ln \frac{R}{R_0} \right)_c$ $\frac{R}{R_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)_c$

Tabelle 2.3: Elasto-Plastizitätsmodell mit Schädigung für große Dehnungen**2.7.3.4 Numerische Implementierung**

Der schematische Ablauf der Integration des inelastischen Materialgesetzes unter Schädigungseinfluss ist schließlich zusammenfassend in **Tabelle 2.4** dargestellt.

1. <i>Update</i> aktuelle Konfiguration $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}$ $\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{g}^n + \Delta^L \mathbf{g} = g_{ij}^{n+1} \mathbf{g}^{i n+1} \otimes \mathbf{g}^{j n+1}$ 2. Berechne elastischen Prädiktor $\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{trial} = \mu [J_e^{trial}]^{-2/3} \text{dev} \mathbf{b}_e^{trial}$ 3. Prüfe, ob Fließen vorliegt $\phi^{trial} = \ \text{dev} \boldsymbol{\tau}\ ^{trial} - \sqrt{\frac{2}{3}} k(q^{trial})$ $+ \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_k f^{trial} C(f^{trial})$ IF $\phi^{trial} < 0$ THEN Set $(\cdot)^{n+1} = (\cdot)^{trial}$ & EXIT ELSE GOTO 4 ENDIF	4. <i>RETURN MAPPING</i> Berechne $\Delta \gamma, f^{n+1}$ aus $\left\{ \begin{array}{l} \phi^{n+1}(\Delta \gamma, f^{n+1}) = 0 \\ \chi^{n+1}(\Delta \gamma, f^{n+1}) = 0 \end{array} \right\}$ <i>Return – Map :</i> $\text{dev} \mathbf{b}_e^{n+1} = \text{dev} \mathbf{b}_e^{trial} - \frac{2}{3} \Delta \gamma \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{n}^{n+1}$ $q^{n+1} = q^n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \gamma$ 5. <i>Update</i> Spannungen $\text{sph} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \kappa \ln[J_e^{n+1}] \mathbf{g}^{n+1}$ $\text{dev} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mu [J_e^{n+1}]^{-2/3} \text{dev} \mathbf{b}_e^{n+1}$ mit $J_e^{n+1} = J^{n+1} \frac{1-f^{n+1}}{1-f_0}$ 6. Berechne $\text{tr} \mathbf{b}_e^{n+1}$ aus den Invarianten 7. <i>Update</i> $\mathbf{b}_e$ $\mathbf{b}_e^{n+1} = \text{dev} \mathbf{b}_e^{n+1} + \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e]^{n+1} \mathbf{g}^{n+1}$
---	--

Tabelle 2.4: *Return-Mapping-Algorithmus bei Elasto-Plastizität mit Schädigungseinfluss*

2.8 Parametrisierung des Direktors

Die Parametrisierung des Direktors $\mathbf{d}$ war in der Vergangenheit Gegenstand intensiver Forschungen, wobei sich neben

- der Beibehaltung der Einheitslänge insbesondere die
- Beschreibung zusammengesetzter Schalen

als problematisch erwies. Eine detaillierte Übersicht diesbezüglicher Lösungsansätze findet sich in der Arbeit von Büchter [BÜCHTER 1992]. Hier sollen lediglich zwei Methoden genannt werden, die einen Bezug zu dieser Arbeit aufweisen.

2.8.1 EULER-Winkel

Die erste Variante ist die von Ramm [RAMM 1976] vorgeschlagene Parametrisierung des Direktors durch EULER-Winkel, die unter anderem in den Arbeiten [BAŞAR & DING 1992] und [ECKSTEIN 1999] erfolgreich eingesetzt wurde.

Die Rotationsbeschreibung mit Hilfe der EULER-Winkel läßt sich als eine Parametrisierung durch Kugelkoordinaten in einer Einheitskugel deuten, wodurch eine a priori Erfüllung der Nebenbedingung $\|\mathbf{d}\| = 1$ gewährleistet ist (Abbildung 2.6).

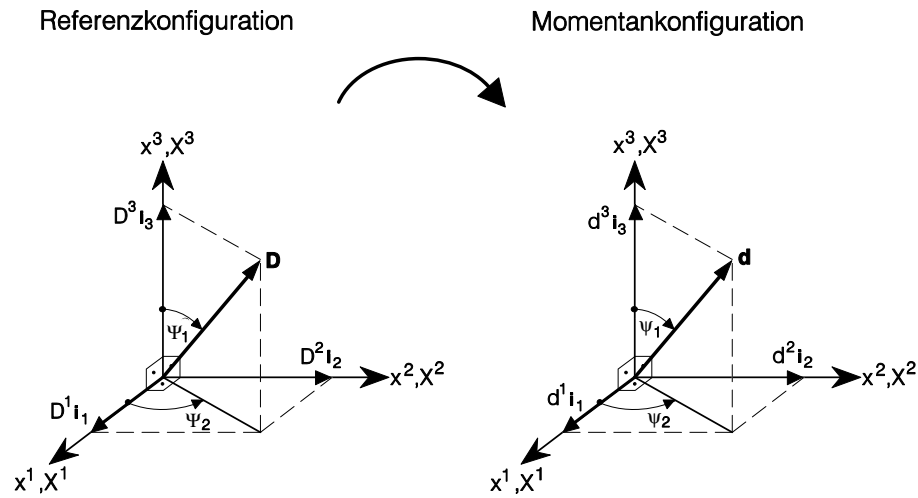


Abbildung 2.6: Beschreibung des Schalendirektors durch Euler-Winkel

Es kann demzufolge der Direktor sowohl in der Momentan- als auch in der Referenzkonfiguration durch zwei Winkel Ψ^α bzw. ψ^α parametrisiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= D^i(\Psi_\alpha) \mathbf{i}_i = \sin \Psi_1 \cos \Psi_2 \mathbf{i}_1 + \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 \mathbf{i}_2 + \cos \Psi_1 \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{d} &= d^i(\psi_\alpha) \mathbf{i}_i = \sin \psi_1 \cos \psi_2 \mathbf{i}_1 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \mathbf{i}_2 + \cos \psi_1 \mathbf{i}_3 . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Diese Methode erweist sich als leistungsfähig, solange es um die Berechnung von einfachen Schalen geht. Bei der Analyse von zusammengesetzten Strukturen versagt dieses Konzept, da keine konsistente Kopplung der Rotationsfreiheitsgrade möglich ist. Daher ist es in einem solchen Fall notwendig zu einer Schalentheorie zu wechseln, in der der Direktor drei Rotationsfreiheitsgrade aufweist.

Eine dieser Varianten stellt die Beschreibung mit Hilfe des RODRIGUEZ-Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$ dar. Hierbei werden zusätzlich Drillfreiheitsgrade um den Direktor postuliert, die zur Simulation von Schalenverschnitten mit biegesteifen Anschlüssen erforderlich sind. In diesem Zusammenhang kann die “*Updated-Rotations-Formulierung*” (**Kapitel 3.4.3**) angewendet werden, bei der der Direktor in jedem Iterationsschritt multiplikativ aktualisiert wird.

2.8.2 Rotationsformulierung

Diese Methode wurde erstmals von Simo und Fox [SIMO & FOX 1989] angewendet und danach ebenfalls von [MENZEL 1996] und [KINTZEL 1998] genutzt.

Sie stellt im Rahmen dieser Arbeit einen zentralen Punkt dar, da die Aufgabe darin bestand, die Formulierung mit Euler-Winkeln gegen eine *Updated-Rotations-Formulierung* auszutauschen.

Ausgehend von einem beliebigen festen Einheitsvektor, beispielsweise $\mathbf{i}_3$, wird die Rotation des Direktors durch

$$\mathbf{d} = \mathbf{R} \mathbf{i}_3 \quad (2.101)$$

beschrieben. $\mathbf{R}$ ist dabei der sogenannte Rotationstensor, welcher orthogonal ist [BAŞAR 2000]. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{R}^T &= \mathbf{I} \\ \Rightarrow \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T &= -\mathbf{R} \delta \mathbf{R}^T, \end{aligned} \quad (2.102)$$

was belegt, dass $\delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T$ ein schiefsymmetrischer Tensor ist. Ein solcher Tensor lässt sich durch ein Kreuzprodukt seines Axialvektors $\boldsymbol{\omega}$ darstellen. Die erste Variation des Direktors $\mathbf{d}$ aus (2.101) lässt sich damit ermitteln zu:

$$\delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{R} \mathbf{i}_3 = \delta \mathbf{R} \mathbf{i}_3 = \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{i}_3 = \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{d} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d}. \quad (2.103)$$

Mit der Voraussetzung $\delta \boldsymbol{\omega} = 0$ erhält man für die Variationen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathbf{d} &= \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{d} = \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{d} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \\ &= -\mathbf{d}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}) = \hat{\boldsymbol{\omega}} \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{d} = \hat{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{d} \\ \delta^n \mathbf{d} &= \hat{\boldsymbol{\omega}}^n \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

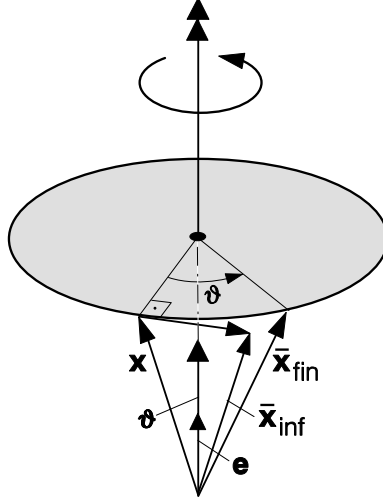


Abbildung 2.7: Infinitesimale und finite Rotation

Man unterscheidet zwei Arten von Rotationen (**Abbildung 2.7**), zum einen die infinitesimale Rotation des Direktors, welche alleine durch die erste Variation beschrieben wird, zum anderen die finite Rotation. Die finite Rotation eines Vektors $\mathbf{d}$ in eine neue Position $\bar{\mathbf{d}}$ ist durch eine Taylorreihe definiert:

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + \delta \mathbf{d} + \frac{1}{2!} \delta^2 \mathbf{d} + \dots + \frac{1}{n!} \delta^n \mathbf{d} + \dots \quad (2.105)$$

Mit der Hilfe von (2.103) und (2.104) ist eine Umformung möglich zu:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= (\mathbf{I} + \hat{\omega} + \frac{1}{2!} \hat{\omega}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \hat{\omega}^n + \dots) \mathbf{d} \\ &= \exp(\hat{\omega}) \mathbf{d} . \end{aligned} \quad (2.106)$$

[KINTZEL 1998] hat nachgewiesen, dass mit Hilfe der Reihendarstellung des Cosinus und des Sinus diese Gleichung transformiert werden kann in:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= (\mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} \hat{\omega} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \hat{\omega} \hat{\omega}) \mathbf{d} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{d} . \end{aligned} \quad (2.107)$$

Der in (2.103) eingeführte Axialvektor ist dabei der in (2.107) verwendete RODRIGUES-Rotationsvektor, der die Rotation von $\mathbf{d}$ in $\bar{\mathbf{d}}$ exakt beschreibt.

Die im Rahmen der Rotationsformulierung eingeführten inkrementellen Rotationen ω sind in der orthonormalen globalen Basis $\mathbf{i}_i$ definiert:

$$\omega = \omega^i \mathbf{i}_i . \quad (2.108)$$

Im Gegensatz zu der Eulerwinkelformulierung besitzt diese Formulierung drei Rotationsfreiheitsgrade.

2.9 Mehr-Schichten-Konzept

Die bisher behandelte Ein-Schichten-Theorie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie transversale Schub- und Normalverzerrungen lediglich konstant approximieren kann. Die Ermittlung eines genauen Spannungsverlaufes über die Schalendicke sowie die Simulation unterschiedlicher Materialeigenschaften ist im Rahmen dieser Theorie somit nicht möglich. Es bedarf der Einführung eines Mehr-Schichten-Modells, um interlaminare Spannungen, welche bei der Schädigungsanalyse zusammengesetzter Lamine eine wichtige Rolle spielen, ermitteln zu können.

In diesem Modell wird die Ein-Schichten-Theorie durch ein Mehr-Schichten-Konzept ersetzt, um dadurch eine feinere Diskretisierung in transversaler Richtung zu erreichen. Die essentielle Idee des Mehr-Schichten-Modells beruht darin, das Kontinuum in mehrere ($nlay$) Lamine zu unterteilen (**Abbildung 2.8**). Auf jedes so entstandene Subelement lässt sich die Theorie des Ein-Schichten-Modells separat anwenden. Dadurch ist es möglich, die Schichten mit unterschiedlichen Höhen und unterschiedlichen Materialeigenschaften zu belegen.

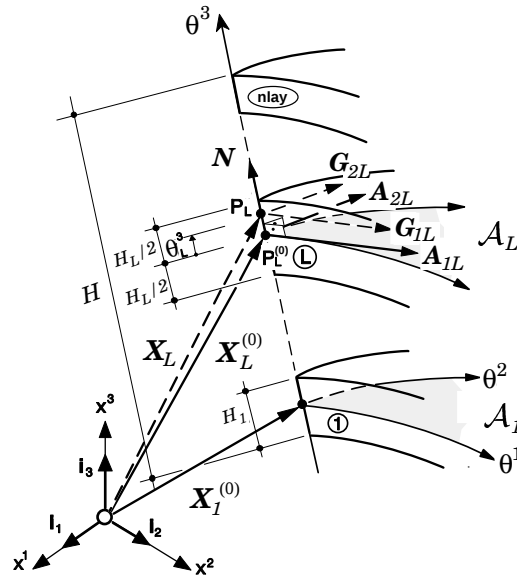


Abbildung 2.8: Geometrie des unverformten Schalenkontinuums mit $nlay$ Subelementen

Die Gesamthöhe H der Schale ergibt sich aus der Summe der Einzelhöhen H_L ($L = 1, \dots, nlay$) der Subelemente.

$$H = \sum_{L=1}^{nlay} H_L \quad (2.109)$$

Als Referenzfläche des Schalenkontinuums gilt die Mittelfläche des ersten Subelementes, so dass das Gesamtkontinuum durch $-H_1/2 \leq \Theta^3 \leq H - H_1/2$ gekennzeichnet ist (**Abbildung 2.8**).

Abschließend findet eine Kopplung aller Subelemente zur Gesamtstruktur statt, welche durch die Erfüllung der C^0 -Kontinuität des Verschiebungsfeldes entlang der transversalen Schnittstellen der Subelemente erreicht wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_L(\Theta_L^3 = -\frac{H_L}{2}) &= \mathbf{x}_{L-1}(\Theta_{L-1}^3 = +\frac{H_{L-1}}{2}) \\ \mathbf{x}_L^{(0)} - \frac{H_L}{2} \mathbf{x}_L^{(1)} &= \mathbf{x}_{L-1}^{(0)} + \frac{H_{L-1}}{2} \mathbf{x}_{L-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Durch die C^0 -Kontinuität sind die Positionsvektoren der Schalenmittelflächen $\mathbf{x}_L^{(0)}$ ($L = 2, \dots, nlay$) rekursiv ermittelbar, d. h. sie sind abhängige Größen; nur der Positionsvektor der Schalenmittelfläche des ersten Subelementes $\mathbf{x}_1^{(0)}$ stellt eine unabhängige Variable dar. Folglich lässt sich der Positionsvektor eines beliebigen Punktes P eines Subelementes L im verformten Schalenraum $\mathbf{x}_L$ ($L = 1, \dots, nlay$) in der 6-parametrischen Formulierung unter Berücksichtigung von (2.110) in Abhängigkeit der lokalen Dickenkoordinate Θ_L^3 zu:

$$\mathbf{x}_L(\Theta_L^3) = \mathbf{x}_1^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{L-1} [H_K \lambda_K \mathbf{d}_K + H_{K+1} \lambda_{K+1} \mathbf{d}_{K+1}] + \Theta_L^3 \lambda_L \mathbf{d}_L \quad (2.111)$$

angeben.

Für den in dieser Arbeit verwendeten (6+1)-parametrischen kinematischen Verschiebungsansatz entsteht somit eine Kinematik mit $3 + (3 + 1) \cdot nlay = 3 + 4 nlay$ Freiheitsgraden.

Da der Verschiebungszustand in jedem Subelement mit $\mathbf{x}_L(\Theta_L^3)$ ($L = 1, \dots, nlay$) bekannt ist, können die Deformations- und Verzerrungsvariablen sowie die energiekonjugierten Spannungsschnittgrößen für jedes Subelement L mit den in den vorherigen Teilabschnitten gezeigten Beziehungen bestimmt werden.

Die virtuelle Arbeit des gesamten Laminates setzt sich dann aus der Summe der virtuellen Arbeiten aller Subelemente $L = 1, \dots, nlay$ zusammen.

Detaillierte Ausführungen der hier verwendeten Mehrschichtenkinematik sind den Arbeiten [BAŞAR 1993], [BAŞAR & DING 1995], [SCHULTZ 1996], bzw. [BAŞAR, ITSKOV & ECKSTEIN 1999] zu entnehmen.

2.10 Prinzip der virtuellen Arbeit

Das Prinzip der virtuellen Arbeit, auch bekannt als das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, stellt eine schwache Formulierung der Bilanzgleichung des Impulses, also eine globale Gleichgewichtsaussage dar. Die Summe aller virtuellen Arbeiten eines sich im Gleichgewicht befindlichen Tragwerkes muss verschwinden

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_a = 0 . \quad (2.112)$$

Es ist ein Variationsprinzip, welches sich durch skalare Multiplikation der lokalen, differentiellen Impulsbilanz mit virtuellen, frei wählbaren Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$, die lediglich die kinematischen Randbedingungen erfüllen müssen, und anschließender Integration über das Gebiet des Körpers ergibt.

Man spricht auch von einer globalen Gleichgewichtsaussage, da durch die vorgenommene Integration über ein Element nur eine Aussage über das ganze Element, jedoch keine Aussage über einzelne Punkte vorgenommen werden kann.

Am Rand $\partial \mathcal{B}$, also auf der Oberfläche eines Körpers $\mathcal{B}$, sind dazu geometrische (DIRICHLET) und statische (NEUMANN) Randbedingungen vorzuschreiben, wobei die Ränder $\partial_u \mathcal{B}$ und $\partial_\sigma \mathcal{B}$ sich nicht überlappen dürfen. Der Teil des Randes, der die geometrischen Randbedingungen enthält ($\partial_u \mathcal{B}$), und der Teil des Randes, der die statischen Randbedingungen beinhaltet ($\partial_\sigma \mathcal{B}$), bilden demzufolge den gesamten Rand $\partial \mathcal{B}$, für den gilt:

$$\partial \mathcal{B} = \partial_u \mathcal{B} \cup \partial_\sigma \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad \partial_u \mathcal{B} \cap \partial_\sigma \mathcal{B} = \emptyset . \quad (2.113)$$

In Bezug auf die Referenzkonfiguration gilt für die Randbedingungen:

$$\mathbf{PN} = \bar{\mathbf{T}} \quad \text{auf} \quad \partial_\sigma \mathcal{B} . \quad (2.114)$$

Es ist auch eine Formulierung mit Bezug auf die Momentankonfiguration möglich:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \partial_\sigma \mathcal{B}_t . \quad (2.115)$$

Für die Verschiebungsrandbedingungen gilt:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial_u \mathcal{B} . \quad (2.116)$$

Die in diesen Beziehungen durch einen Querstrich ($\bar{\cdot}$) gekennzeichneten Symbole stellen vorgeschriebene Randvariablen dar.

Die materielle Gleichgewichtsbedingung in ihrer schwachen Form mit dem Lastvektor $\mathbf{f}$

$$\int_{\mathcal{B}} (\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} (\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{P}\mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{A} = 0, \quad (2.117)$$

lässt sich unter Berücksichtigung des GAUSS'schen Integralsatzes umformen zu:

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{A} \\ &\quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ mit } \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_u \mathcal{B}, \end{aligned} \quad (2.118)$$

wobei zu erkennen ist, dass der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor und die Variation des Deformationsgradienten ein energetisch konjugiertes Spannungs- und Verzerrungsmaß bilden.

Die äquivalente Formulierung in den Größen des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors und des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors ist von großem Interesse:

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{A} \\ \delta W &= \delta W_i + \delta W_a = 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \text{ mit } \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_u \mathcal{B},$$

da sie im Rahmen dieser Arbeit Anwendung findet.

Analog folgt in räumlicher Darstellung:

$$\begin{aligned} \delta w(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{u} dv - \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{a} \\ &\quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ mit } \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_u \mathcal{B}_t. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Durch die Transformation der Integrationsgrenzen unter Verwendung des KIRCHHOFF'schen Spannungstensors und der Identität $dv = J dV$ ist eine Umformung möglich, zu:

$$\begin{aligned} \delta w(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\tau} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} dV - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} d\bar{A} \\ \delta W &= \delta W_i + \delta W_a = 0 \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \text{ mit } \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_u \mathcal{B}.$$

Eine genauere Erläuterung des Terms der inneren virtuellen Arbeit δW_i mit Hilfe der Aufspaltung in die Komponenten der beiden energetisch konjugierten Spannungs- und Verzerrungsmaße (2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor und GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor) erfolgt im **Kapitel 2.6.1**.

2.11 Linearisierung

2.11.1 Allgemeines

Da sich bei geometrischer Nichtlinearität meist keine analytische Lösung finden lässt, greift man auf iterative Lösungsverfahren zurück, wie beispielsweise das NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Dieses Verfahren entspricht einer, nach dem ersten Glied abgebrochenen, Taylor-Reihenentwicklung. Mit anderen Worten findet eine Linearisierung des nichtlinearen Funktionals statt.

2.11.2 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

Für den linearen Anteil eines nichtlinearen Funktionals $G(\mathbf{u})$ in materieller Darstellung an der Stelle $\bar{\mathbf{u}}$ ergibt sich demzufolge:

$$LG(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) := G(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) + D_{\mathbf{u}}G(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u}, \quad (2.122)$$

wobei die sogenannte Richtungs- oder Gâteaux-Ableitung $D_{\mathbf{u}}$ gemäß der Vorschrift

$$D_{\mathbf{u}}G(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} := \frac{d}{d\varepsilon} [G(\bar{\mathbf{u}} + \varepsilon\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})]_{\varepsilon=0} \quad (2.123)$$

gebildet wird.

Unter Beschränkung auf konservative Lasten entfällt die Linearisierung der äußeren Lasten und es kann folgende linearisierte Form des Funktionals (2.119) in materieller Darstellung erhalten werden:

$$\begin{aligned} \Delta\delta W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{f} : \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial_{\sigma}\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} : \delta\mathbf{u} d\bar{A} \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \Delta\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E} dV = 0. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Analog lässt sich die linearisierte Form dieses Funktionals auch in der räumlichen Darstellung bilden, welche in dieser Arbeit verwendet wird. Hierbei findet die LIE-Inkrementierung $\Delta_{\mathcal{L}}$ Anwendung.

$$\begin{aligned} \Delta\delta w(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\tau} : \delta_{\mathcal{L}}\mathbf{e} dV - \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{f} : \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial_{\sigma}\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} : \delta\mathbf{u} d\bar{A} \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \Delta_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\tau} : \delta_{\mathcal{L}}\mathbf{e} dV + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\tau} : \Delta_{\mathcal{L}}\delta_{\mathcal{L}}\mathbf{e} dV = 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

2.11.3 Linearisierung der GREEN'schen Verzerrungen

Der vorangegangene Abschnitt hat gezeigt, dass zur Lösung von geometrisch nichtlinearen Problemen die in **Kapitel 2.5** eingeführten GREEN'schen Verzerrungsgleichungen in ihrer linearisierten Form benötigt werden. Im Folgenden werden die Variation bzw. Linearisierung der Komponenten des Verzerrungstensors für die in dieser Arbeit verwendete 6-parametrig Formulierung hergeleitet. Das Variationssymbol δ kann mit der Linearisierung Δ vertauscht werden, da beide Operationen einer Richtungs- bzw. Gâteaux-Ableitung entsprechen. Es wird im weiteren von der Linearisierung der 1. Variation gesprochen.

Aus Gründen der Vollständigkeit, werden auf dieser Seite noch einmal die Komponenten des GREEN'schen Verzerrungstensors im Grundzustand aufgeführt.

Grundzustand der GREEN'schen Verzerrungstensorkomponenten einer 6-parametrischen Schalenkinematik:

- $$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^{(0)} + \Theta^3 E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\Theta^3)^2 E_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta) \\ E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2}(((\lambda \mathbf{d})_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta + (\lambda \mathbf{d})_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha) - (\mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{A}_\beta + \mathbf{D}_{,\beta} \cdot \mathbf{A}_\alpha)) \\ E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\lambda_{,\alpha} \lambda_{,\beta} + \lambda^2 \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}) \end{aligned} \quad (2.127)$$

- $$E_{\alpha 3} = E_{\alpha 3}^{(0)} + \Theta^3 E_{\alpha 3}^{(1)} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha 3}^{(0)} &= \frac{1}{2} \lambda \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha \\ E_{\alpha 3}^{(1)} &= \frac{1}{2} \lambda \lambda_{,\alpha} \end{aligned} \quad (2.129)$$

- $$E_{33} = E_{33}^{(0)} \quad (2.130)$$

$$E_{33}^{(0)} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad (2.131)$$

Die 1. Variation der GREEN'schen Verzerrungstensorkomponenten einer 6-parametrischen Schalenkinematik:

- $$\delta E_{\alpha\beta} = \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} + \Theta^3 \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\Theta^3)^2 \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta + \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta] \\ \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}_\alpha \cdot (\mathbf{d} \delta \lambda)_{,\beta} + \mathbf{a}_\alpha \cdot (\lambda \delta \mathbf{d})_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot (\mathbf{d} \delta \lambda)_{,\alpha} \\ &\quad + \mathbf{a}_\beta \cdot (\lambda \delta \mathbf{d})_{,\alpha} + \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot (\lambda \mathbf{d})_{,\beta} + \delta \mathbf{a}_\beta \cdot (\lambda \mathbf{d})_{,\alpha}] \\ \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2} [\delta \lambda_{,\alpha} \lambda_{,\beta} + \lambda_{,\alpha} \delta \lambda_{,\beta} + 2 \lambda \delta \lambda \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} \\ &\quad + \lambda^2 \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \lambda^2 \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta}] \end{aligned} \quad (2.133)$$

- $$\delta E_{\alpha 3} = \delta E_{\alpha 3}^{(0)} + \Theta^3 \delta E_{\alpha 3}^{(1)} \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{\alpha 3}^{(0)} &= \frac{1}{2} [\delta \lambda \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \lambda \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \lambda \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha] \\ \delta E_{\alpha 3}^{(1)} &= \frac{1}{2} [\delta \lambda \lambda_{,\alpha} + \lambda \delta \lambda_{,\alpha}] \end{aligned} \quad (2.135)$$

- $$\delta E_{33} = \delta E_{33}^{(0)} \quad (2.136)$$

$$\delta E_{33}^{(0)} = \lambda \delta \lambda \quad (2.137)$$

Die Linearisierung der 1. Variation der GREEN'schen Verzerrungstensorsorkomponenten einer 6-parametrischen Schalenkinematik:

$$\bullet \quad \Delta \delta E_{\alpha\beta} = \Delta \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} + \Theta^3 \Delta \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} + (\Theta^3)^2 \Delta \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{1}{2} [\Delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta + \Delta \mathbf{a}_\beta \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha \\ &\quad + \mathbf{a}_\alpha \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\beta \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_\alpha] \\ \Delta \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}_\beta \cdot (\Delta \mathbf{d} \delta \lambda)_{,\alpha} + \mathbf{a}_\beta \cdot (\Delta \lambda \delta \mathbf{d})_{,\alpha} + \mathbf{a}_\alpha \cdot (\Delta \mathbf{d} \delta \lambda)_{,\beta} \\ &\quad + \mathbf{a}_\alpha \cdot (\Delta \lambda \delta \mathbf{d})_{,\beta} + \delta \mathbf{a}_\beta \cdot (\lambda \Delta \mathbf{d})_{,\alpha} + \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot (\lambda \Delta \mathbf{d})_{,\beta} \\ &\quad + \mathbf{a}_\beta \cdot (\lambda \Delta \delta \mathbf{d})_{,\alpha} + \mathbf{a}_\alpha \cdot (\lambda \Delta \delta \mathbf{d})_{,\beta} + \delta \mathbf{a}_\beta \cdot (\Delta \lambda \mathbf{d})_{,\alpha} \\ &\quad + \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot (\Delta \lambda \mathbf{d})_{,\beta} + \Delta \mathbf{a}_\beta \cdot (\mathbf{d} \delta \lambda)_{,\alpha} + \Delta \mathbf{a}_\alpha \cdot (\mathbf{d} \delta \lambda)_{,\beta} \\ &\quad + \Delta \mathbf{a}_\beta \cdot (\lambda \delta \mathbf{d})_{,\alpha} + \Delta \mathbf{a}_\alpha \cdot (\lambda \delta \mathbf{d})_{,\beta} + \Delta \delta \mathbf{a}_\beta \cdot (\lambda \mathbf{d})_{,\alpha} \\ &\quad + \Delta \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot (\lambda \mathbf{d})_{,\beta}] \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} &= \frac{1}{2} [\delta \lambda_{,\alpha} \Delta \lambda_{,\beta} + \Delta \lambda_{,\alpha} \delta \lambda_{,\beta} + 2 \Delta \lambda \delta \lambda \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} \\ &\quad + 2 \lambda \delta \lambda \Delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + 2 \lambda \delta \lambda \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta \mathbf{d}_{,\beta} + 2 \lambda \Delta \lambda \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} \\ &\quad + 2 \lambda \Delta \lambda \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} + \lambda \lambda \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta \mathbf{d}_{,\beta} + \lambda \lambda \Delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} \\ &\quad + \lambda \lambda \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta \delta \mathbf{d}_{,\beta} + \lambda \lambda \Delta \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta}] \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \Delta \delta E_{\alpha 3} = \Delta \delta E_{\alpha 3}^{(0)} + \Theta^3 \Delta \delta E_{\alpha 3}^{(1)} \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta E_{\alpha 3}^{(0)} &= \frac{1}{2} [\lambda \Delta \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha + \Delta \lambda \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha + \delta \lambda \Delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \Delta \lambda \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha \\ &\quad + \lambda \Delta \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \lambda \delta \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{a}_\alpha + \delta \lambda \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{a}_\alpha + \lambda \mathbf{d} \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_\alpha] \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\Delta \delta E_{\alpha 3}^{(1)} = \frac{1}{2} [\delta \lambda \Delta \lambda_{,\alpha} + \Delta \lambda \delta \lambda_{,\alpha}]$$

$$\bullet \quad \Delta \delta E_{33} = \Delta \delta E_{33}^{(0)} \quad (2.142)$$

$$\Delta \delta E_{33}^{(0)} = \Delta \lambda \delta \lambda \quad (2.143)$$

Kapitel 3

Finite-Element-Formulierung

Als Diskretisierungsverfahren stellt die Finite-Element-Methode ein numerisches Verfahren dar, das für die mathematische Formulierung eines speziellen Modellproblems eine Näherungslösung liefert. Dabei wird das ursprüngliche Problem, das sich in Form einer partiellen Differentialgleichung präsentiert, nicht analytisch exakt, sondern approximiert numerisch gelöst.

Die Referenzfläche wird hierbei in finite Elemente diskret unterteilt. Zusätzlich kann auch die Schalendicke über das Mehr-Schichten Modell in Subelemente unterteilt werden. Dadurch erfolgt eine gebietsweise Approximation der Lösung in der Schalenebene sowie über die Schalenhöhe. Für den Verlauf der unbekannten Größen werden innerhalb der einzelnen finiten Elemente lokale Ansatzfunktionen zur Interpolation der kinematischen Größen gewählt.

3.1 Isoparametrische Elementformulierung

Das Hauptmerkmal der isoparametrischen Formulierung von finiten Elementen ist die Interpolation der Elementkoordinaten und der Elementverschiebungen mit denselben Interpolationsfunktionen N^i , die in einem natürlichen Koordinatensystem definiert sind [BATHE 1986].

Die Koordinateninterpolation eines beliebigen Punktes der Referenzfläche lautet

$$X^{0i}(\xi^\alpha) \approx \sum_{k=1}^{NN} X^{0ik} N^k(\xi^\alpha) , \quad (3.1)$$

wobei die zu approximierenden Koordinaten mit X^{0i} bezeichnet sind. Auf der gegebenen Oberfläche wird eine bestimmte Anzahl von Punkten P^{0k} ($k=1, \dots, NN$) betrachtet, die die

Knotenpunkte (NN=Anzahl der Elementknoten) des Elementes festlegen und deren Koordinaten mit X^{0ik} bezeichnet sind. Für den Ortsvektor der unverformten Referenzfläche des Laminates ergibt sich die Approximation:

$$\mathbf{X}^0(\xi^\alpha) = X^{0i}(\xi^\alpha) \mathbf{i}_i \approx \sum_{k=1}^{NN} X^{0ik} N^k(\xi^\alpha) \mathbf{i}_i . \quad (3.2)$$

Hiermit können die geometrischen Elemente der approximierten Schengeometrie bestimmt werden, die nur an den Knotenpunkten P^k mit denen der Ursprungsgeometrie exakt übereinstimmt.

Somit lassen sich beispielsweise die Basisvektoren der Referenzfläche mit Hilfe der Ansatzfunktionen oder ihrer Ableitung ermitteln zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\alpha &= \sum_{k=1}^{NN} N^k_{,\alpha} X^i_k \mathbf{i}_i \\ \mathbf{A}_3 &= \sum_{k=1}^{NN} N^k D^i_k \mathbf{i}_i . \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2 Bilineare Ansatzfunktionen des 4-Knoten-Elementes

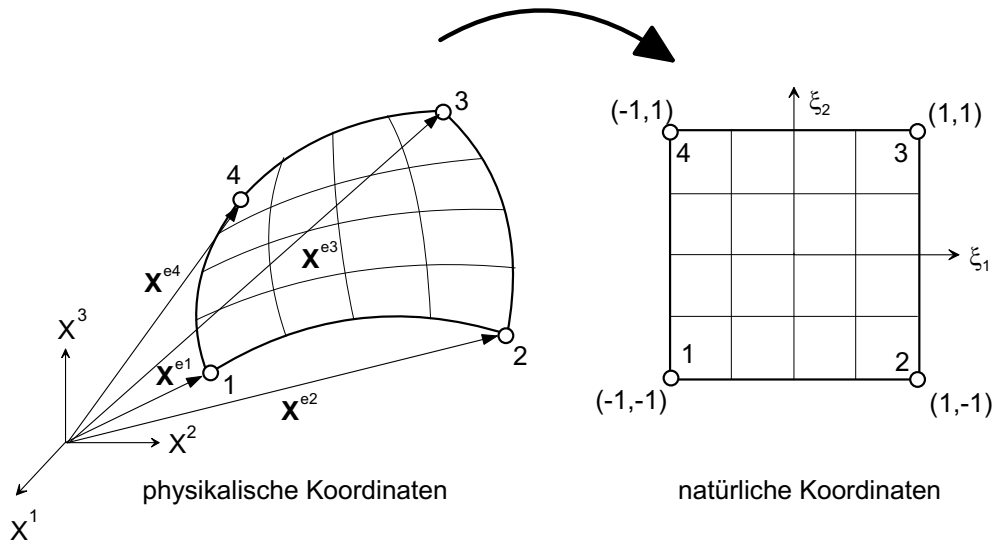


Abbildung 3.1: Knotenpunkte des 4-Knoten-Elementes

Um die Werte für einen bestimmten Punkt im Elementinnern zu erhalten, müssen die bekannten Knotenwerte interpoliert werden. Es werden hierzu Interpolationspolynome, sogenannte Ansatzfunktionen verwendet. Für das in **Abbildung 3.1** dargestellte 4-Knoten-Element werden die folgenden bilinearen Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der natürlichen Koordinaten ξ^α mit $\xi^\alpha \in [-1, 1]$ gewählt:

$$\begin{aligned} N^1(\xi^\alpha) &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^2) \\ N^2(\xi^\alpha) &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^2) \\ N^3(\xi^\alpha) &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^2) \\ N^4(\xi^\alpha) &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^2) . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Interpolationsfunktionen sind durch die fundamentale Eigenschaft gekennzeichnet, dass sie in natürlichen Koordinaten ξ^α am Knoten P^k den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert 0 besitzen **Abbildung 3.2**.

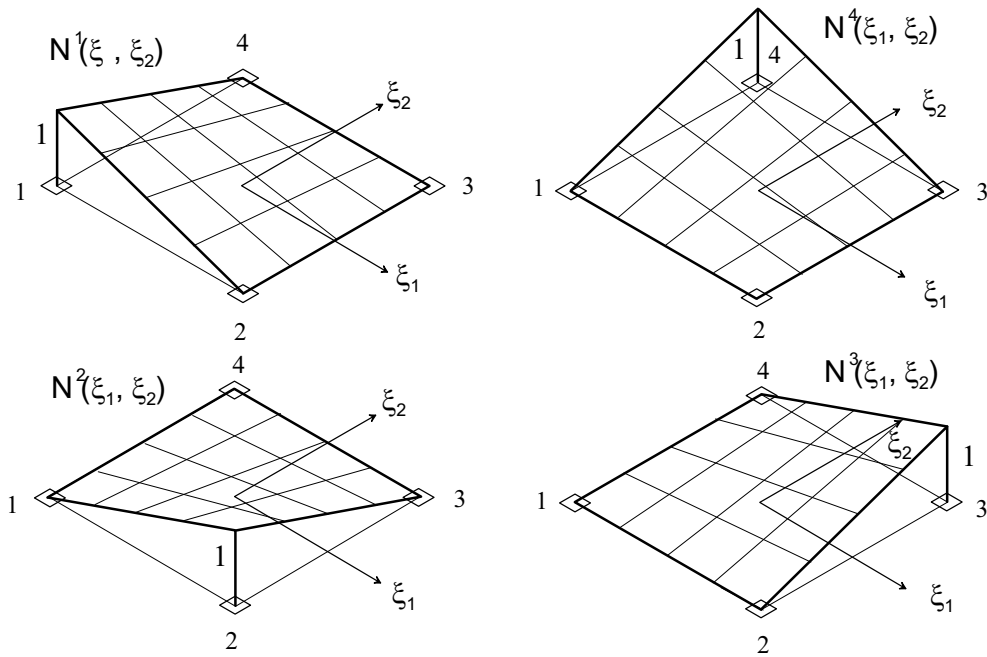


Abbildung 3.2: Ansatzfunktionen des 4-Knoten-Elementes

3.3 Numerische Integration

3.3.1 Elementfläche

Zur Umsetzung der Methode der Finiten Elemente ist es unumgänglich die entsprechenden Integralausdrücke zu lösen. Da eine analytische Integration für allgemeine Flächentragwerke wegen der Komplexität der zu integrierenden Funktionen nicht möglich ist, wird numerisch integriert. Dabei kommt die GAUSS-LEGENDRE-Integration zur Anwendung, bei der die exakten Werte nur an den Stützstellen (“Gauß-Punkten”) berechnet und anschließend mit Wichtungsfaktoren multipliziert werden. Generell ergibt sich durch die Elementformulierung im lokalen natürlichen Koordinatensystem bei diesem zweidimensionalen Problem ein zu lösendes Integral der Form

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi^1, \xi^2) d\xi^1 d\xi^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\xi_i^1, \xi_j^2) \alpha_i \alpha_j . \quad (3.5)$$

In (3.5) werden die Funktionswerte an den Integrationspunkten ξ_i^1, ξ_j^2 durch $f(\xi_i^1, \xi_j^2)$, die zugehörigen Wichtungsfaktoren durch α_i, α_j ausgedrückt. Bei einer Wahl von n Stützstellen ist eine exakte Integration bis zur Potenz $m=2n-1$ möglich. Damit gewährleistet die in diesem Element für die bilinearen Ansatzfunktionen gewählte Integrationsordnung von 2×2 Gauß-Punkten die exakte Bestimmung des Integrals. Für das gewählte lokale Koordinatensystem ξ^α mit $\xi^\alpha \in [-1, 1]$ ergeben sich die folgenden Integrationspunkte und Wichtungsfaktoren:

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= \xi_2^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \xi_1^2 &= \xi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \alpha^1 &= \alpha^2 = 1 . \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.3.2 Elementdicke

Zur Ermittlung einer möglichst genauen Approximation der Spannungen über die Elementdicke steht es dem Benutzer frei eine Anzahl an über der Höhe verteilten Gaußpunkten festzulegen. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgten die Berechnungen mit 2 Gaußpunkten in der Dickenrichtung, welche durch $\Theta^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{H}{2}$ und $\Theta^3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{H}{2}$ gekennzeichnet sind. Eine Erhöhung der Gaußpunktanzahl wird nicht als sinnvoll erachtet. Die Gaußpunktanzahl in der Höhe bestimmt die Lage der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Flächengaußpunkte, d.h. bei den hier verwendeten 2 Gaußpunkten in Dickenrichtung kommen insgesamt 8 Gaußpunkte im Kontinuum eines Elementes zur Anwendung.

3.4 Direktor

3.4.1 1. Variation und Linearisierung der 1. Variation

Wie in **Kapitel 2.11** erläutert wurde, bedarf es zur Lösung des nichtlinearen Funktionals einer Linearisierung. Hierbei kommen die erste Variation und ihre Linearisierung der Verzerrungsgrößen zum Einsatz, die sich ihrerseits unter anderem aus den Variationen der Direktoren zusammensetzen.

In den Gleichungen 2.103 und 2.104 wurde die Variation des Direktors bereits eingeführt. An dieser Stelle soll lediglich noch eine Darstellung in Abhängigkeit der unabhängigen Größen erfolgen. Es ergibt sich demzufolge für die erste Variation:

$$\delta \mathbf{d} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \times \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i = \begin{bmatrix} \omega^2 d^3 - \omega^3 d^2 \\ \omega^3 d^1 - \omega^1 d^3 \\ \omega^1 d^2 - \omega^2 d^1 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i. \quad (3.7)$$

Die Linearisierung der ersten Variation lautet in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathbf{d} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \times \left(\begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \times \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \right) \\ &= \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \times \begin{bmatrix} \omega^2 d^3 - \omega^3 d^2 \\ \omega^3 d^1 - \omega^1 d^3 \\ \omega^1 d^2 - \omega^2 d^1 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i \\ &= \begin{bmatrix} -(\omega^2 \omega^2 + \omega^3 \omega^3) d^1 + \omega^2 \omega^1 d^2 + \omega^3 \omega^1 d^3 \\ \omega^1 \omega^2 d^1 - (\omega^1 \omega^1 + \omega^3 \omega^3) d^2 + \omega^3 \omega^2 d^3 \\ \omega^1 \omega^3 d^1 + \omega^2 \omega^3 d^2 - (\omega^1 \omega^1 + \omega^2 \omega^2) d^3 \end{bmatrix} \mathbf{i}_i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es ist zu erkennen, dass es sich bei der linearisierten ersten Variation des Direktors um eine unsymmetrische Größe handelt. Damit die Symmetrie der Linearisierung der ersten Variation des Verzerrungstensors erreicht wird, wird diese Größe symmetrisiert.

Kintzel [KINTZEL 1998] hat in seiner Arbeit ein von ihm als Symmetrisierung bezeichnetes Verfahren angewendet. Er nutzt dazu die Gleichung: $\text{sym}[\Delta \delta \mathbf{d}] = \frac{1}{2}((\Delta \delta \mathbf{d}) + (\Delta \delta \mathbf{d})^T)$.

Unter Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich für die Komponenten der linearisierten ersten Variation des Direktors:

$$\begin{aligned}
\Delta\delta d^1 &= -(\omega^2\omega^2 + \omega^3\omega^3)d^1 + \frac{1}{2}(\omega^2\omega^1 + \omega^1\omega^2)d^2 + \frac{1}{2}(\omega^3\omega^1 + \omega^1\omega^3)d^3 \\
\Delta\delta d^2 &= \frac{1}{2}(\omega^1\omega^2 + \omega^2\omega^1)d^1 - (\omega^1\omega^1 + \omega^3\omega^3)d^2 + \frac{1}{2}(\omega^3\omega^2 + \omega^2\omega^3)d^3 \\
\Delta\delta d^3 &= \frac{1}{2}(\omega^1\omega^3 + \omega^3\omega^1)d^1 + \frac{1}{2}(\omega^2\omega^3 + \omega^3\omega^2)d^2 - (\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2)d^3 .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dieses Ergebnis wurde auch in [BAŞAR & KINTZEL 2001] rein variationstheoretisch hergeleitet und bestätigt. Abschließend sollen noch einmal die erste Variation und ihre Linearisierung aufgeführt werden, in derselben Schreibweise wie sie im Programm benötigt werden.

In der Subroutine DIRV wird die erste Variation des Direktors gebildet:

$$\delta \mathbf{d} = \Gamma \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & d^3 & -d^2 \\ -d^3 & 0 & d^1 \\ d^2 & -d^1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} . \tag{3.10}$$

Im Programmteil DIRVV fand die Implementierung der Matrizen statt, die man benötigt, um die linearisierte Form der erste Variation des Direktors zu bilden:

$$\begin{aligned}
\Delta\delta d^1 &= \boldsymbol{\omega}^T \Gamma^{(1)} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}d^2 & \frac{1}{2}d^3 \\ \frac{1}{2}d^2 & -d^1 & 0 \\ \frac{1}{2}d^3 & 0 & -d^1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\
\Delta\delta d^2 &= \boldsymbol{\omega}^T \Gamma^{(2)} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \begin{bmatrix} -d^2 & \frac{1}{2}d^1 & 0 \\ \frac{1}{2}d^1 & 0 & \frac{1}{2}d^3 \\ 0 & \frac{1}{2}d^3 & -d^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\
\Delta\delta d^3 &= \boldsymbol{\omega}^T \Gamma^{(3)} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T \begin{bmatrix} -d^3 & 0 & \frac{1}{2}d^1 \\ 0 & -d^3 & \frac{1}{2}d^2 \\ \frac{1}{2}d^1 & \frac{1}{2}d^2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Es sei angemerkt, dass diese Form Verwendung bei der Berechnung zusammengesetzter Schalen findet. Bei Einzelschalen ist es möglich unter Benutzung der Beziehung $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d} = 0$ die angegebenen Gleichungen zu vereinfachen.

3.4.2 Interpolation

Um die Variation des Direktors in die Finite Element Berechnung zu integrieren, ist es nötig die exakten Werte in den Knoten zu ermitteln und danach mit den in **Kapitel 3.2** vorgestellten Formfunktionen über das Element zu interpolieren. Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten dieser Interpolation:

- Variante A

Es findet zunächst die erste bzw. die Linearisierung der ersten Variation des Direktors an den Knoten statt. Im Anschluß daran werden diese Werte durch Multiplikation mit den Ansatzfunktionen interpoliert.

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{d} &= \sum_{i=1}^4 N_i(\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{d}^i) \\
 \delta \mathbf{d}_{,\alpha} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\alpha}(\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{d}^i) \\
 \Delta \delta \mathbf{d} &= \sum_{i=1}^4 N_i(\boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{d}^i)) \\
 \Delta \delta \mathbf{d}_{,\alpha} &= \sum_{i=1}^4 N_{i,\alpha}(\boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{d}^i))
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

- Variante B

Es findet zuerst die Interpolation der Rotationsfreiheitsgrade statt und anschließend die Variation.

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{d} &= \left(\sum_{i=1}^4 N_i \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \mathbf{d} \\
 \delta \mathbf{d}_{,\alpha} &= \left(\sum_{i=1}^4 N_{i,\alpha} \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \mathbf{d} + \left(\sum_{i=1}^4 N_K \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \mathbf{d}_{,\alpha} \\
 \Delta \delta \mathbf{d} &= \left(\sum_{i=1}^4 N_i \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \left(\left(\sum_{j=1}^4 N_j \boldsymbol{\omega}^j \right) \times \mathbf{d} \right) \\
 \Delta \delta \mathbf{d}_{,\alpha} &= \left(\sum_{i=1}^4 N_{i,\alpha} \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \left(\left(\sum_{j=1}^4 N_j \boldsymbol{\omega}^j \right) \times \mathbf{d} \right) \\
 &\quad + \left(\sum_{i=1}^4 N_i \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \left(\left(\sum_{j=1}^4 N_{j,\alpha} \boldsymbol{\omega}^j \right) \times \mathbf{d} \right) \\
 &\quad + \left(\sum_{i=1}^4 N_i \boldsymbol{\omega}^i \right) \times \left(\left(\sum_{j=1}^4 N_j \boldsymbol{\omega}^j \right) \times \mathbf{d}_{,\alpha} \right)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Trotz des bestehenden Nachteils, dass nach [BAŞAR & KINTZEL 2001] die Variation nicht konsistent ermittelt wird, ist in dieser Arbeit die erste Variante gewählt worden. Aufgrund der Zusammengehörigkeit des Direktors und des Rotationsvektors zu den entsprechenden Knoten wird diese als die sinnvollere erachtet.

3.4.3 Updated Rotation

In dieser Arbeit erfolgt innerhalb der nichtlinearen Berechnung ein “Rotations-Update”. Der Direktor wird dadurch in jedem Iterationsschritt in seine neue Position gedreht. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung (2.107):

$$\mathbf{d}^{i+1} = \mathbf{R} \mathbf{d}^i . \quad (3.14)$$

Am Ende eines jeden Iterationsschrittes (i) wird der Direktor d^i in einem lokalen Feld zwischengespeichert. Von dort wird er im nächsten Schritt (i+1) wieder herausgelesen, um erneut aktualisiert zu werden.

3.5 Behebung der Locking-Phänomene

FE-Verschiebungsmodelle mit niedrigen Ansatzgraden zeigen in bestimmten Situationen ein zu steifes Elementverhalten. Dieses Phänomen wird in der Literatur als *Locking* bezeichnet. Man unterscheidet dabei mehrere Arten von Locking, die unterschiedliche Ursachen besitzen. Zur Elimination eines solchen Effektes gibt es keine allgemeingültige Lösung, sondern je nach Art des Phänomens ein sinnvolles Konzept.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass man diese Locking-Effekte auch durch eine Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen beseitigen kann. Dabei sind ab einer Ansatzordnung von $p=4$ keine numerischen Defekte mehr zu erwarten [DUMSTORFF 2000].

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Schub-Locking mit dem Assumed-Natural-Strain-Verfahren beseitigt. Die Behebung des Membran-, Dicken- und Volumen-Lockings erfordert eine Erweiterung des FE-Ansatzes. Die Stabilisierung dieser numerischen Defekte erfolgt mit der Enhanced-Assumed-Strain-Methode.

Folgend sollen die im entwickelten Element angewendeten Konzepte zur Beseitigung dieser Effekte vorgestellt werden.

3.5.1 Assumed-Natural-Strain-Konzept (ANS)

Ein wesentliches Problem bei der Verwendung von bilinearen Interpolationen der Verschiebungen ist, dass das Element locked (“versteift”), wenn es dünn und schubweich ist.

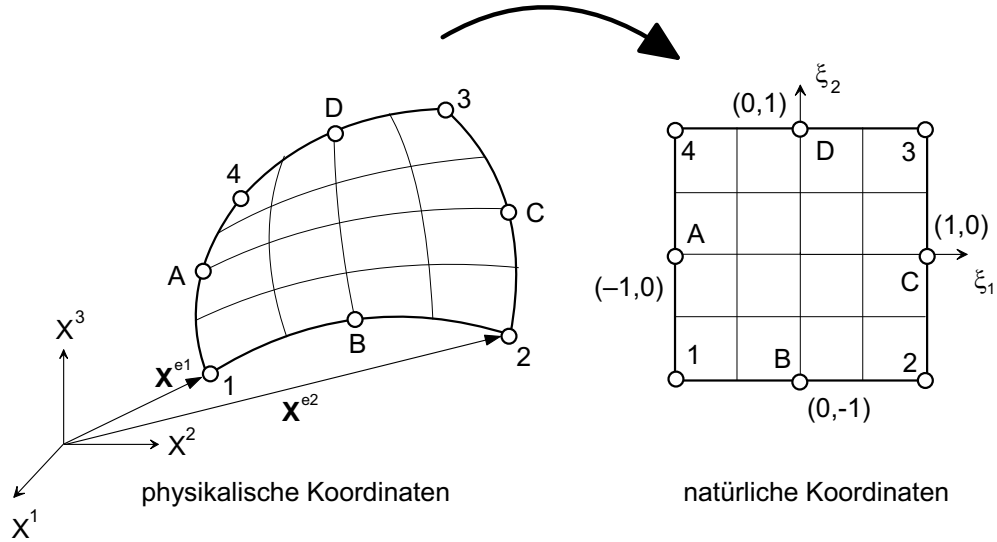


Abbildung 3.3: Kollokationspunkte des 4-Knoten-Elementes

Für das im Rahmen dieser Arbeit verwendete isoparametrische 4-Knoten-Element mit bilinearen Ansatzfunktionen wird zur Vermeidung von *Schub-Locking*-Effekten die *Assumed-Strain*-Methode nach [DVORKIN & BATHE 1984] angewendet. Grundidee ist eine Reduktion der Verzerrungsfelder mit dem Ziel der Elimination der versteifenden Anteile. Es werden bei dieser Methode zunächst die Schubverzerrungen in den sogenannten Kollokationspunkten A, B, C und D (**Abbildung 3.3**) ermittelt und anschließend mit Hilfe der Interpolationsfunktionen

$$\begin{aligned} E_{13} &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) E_{13}^A + \frac{1}{2} (1 + \xi^2) E_{13}^C \\ E_{23} &= \frac{1}{2} (1 - \xi^1) E_{23}^A + \frac{1}{2} (1 + \xi^1) E_{23}^C \end{aligned} \quad (3.15)$$

die für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix oder der Schnittgrößen benötigten Schubverzerrungen bestimmt.

3.5.2 Enhanced-Assumed-Strain-Konzept (EAS)

Im Gegensatz zum Assumed-Natural-Strain-Ansatz, der eine Reduzierung des Ansatzgrades bewirkt, basiert die EAS-Methode auf einer Erweiterung des Ansatzgrades der Verzerrungen. Einerseits lassen sich dadurch fehlende Moden in den Ansatz einbringen und andererseits zum Versteifen führende Kopplungen zwischen den Verzerrungsanteilen beseitigen.

Nach der Idee von [SIMO & RIFAI 1990] werden die GREEN'schen Verzerrungen $\mathbf{E}$ additiv in zwei Anteile aufgespalten. Der erste Anteil stellt dabei die kompatiblen, d.h. die aus dem Verschiebungsfeld ableitbaren Verzerrungen $\mathbf{E}^c$ dar, bei dem zweiten Anteil handelt es sich um erweiterte Verzerrungen $\mathbf{E}^{inc}$.

Finite Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen zeigen bei dehnungslosen Verbiegungen, d.h. bei Schubbelastung in der Ebene, ein unzureichendes Membranverhalten. Der Grund dafür ist bei den unzureichend approximierten tangentialen Membranverzerrungsanteilen zu finden. Die Beseitigung des *Membran-Lockings* erfolgt in dieser Arbeit mit dem EAS-Verfahren.

Die kompatiblen Membranverzerrungen lassen sich zur Beseitigung dieses Problems durch folgenden allgemeinen Ansatz erweitern:

$$\mathbf{E}_M = E_{\alpha\beta}^{(0)} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta = \mathbf{E}_M^c + \mathbf{E}_M^{inc} \quad (3.16)$$

mit den approximierten, inkompatiblen Verzerrungsanteilen

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_M^{inc}] &= \begin{bmatrix} E_{11}^{inc} \\ E_{22}^{inc} \\ 2E_{12}^{inc} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G}} \begin{bmatrix} \Xi_{11} \\ \Xi_{22} \\ 2\Xi_{12} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{M}_M] \{\boldsymbol{\alpha}_M\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei $[\mathbf{M}_M]$ die Matrix der Interpolationsfunktionen und $\{\boldsymbol{\alpha}_M\}$ den Vektor der Freiwerte der inkompatiblen Verzerrungen darstellt:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_M] &= \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \\ \{\boldsymbol{\alpha}_M\}^T &= [\alpha_{M1} \quad \dots \quad \alpha_{M7}]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Durch einen unzureichenden Ansatz in der Dickenkoordinate versteift das Element in biegedominanten Situationen. Dieses sogenannte *Poisson-* oder *Dicken-Locking* kann auf die fehlenden linearen Anteile der transversalen Normalverzerrung zurückgeführt werden.

Dieser Defekt kann auch mit Hilfe der EAS-Methode [BETSCH & STEIN 1995] in Form einer Erweiterung der transversalen Normalverzerrungen durch inkompatible Anteile beseitigt werden:

$$\mathbf{E}_T = E_{33} \mathbf{A}^3 \otimes \mathbf{A}^3 = \mathbf{E}_T^{(0)c} + \mathbf{E}_T^{(1)inc} \quad (3.19)$$

mit

$$E_{33}(\Theta^\alpha, \Theta^3) = E_{33}^{(0)c}(\Theta^\alpha) + \Theta^3 E_{33}^{(1)inc}(\Theta^\alpha) = E_{33}^c(\Theta^\alpha) + E_{33}^{inc}(\Theta^\alpha, \Theta^3). \quad (3.20)$$

Für die approximierten, inkompatiblen Komponenten der erweiterten transversalen Verzerrungen $\mathbf{E}_T^{inc}$ wird dazu auf der Finite-Element-Ebene folgender allgemeiner Ansatz gewählt:

$$[\mathbf{E}_T^{inc}] = [E_{33}^{inc}] = \Theta^3 \frac{1}{\sqrt{G}} [\Xi_{33}] = \Theta^3 [\mathbf{M}_T] \{\boldsymbol{\alpha}_T\}, \quad (3.21)$$

wobei in $[\mathbf{M}_T]$ die Interpolationsfunktionen enthalten sind und $\{\boldsymbol{\alpha}_T\}$ die inkompatiblen Freiheitsgrade bezeichnet:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_T] &= [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \\ \{\boldsymbol{\alpha}_T\}^T &= [\alpha_{T8} \quad \dots \quad \alpha_{T11}]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der in dem verwendeten Element implementierte vollständige EAS-Ansatz lautet demzufolge:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^c + \mathbf{E}^{inc} = \mathbf{E}^c + E_{\alpha\beta}^{(0)inc} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta + E_{33}^{(1)inc} \mathbf{A}^3 \otimes \mathbf{A}^3 \\ &= \mathbf{E}^c + \mathbf{E}_M^{inc} + \mathbf{E}_T^{inc} \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^{inc}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{E}_M^{inc}] \\ [\mathbf{E}_T^{inc}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^{inc} \\ E_{22}^{inc} \\ 2E_{12}^{inc} \\ E_{33}^{inc} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_M] & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}_T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\alpha}_M\} \\ \{\boldsymbol{\alpha}_T\} \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\alpha}\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Geht man von dem HU-WASHIZU-Variationsprinzip aus, so gilt:

$$\Pi_{HW} = \int_{\mathcal{B}} W_s(\mathbf{E}^c + \mathbf{E}^{inc}) dV - \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{E}^{inc} dV - \Pi_{HW}^{ext}, \quad (3.25)$$

wobei Π_{HW} und Π_{HW}^{ext} die totale und die externe potentielle Energie beschreiben. Wird darüber hinaus angenommen, dass die inkompatiblen Verzerrungen und die unabhängig vorschreibbaren Spannungen die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{E}^{inc} dV = 0 \quad (3.26)$$

auf der Finite-Element-Ebene erfüllen, verschwindet das zweite Integral und das Funktional Π_{HW} reduziert sich auf:

$$\Pi_{HW} = \int_{\mathcal{B}} W_s (\mathbf{E}^c + \mathbf{E}^{inc}) dV - \Pi_{HW}^{ext} . \quad (3.27)$$

Unter der Berücksichtigung der Stationaritätsbedingung ($\delta \Pi_{HW} = 0$) und unter Einführung des Materialgesetzes lässt sich folgende Form erreichen:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^c dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^{inc} dV - \delta \Pi_{HW}^{ext} = 0 . \quad (3.28)$$

Die Linearisierung mit Berücksichtigung der kompatiblen und inkompatiblen Verzerrungsanteile ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \Delta \mathbf{E}^c : \mathbf{C} : \delta \mathbf{E}^c dV + \int_{\mathcal{B}} \Delta \mathbf{E}^{inc} : \mathbf{C} : \delta \mathbf{E}^c dV + \int_{\mathcal{B}} \Delta \mathbf{E}^c : \mathbf{C} : \delta \mathbf{E}^{inc} dV \\ + \int_{\mathcal{B}} \Delta \mathbf{E}^{inc} : \mathbf{C} : \delta \mathbf{E}^{inc} dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E}^c dV + \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit den Ungleichgewichtskräften

$$\mathbf{f}_{int} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^c + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^{inc} dV , \quad (3.30)$$

den externen Kräften $\mathbf{f}_{ext}$, und mit dem Materialtensor:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W_s}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} . \quad (3.31)$$

Zusätzlich zu den existierenden Knotenfreiheitsgraden $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_4^T]^T$ mit:

$$\mathbf{u}_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \lambda \end{bmatrix}_j , j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.32)$$

werden demzufolge 11 weitere freie Parameter eingeführt, die ebenfalls in vektorieller Form angeordnet werden können:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_{11}]^T . \quad (3.33)$$

Mit den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen für die kompatiblen und inkompatiblen Verzerrungen

$$\delta \mathbf{E}^c = \mathbf{B}_V \delta \mathbf{u} , \quad \delta \mathbf{E}^{inc} = \mathbf{M}_V \delta \boldsymbol{\alpha} , \quad \Delta \delta \mathbf{E}^c = \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_{VL}^T \delta \mathbf{u} \quad (3.34)$$

erhält man die folgende matrizielle Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{K}_E^T \\ \mathbf{K}_E & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int}^c \\ \mathbf{f}_{int}^{inc} \end{bmatrix} , \quad (3.35)$$

mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}_V^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S}^T \mathbf{B}_{VL} dV , \\ \mathbf{K}_E &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}_V^T \mathbf{C} \mathbf{M}_L dV , \quad \mathbf{K}_{EE} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{M}_V^T \mathbf{C} \mathbf{M}_L dV . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Durch Kondensation dieser Gleichung bezüglich der inkompatiblen Freiwerte, lässt sich die Beziehung wieder auf die bekannte Steifigkeitsbeziehung in Abhängigkeit der Knotenfreiheitsgrade $\delta \mathbf{u}$ reduzieren zu:

$$(\mathbf{K}_T - \mathbf{K}_E^T \mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{K}_E) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_E^T \mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{f}_{int}^{inc} - \mathbf{f}_{int}^c + \mathbf{f}_{ext} , \quad (3.37)$$

was in Kurzform als $\tilde{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{f}}$ geschrieben werden kann. Nach der Berechnung jedes Iterationsschrittes werden die inkompatiblen Freiheitsgrade aktualisiert. Dieses geschieht wie folgt:

$$\boldsymbol{\alpha}^{n+1} = \boldsymbol{\alpha}^n - \mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{K}_E^T \Delta \mathbf{u} - \mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{f}_{int}^{inc^n} . \quad (3.38)$$

3.6 Schalenverschneidung

3.6.1 Allgemeines

Bei der Simulation komplexer Tragwerke aus dem Bereich des Konstruktiven Ingenieurbaus ist es oft erforderlich, Teilstrukturen unterschiedlicher Geometrien miteinander zu koppeln. Von besonderer Problematik ist hierbei die Behandlung der Freiwerte im Bereich der Verschneidungslinien. Als Verschneidungslinien sollen hier die Schnittlinien von zwei oder mehreren Schalenteilstrukturen bezeichnet werden. Die Schalenmittelflächen der angrenzenden Strukturen gehen also nicht tangential ineinander über, sondern weisen eine Knick auf.

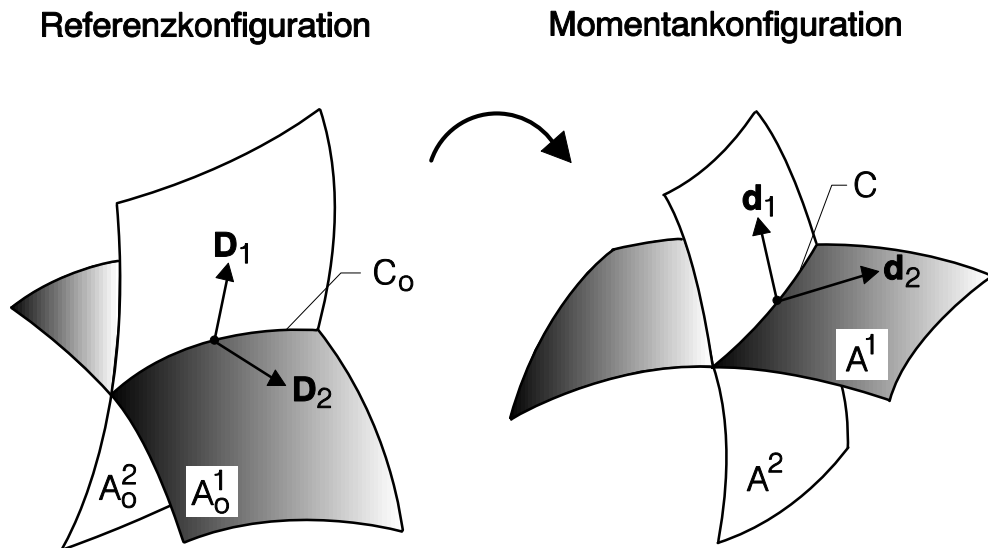


Abbildung 3.4: Verschneidungslinie zweier Geometrien

Die Ursache der auftretenden Schwierigkeiten bei der kompatiblen Kopplung der Rotationsfreiwerte ist in der klassischen Schalentheorie zu finden. Unter Vernachlässigung der Dickenverzerrung und Annahme einer konstanten Schubverzerrung wird die Verformung einer Struktur durch fünf Kinematiken (drei Verschiebungs- und zwei Rotationsfreiwerte) beschrieben. Um eine kompatible Kopplung der Rotationsfreiwerte zu erreichen, ist es notwendig, sie einer Transformation auf das globale Koordinatensystem zu unterziehen. Aufgrund des Transformierens wird je Elementknoten die Anzahl der Rotationsfreiheitsgrade von zwei auf drei erhöht. Je Knoten entsteht demzufolge ein zusätzlicher, künstlicher *zero energy mode*, der eine Drehung um den Direktor beschreibt. Diese Drehung ergibt allerdings keine Verzerrungen, da sich der Direktor nicht verändert. Die Steifigkeitsmatrix wird folglich singulär. Vergleichbar ist dies mit einer fehlenden Drillsteifigkeit in Richtung des Direktors.

Da es unmöglich ist, den Sonderfall einer Schalenverschneidung in einem Konzept mit nur zwei Rotationsfreiwerten konsistent zu realisieren, wird im Rahmen dieser Arbeit ein Wechsel der Eulerwinkelformulierung (zwei Freiheitsgrade) zur Rotationsformulierung mit drei Freiheitsgraden vollzogen. Es werden dafür an jedem Knoten drei Freiwerte definiert. Dabei entstehen jedoch *zero energy modes* und die Steifigkeitsmatrix wird singulär, wenn ein Knoten nicht auf einer Geometrieverschneidung liegt. Zur Beseitigung dieses Problems müssen künstliche Steifigkeiten eingeführt werden.

Somit ist es von grundlegender Bedeutung zwischen den Knoten auf der Verschneidungslinie und denen im Bereich der glatten Schalengeometrie zu unterscheiden.

Im Rahmen der Finite-Element-Implementierung wird dies über eine zusätzliche Eingabe des Benutzers gewährleistet. Durch das “1-setzen” des zweiten Parameters im ROT-Eingabeblock der Input-Routine müssen die Knoten auf der Verschneidungslinie explizit gekennzeichnet werden (**Kapitel 3.8**).

3.6.2 Transformationsmatrix

Die Verdrehungsfreiheitsgrade sind in der globalen, orthonormalen Basis $\mathbf{i}_i$ definiert:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^i \mathbf{i}_i . \quad (3.39)$$

Um den Rotationsfreiwert um den Direktor zu lokalisieren, ist eine Transformation vom globalen in das lokale Koordinatensystem $\mathbf{e}_i$ erforderlich. Diese Transformation entspricht einer Rotation der globalen in die lokale Basis. Die orthonormale lokale Basis ist dadurch gekennzeichnet, dass eine Richtung mit der des Direktors übereinstimmt, so dass die

Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ nach der Rotation

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\omega}^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \bar{\omega}^3 \mathbf{d} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d} = \mathbf{e}_3 \quad (3.40)$$

lauten. Im folgenden soll nun die dafür benötigte Transformationsmatrix eingeführt werden.

Dazu kommt der bereits im **Kapitel 2.8.2** eingeführte Rotationstensor zur Anwendung, mit dessen Hilfe die Ermittlung der Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ möglich ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \bar{\mathbf{R}} \mathbf{i}_3, \\ \bar{\mathbf{R}} &= (\mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_3) \mathbf{I} + (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}) \times + \frac{1}{1 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_3} (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}) \otimes (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}), \\ \mathbf{e}_\alpha &= \bar{\mathbf{R}} \mathbf{i}_\alpha \end{aligned} \quad (3.41)$$

Er überführt die globale $\mathbf{i}_i$ in die lokale $\mathbf{e}_i$ Basis. Für die Komponenten der Transformationsmatrix gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega^i \mathbf{i}_i = \bar{\omega}^i \bar{\mathbf{R}} \mathbf{i}_i = \bar{\omega}^i \mathbf{e}_i \\ \bar{\omega}^k &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}^k = \omega^i (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{e}^k) = \omega^i (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \Gamma_{.i}^k \omega^i \\ \begin{bmatrix} \bar{\omega}^1 \\ \bar{\omega}^2 \\ \bar{\omega}^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Durch Anwendung des Rotationstensors auf $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}_2 \times \mathbf{d} + \frac{1}{1 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_3} (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}) [(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{i}_1] \\ \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{i}_1 \times \mathbf{d} + \frac{1}{1 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_3} (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}) [(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{i}_2]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nach Vereinfachung ergibt sich daraus in matrizieller Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{(d^1)^2}{d^3 + 1} & -\frac{d^1 d^2}{d^3 + 1} & -d^1 \\ -\frac{d^1 d^2}{d^3 + 1} & 1 - \frac{(d^2)^2}{d^3 + 1} & -d^2 \\ d^1 & d^2 & d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Mit der Hilfe dieser Transformationsmatrix $\boldsymbol{\Gamma}$ lassen sich auch die Rotationsfreiheitsgrade der globalen und der lokalen Basis ineinander überführen (3.50).

3.6.3 Behebung der Singularität

Ausgehend von dem Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K} \mathbf{u} = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.45)$$

welches im globalen Koordinatensystem definiert ist, findet eine Transformation in die lokale Basis statt. Mittels der Beziehung $\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{u}}$ ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\mathbf{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{K} \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.46)$$

welche sich umformen lässt in:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{K} \mathbf{\Gamma} \bar{\mathbf{u}} = \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{r}. \quad (3.47)$$

Mit Hilfe der folgenden beiden Beziehungen $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{K} \mathbf{\Gamma}$ und $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{r}$ lässt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit bezogen auf die lokale Basis ausdrücken:

$$\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{u}} = \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{r}}. \quad (3.48)$$

Das Problem der Singularität der lokalen Steifigkeitsmatrix zeigt sich dadurch, dass in der Hauptdiagonalen und in den Nebendiagonalen bezüglich des lokalen Freiheitsgrades in Richtung des Direktors der Wert “0” steht. Die Begründung dafür ist die Tatsache, dass mit der Eigenrotation keine Energie verbunden ist. Um diese Singularität zu beheben wird eine künstliche Steifigkeit eingeführt und auf die Hauptdiagonale von $\bar{\mathbf{K}}$ der Wert “1” gesetzt.

Um einen Einfluss auf die Steifigkeitsbeziehung auszuschließen, wird gleichzeitig die zu ω^3 gehörende Komponente des Lastvektors zu “0” gesetzt.

Dieser Algorithmus gilt jedoch nur für alle Knoten die *nicht* auf einer Schalenverschneidung liegen, da für die übrigen Knoten keine Singularität auftritt. Eine entsprechende Unterscheidung dieser Punkte wird vom Benutzer bei der Eingabe vorgenommen.

Zur Kontrolle der korrekten Funktionalität dieser, im Rahmen dieser Arbeit implementierten Routinen kann eine Eigenwertuntersuchung der Steifigkeitsmatrix vor und nach der Variation vorgenommen werden. Die Eigenwerte müssen laut

$$\mathbf{\Gamma}^T(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{K}\mathbf{\Gamma} - \lambda\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{I}\mathbf{\Gamma}) = \bar{\mathbf{K}} - \lambda\mathbf{I} \quad (3.49)$$

übereinstimmen.

3.7 Transformation

Die unabhängigen Verschiebungsvariablen des kinematischen Modells liegen auf der Finite-Element-Ebene in globalen Koordinaten vor. Zur Vorschreibung von Randbedingungen oder Belastungen entlang von Schalenrändern ist es jedoch sinnvoller lokale Koordinaten zu verwenden.

Aus diesem Grund ist in das Programm eine Transformation für zwei rotations-symmetrische Strukturen implementiert worden, die in **Kapitel 5** angewendet werden. Bei den Geometrien handelt sich zum einen um die Zylinderschale und zum anderen um die Kugelschale. Die Transformation ermöglicht die Gesamtstruktur durch ein beliebiges Teilsegment zu ersetzen, da die Symmetrierandbedingung und die Belastung in lokalen Koordinaten vorgegeben werden können.

Vergleichbar mit der in **Kapitel 3.5.2** hergeleitete Transformation $\mathbf{\Gamma}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^i \mathbf{i}_i = \bar{u}^i \bar{\mathbf{R}} \mathbf{i}_i = \bar{u}^i \mathbf{e}_i \\ \bar{u}^k &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^k = u^i (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{e}^k) = u^i (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \Gamma_{.i}^k u^i . \end{aligned} \quad (3.50)$$

In dieser Gleichung stellt $\mathbf{i}_i$ die globale Basis dar. Die lokale Basis der Schalen-geometrie $\mathbf{e}_i$ erhält man nach (2.2) als partielle Ableitung des Ortsvektors nach den lokalen Koordinaten.

Im Folgenden werden die Komponenten für die in dieser Arbeit implementierten Transformationsmatrizen, die reine Rotationsmatrizen darstellen, aufgezeigt:

- **Zylinderschale :**

Mit Hilfe des Ortsvektors $\mathbf{X} = R \cos\Theta^1 \mathbf{i}_1 + R \sin\Theta^1 \mathbf{i}_2 + \Theta^2 \mathbf{i}_3$ der Zylinderschale ergeben sich die Komponenten zu:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \\ \bar{u}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Theta^1 & \cos \Theta^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \Theta^1 & \sin \Theta^1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

- **Kugelschale :**

Mit Hilfe des Ortsvektors $\mathbf{X} = R \sin\Theta^1 \sin\Theta^2 \mathbf{i}_1 + R \cos\Theta^2 \mathbf{i}_2 + R \cos\Theta^1 \sin\Theta^2 \mathbf{i}_3$ der Kugelschale ergeben sich die Komponenten zu:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \\ \bar{u}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Theta^1 \cos \Theta^2 & \cos \Theta^1 \cos \Theta^2 & 0 \\ -\cos \Theta^1 \sin \Theta^2 & -\sin \Theta^1 \sin \Theta^2 & \cos \Theta^2 \\ \cos \Theta^1 \cos \Theta^2 & \sin \Theta^1 \cos \Theta^2 & \sin \Theta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Mit Hilfe der in der Eingabe-Datei entsprechend gesetzten ROT-Parameter (**Kapitel 3.9**) wird dem Programm mitgeteilt in welchen Knoten eine Transformation durchzuführen ist. Die implementierten Routinen sorgen daraufhin für eine Rotation aller Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade, auch bei der Anwendung des Mehr-Schichten-Konzeptes.

Da eine Rücktransformation auf das globale System innerhalb der FEMAS-Berechnung nicht mehr möglich ist, sei darauf hingewiesen, dass die ausgegebenen Ergebnisse der Verschiebungen in den transformierten Knoten in der lokalen Basis definiert sind.

3.8 Veranschaulichung der Programmstruktur

Einen Überblick der beschriebenen Finite Element Formulierung gibt das Struktogramm des Programms in **Tabelle 3.1**.

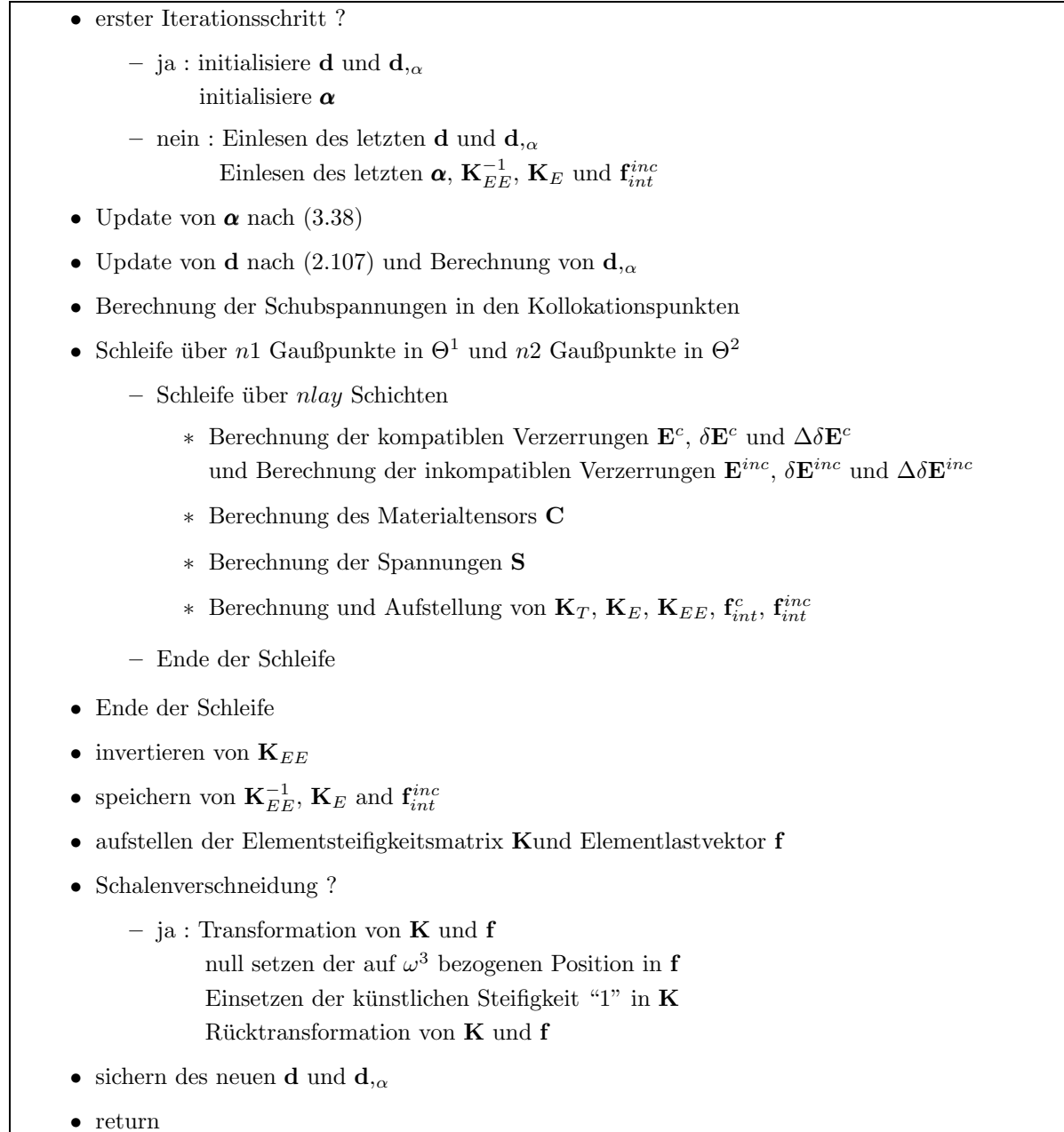


Tabelle 3.1: Ablaufdiagramm für den Aufbau einer Steifigkeitsmatrix

Man erkennt, wie innerhalb einer nichtlinearen Berechnung der Direktor nach jedem Iterationsschritt in einem lokalen Feld zwischengespeichert und im nächsten Schritt wieder

zur Verfügung gestellt wird.

Desweiteren wird deutlich, wie in jedem Iterationsschritt die inkompatiblen Freiwerte α des EAS-Konzepts nach (3.38) aktualisiert werden und wie in jedem Iterationsschritt eine Abfrage durchlaufen wird, um den Sonderfall der Geometrieverschnidung zu behandeln.

3.9 Anwendungshinweise

Zur Durchführung einer Berechnung im Programmsystem FEMAS ist eine Input-Datei notwendig. In ihr werden alle wichtigen Daten, wie beispielsweise Knotenkoordinaten, Inzidenz, Belastung, Randbedingungen, Materialdaten usw., an das Programm übergeben, die zu einer FE-Berechnung benötigt werden. In diesem Kapitel soll der Aufbau dieser Datei kurz erläutert werden. Es wird dabei auf die Besonderheiten des neu entstandenen Elementtyps eingegangen. Genauere Informationen sind [BEEM, KÖNKE, MONTAG & ZAHLTEN 1996] zu entnehmen.

- **BLOCK : CRD** (“Knotenkoordinaten”)

Die auf der Schalenmittelfläche liegenden Knoten werden durch ihre *lokalen* Koordinaten festgelegt. Als zusätzliche Informationen müssen dem Programm die Geometriekennziffer mit zugehörigen Parametern (z.B. Radius, ...) übergeben werden, damit die globalen Koordinaten programmintern mittels einer Funktionsauswertung berechnet werden können.

- **BLOCK : CON** (“Kinematische Randbedingungen”)

In diesem Eingabeblock besteht die Möglichkeit die Lagerbedingungen festzulegen. Die Translations-, die Rotations- und auch der Dickenänderungsfreiheitsgrad bezogen auf die globale Basis können wahlweise gesperrt werden. Bei Anwendung der Transformation **Kapitel 3.7** beziehen sich die Randbedingungen auf die lokale Basis.

- **BLOCK : ETP** (“Elementtypparameter”)

Der Elementtyp wird in diesem Block angegeben. Er ist abhängig von der Schichtanzahl. Es stehen die Elemente **7651** (1 Schicht) bis **7662** (12 Schichten) zur Verfügung.

- **BLOCK : FDP** (“Eingeprägte äußere Kraft- und Knotenweggrößen”)

Der Benutzer besitzt die Möglichkeit, Knotenlasten oder Knotenverschiebungen korrespondierend zu den Freiheitsgraden in Richtung der globalen (bei veranlasster Transformation auch in lokalen) Koordinatenachsen vorzugeben.

- **BLOCK : MAN** (“Inzidenztabelle”)

In diesem Block gilt es die Inzidenz der Elemente zu definieren. Es ist darauf zu achten, dass die richtige Reihenfolge (Gegen-Uhrzeiger-Sinn) beibehalten wird.

- **BLOCK : ROT** (“Rotationsparameter”)

Dieser Block stellt die zentrale Position für dieses Element dar. Man kann zwei unterschiedliche Verwendungen unterscheiden

- Sonderbehandlung: Schalenverschneidung (**Kapitel 2.5**)
- Transformation der kinematischen Randbedingungen sowie der Lasten vom globalen in das lokale Koordinatensystem (**Kapitel 2.6**)

Der Aufbau des neu entwickelten Blocks ist wie folgt:

BLOCK : ROT			
0	LND	ROT1	ROT2

mit

LND - Knotennummer

ROT1 - 1. Rotationsparameter

ROT1 = 1: Transformation “global in lokal” für **Zylinderschale**

ROT1 = 2: Transformation “global in lokal” für **Kugelschale**

ROT2 - 2. Rotationsparameter

ROT2 = 1: Knoten liegt auf einer Schalenverschneidung

- **BLOCK : ESD** (“Elementsteifigkeitsdaten”)

Es wurden keine wesentlichen Änderungen am ESD-Block gegenüber [ECKSTEIN 1999] vorgenommen, daher folgt nur eine tabellarische Auflistung aller Parameter.

Die Daten sind unterteilt in Testparameter und Materialdaten. Die Testparameter **imdX** stehen im ESD-BLOCK vor den Materialdaten und gelten für ein gesamtes Element, d.h. für jede Schicht, wohingegen die Materialdaten schichtweise definiert werden können.

– **Testparameter**

10	20	30	40	50	60	70	80
nlay_max	imd1	imd2	imd3	imd4	imd5	imd6	imd7

Tabelle 3.2: Eingabe der Testparameter **imdX** im **BLOCK : ESD**

nlay_max	maximale Anzahl der Layer
imd1	Art der Bildung der Ableitung des Direktors 0.0: $\sum_{i=1}^4 N_{i,\alpha} d^i$ 1.0: $\sum_{i=1}^4 N_i d_{,\alpha}^i$
imd2	<i>Assumed-Strain</i> -Ansatz für transversale Verzerrungsanteile 0.0: ohne <i>Assumed-Strain</i> 1.0: mit <i>Assumed-Strain</i>
imd3	Berücksichtigung der 2. Variationen der Schubverzerrungen $E_{\alpha 3}^{(0)}$ 0.0: ohne 2. Variation von $E_{\alpha 3}^{(0)}$ 1.0: mit 2. Variation $E_{\alpha 3}^{(0)}$
imd4	Berücksichtigung aller 2. Variationen 0.0: ohne 2. Variation 1.0: mit 2. Variation
imd5	Anteile der Verzerrungen in transversaler Richtung 0.0: $E_{\alpha\beta}^{(0)}, E_{\alpha\beta}^{(1)}, E_{\alpha 3}^{(0)}, E_{33}^{(0)}$ 1.0: $E_{\alpha\beta}^{(0)}, E_{\alpha\beta}^{(1)}, E_{\alpha 3}^{(0)}, E_{\alpha 3}^{(1)}, E_{33}^{(0)}$ 2.0: $E_{\alpha\beta}^{(0)}, E_{\alpha\beta}^{(1)}, E_{\alpha\beta}^{(2)}, E_{\alpha 3}^{(0)}, E_{\alpha 3}^{(1)}, E_{33}^{(0)}$
imd6	Spannungs- oder Zustandsgrößenausgabe Angabe des Elementes
imd7	Angabe des Gaußpunktes in der Ebene, über der Dicke und des Layers

Tabelle 3.3: Erläuterung der Testparameter **imdX** im **BLOCK : ESD**

– Materialdaten

H_o		Layerhöhe oben
H_u		Layerhöhe unten
N_{I3}		Integrationsordnung in ξ^3 -Richtung
KZ_E		Hyperelastisches Materialmodell
	0	$W = \frac{1}{2} \kappa I_{\mathbf{E}}^2 - 2\mu I_{dev} \mathbf{E}$
	1	$W = \frac{\lambda}{4} (J^2 - 1) - \frac{1}{2} (\lambda - 2\mu) \ln J + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\mathbf{b}] - 3)$
	2	$W = \frac{1}{2} \kappa (\ln J)^2 + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\hat{\mathbf{b}}] - 3)$
	3	$W = \kappa [\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J] + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\hat{\mathbf{b}}] - 3)$
E		E -Modul
ν		Querkontraktionszahl
KZ_{I3}		Integrationsart in ξ^3 -Richtung
	0	GAUSS-Quadratur
	1	Integration mit SIMPSON-Regel
KZ_P		Plastizitätsmodell VON MISES- J_2 -Fließtheorie nach SIMO
	1	Verfestigungsverhalten (exp) $\sigma_Y = \sigma_{Y_0} + (\sigma_{Y_\infty} - \sigma_{Y_0}) (1 - \exp[-\delta q]) + H q$
	2	Verfestigungsverhalten (pot) $\sigma_Y = a_1 (a_2 + q)^{a_3}$
σ_{Y_0}		Anfangsfließspannung / a_1
σ_{Y_∞}		Sättigungsfließspannung / a_2
δ		Sättigungsexponent / a_2
H		Linearer Ver- bzw. Entfestigungsparameter
KZ_D		Schädigungsmodell
	1	ROUSSELIER
f_0		Anfangshohlraumvolumen
σ_k		Materialparameter ROUSSELIER
D		Materialparameter ROUSSELIER
σ_{Xn}		Hohlrauminitiierungsspannung ($X = A, B$) (A: ARGON $\sigma_{An} > 0$, B: BEREMIN $\sigma_{Bn} < 0$)
f_X		Initiiertes Hohlraumvolumen ($X = A, B$)
f_N		Materialkonstante kontin. Porenentstehung
ε_N / σ_N		Mittelwert der Normalverteilung (kont. Porenent.)
s		Standardabweichung (kont. Porenent.)
KZ_B		Bruchkriterium
	1	$\sigma_{eq} = \sigma_{cr}$ [BEREMIN]
	2	$\sigma^* = \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \frac{\sigma_H^2}{\sigma_{eq}^2}} = \sigma_{cr}$ [LEMAITRE]
	3	$\bar{\sigma}_{eq} = \frac{1}{1-f} \sigma_{eq} = \sigma_c$ [HULT]
	4	$p = \int_0^t \frac{1}{1-f} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_p \cdot \dot{\varepsilon}_p} d\tau = p_R$ [CHABOCHE]
	5	$\varepsilon = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon}} d\tau = \varepsilon_c$ [TIROSH & MILLER]
	6	$f = f_{cr}$
	7	$\ln \frac{R}{R_0} = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_c} 0.283 e^{\frac{3}{2} \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}} d\varepsilon_{eq}^p = \left(\ln \frac{R}{R_0} \right)_c$ [ROUSSELIER]
	8	$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)_c$ [BEREMIN]
X_{cr}		Kritischer Wert (Bruch), $X = \sigma_{eq}, \dots, p, \dots, R/R_0$
ρ		Dichte

Tabelle 3.4: Erläuterung der Materialdaten im **BLOCK : ESD**

Die Eingabe über den **BLOCK : ESD** ist dabei wie folgt anzuordnen.

10	20	30	40	50	60	70	80
H_o	H_u	N_{I3}	KZ_E	E	ν	KZ_{I3}	KZ_P
σ_{Y_0}	σ_{Y_∞}	δ	H	KZ_B	X_{cr}	KZ_D	f_0
σ_k	D	σ_{Xn}	f_X	f_N	ε_N	s	ρ

Tabelle 3.5: Eingabe der Materialdaten im **BLOCK : ESD**

Zur genauen Spezifizierung eines Materialmodells der Elastizität, der Elasto-Plastizität und der Elasto-Plastizität mit Schädigung sind folgende Kennziffern zu setzen:

	KZ_E	KZ_P	KZ_D
elastisch	0,1,2 oder 3	0	0
elasto-plastisch	2	1 oder 2	0
elasto-plastisch mit Schädigung	2	1 oder 2	1

Tabelle 3.6: Spezifizierung der Materialmodelle im **BLOCK : ESD**

Ein Beispiel für eine solche Input-Datei ist in **Abbildung 5.34** dargestellt.

Kapitel 4

Postprocessing

Als eine wesentliche Aufgabe dieser Arbeit stellte sich die adäquate Darstellung der Ergebnisse heraus, da unter dem Programmsystem FEMAS2000 kein den Anforderungen angemessener Postprozessor existiert. Aus diesem Grunde ist es notwendig zur Präsentation der Ergebnisse auf ein anderes Programmsystem zu wechseln, welches ebenfalls am Lehrstuhl für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum zur Anwendung kommt. Zwischen den beiden Systemen, FEMAS und MARC, musste eine Schnittstelle geschaffen werden. Darstellung und Ausdruck von Deformations- und Spannungsplots können dadurch mit Hilfe des Postprozessors MENTAT 3.3 von MARC erfolgen.

4.1 Schnittstelle zwischen FEMAS und MARC

Um mit dem Postprozessor MENTAT 3.3 arbeiten zu können, müssen dem Programm mittels einer Input.t19-Datei eine Vielzahl an Informationen übergeben werden. In dieser Datei sind alle wichtigen struktur- und elementspezifischen Daten enthalten, wie beispielsweise die Knotenanzahl, Knotenkoordinaten, Knoten-Elementzuordnung, Knotenverschiebungen, Spannungswerte in den Gaußpunkten usw.. Im Rahmen dieser Arbeit musste zur Erzeugung dieser Datei ein Programm konzipiert werden.

Bei dem Aufbau der Datei ist eine vorgeschriebene Struktur einzuhalten. Die erforderlichen Daten sind zum einen knoten- und zum anderen gaußpunktbezogen und werden aus einer sogenannten Restart-Datei ausgelesen. Am Ende einer Berechnung mit dem Programmsystem FEMAS besteht die Möglichkeit diese Restart-Datei zu erzeugen. In ihr sind die Knoten- und Elementanzahl, der Elementtyp (dadurch die Schichtanzahl), die Inzidenz, die Knotenkoordinaten sowie die berechneten Knotenverschiebungen gespeichert. Zur Erstellung der Input.t19-Datei werden noch gaußpunktspezifische Daten

benötigt, die nicht in der Restart-Datei enthalten sind. Zur Ermittlung der fehlenden Informationen mussten sowohl im linearen als auch im nichtlinearen Programmteil neue Algorithmen eingefügt werden, welche bei der Berechnung mit FEMAS2000 eine Datei "Spannungen" erzeugen. Sie enthält alle benötigten gaußpunktbezogenen Spannungswerte nach Laststufe, Elementnummer und Gaußpunkt geordnet. Damit sind alle für die Input.t19 benötigten Informationen in den beiden vorhandenen Dateien "Spannungen" und "Restart" enthalten.

Das neu entwickelte Programm "FemasInMentat" liest alle diese Informationen aus und formt sie in die neu erzeugte Datei "Femas.t19" um. Diese Datei verarbeitet der Postprozessor MENTAT 3.3, um grafische Darstellungen der Spannungen und Deformationen zu ermöglichen.

Die Anordnung aller Daten geschieht so, dass alle Elemente "7651 bis 7662" des Programmsystems FEMAS in Elemente des Typs Nr. 7 des Programmsystems MARC gewandelt werden, um in MENTAT dargestellt werden zu können. Es handelt sich hierbei um ein 8-knotiges Volumenelemente mit 8 Gaußpunkten und 3 Knotenfreiheitsgraden. Ein Mehr-Schichten-Element aus FEMAS wird demzufolge durch mehrere übereinander angeordnete Volumenelemente dargestellt.

Eines der Hauptprobleme war die Umwandlung eines degenerierten 4-knotigen Schalenelementes in ein 8 knotiges Volumenelement. Hierzu mussten die errechneten Verschiebungswerte der auf der Mittelfläche der ersten Schicht liegenden Knoten mit Hilfe des im zweiten Kapitel vorgestellten Formelwerkes in die Werte der auf der Schichtober- bzw. Schichtunterfläche befindlichen Knoten umgerechnet werden. Dieses konnte durch das Einlesen des Direktors, der Schichthöhen und anderer strukturspezifischer Größen realisiert werden. Bei der Übergabe der Spannungswerte bedarf es keiner Umrechnung, da beide Elemente über 8 Gaußpunkte verfügen.

In der **Abbildung 4.1** wird der Ablauf des Postprocessings einer FE-Berechnung mit der Hilfe des neu entwickelten Programmes erläutert.

Programmsystem FEMAS

FEMAS 2000

- Preprocessing
- Numerische Umsetzung der FE-Methode
- Erzeugung der Dateien: "SPANNUNGEN" und "RESTART"

Schnittstelle

FEMASInMENTAT

- Einlesen der Dateien: "SPANNUNGEN" und "RESTART"
- Berechnung der knotenspezifischen (Verschiebungen) und gaußpunktspezifischen (Spannungen) Daten
- Erzeugen der "FEMAS.T19"-Datei mit allen strukturspezifischen Daten

Programmsystem MARC

MENTAT 3.3

- Einlesen der Datei: "FEMAS.T19"
- Visualisierung der Struktur, Deformationen und Spannungen
- Erzeugung von Spannungs- und Deformationsplots

Abbildung 4.1: Einbindung der Schnittstelle in das Gesamtkonzept

Nachfolgend einige Eigenschaften des neu entwickelten Programms:

- Durch eine zusätzlich eingebaute Abfrage wird es dem Benutzer ermöglicht, die berechnete Struktur entweder als **Schale** oder als **Volumenelement** darzustellen.

Zur Darstellung der Struktur durch flächenartige Elemente wird einfach die Höhe aller Volumenelemente zu null gesetzt. Die so entstehende Fläche repräsentiert die Referenzfläche der Struktur. Die Visualisierung mehrerer Schichten, im Rahmen des Mehr-Schichten Konzepts, ist hierbei nicht möglich. Der Benutzer kann jedoch wählen, welche Schicht angezeigt werden soll. Die in diesem Fall dargestellten Spannungswerte stellen die auf die jeweilige Schichtmitte interpolierten Werte der Gaußpunkte dar. Es wird hierdurch ermöglicht die Spannungen jeder einzelnen Schicht separat zu betrachten.

Alternativ kann die Elementhöhe entsprechend der Schichthöhe gesetzt werden, dadurch wird aus dem Schalenelement in FEMAS eine dreidimensionale Struktur in MARC erzeugt.

- Bei der Darstellung **zusammengesetzter Schalenträgerwerke** besteht die Schwierigkeit darin, dass diese Strukturen aus unterschiedlichen Elementtypen mit verschiedener Schichtenanzahl bestehen können. Zur Behebung dieses Problems wurde ein spezieller Algorithmus entwickelt, der eine komplett neue Elementnummerierung mit zugehöriger Knotenzuordnung erzeugt.
- Wird während der Berechnung mit dem dem Programmsystem FEMAS eine in Kapitel 3.6 beschriebene **Transformation** durchgeführt, ist es außerdem erforderlich die entsprechenden Knotenfreiheitsgrade wieder von dem lokalen in das globale Koordinatensystem zurück zu transformieren. Eine solche Rücktransformation galt es zusätzlich noch in das Programm einzuarbeiten, damit eine einheitliche, korrekte Darstellung aller Knotenverschiebungen im globalen Koordinatensystem gewährleistet ist.
- Desweiteren wird dem Benutzer die Möglichkeit geboten seine gerechnete Struktur zu Darstellungszwecken beliebig oft zu **spiegeln**. Da viele der im Rahmen dieser Arbeit berechneten Beispiele Symmetrien aufweisen, ist es möglich nur einen Teil der Gesamtstruktur zu rechnen, was eine deutliche Rechenzeitverkürzung mit sich bringt. Bei sehr komplexen Strukturen, wie beispielsweise einem Gasdruckbehälter, ist eine Berechnung der gesamten Struktur aufgrund der erforderlichen enormen Speicherkapazität nicht einmal möglich. Durch die in das Programm implementierte Spiegelung kann die Teilstruktur nachträglich auf ein Gesamtes ergänzt werden.

Abschließend ist in **Tabelle 4.1** eine kurze Bedienungsanleitung des Programms “FemasInMentat” zusammengestellt.

- Aufruf des Programmes mit dem Befehl “Mentat.J210”
- Abfrage: Wollen Sie auch Spannungen anzeigen ?
 - Eingabe: “J” oder “j” für eine Darstellung der Verschiebungen und der Spannungen
 - * Abfrage: Geben Sie bitte den darzustellenden Lastschritt an
 - * Eingabe: “0” für eine Darstellung des linearen Lastschrittes
 - * Eingabe: “i” für eine Darstellung des i-ten Lastschrittes
 - * Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
 - Eingabe: “N” oder “n” für eine Darstellung der Verschiebungen
 - Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
- Abfrage: Wollen Sie Schalen- oder Volumenelemente darstellen ?
 - Eingabe: “S” oder “s” für eine Darstellung als Schale
 - * Abfrage: Es handelt sich um ein Element mit nlay Schichten, geben Sie bitte die darzustellende Schicht an .
 - * Eingabe der darzustellenden Schichtnummer
 - * Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
 - Eingabe: “V” oder “v” für eine Darstellung mit Volumenelementen
 - Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
- Abfrage: Wollen Sie eine Spiegelung durchführen ?
 - Eingabe: “J” oder “j” um eine Spiegelung durchzuführen
 - * Abfrage: Geben Sie bitte die Achse an um die gespiegelt werden soll.
 - * Eingabe: “0” zum beenden des Programms
 - * Eingabe: “1”, “2” oder “3” für die entsprechende Achse
 - Abfrage: Geben Sie bitte den Winkel an unter dem gespiegelt werden soll.
 - Eingabe des Winkels (0° - 360°)
 - Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
 - * Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
 - Eingabe: “N” oder “n” um keine Spiegelung durchzuführen
 - Andere Eingaben sind nicht zulässig und führen zu einer erneuten Abfrage
- Ende des Programmes “FemasInMentat”

Tabelle 4.1: Ablaufdiagramm für den Benutzer

Im Rahmen dieser Arbeit ist so ein effizientes Programm entstanden, welches im Stande ist, alle mit den Elementen 7651 bis 7662 des Programmsystems FEMAS2000 gerechneten Strukturen zur Darstellung der Ergebnisse in den Postprozessor des Programmsystems MARC zu übernehmen. In dieser Arbeit ist durch die neu programmierte Schnittstelle ein Postprozessor für das Programmsystem FEMAS2000 entstanden, der eine sofortige Illustration der Verschiebungs- und der Spannungsergebnisse einer Berechnung ohne großen Arbeitsaufwand ermöglicht.

Kapitel 5

Numerische Beispiele

Die in den vorangegangenen Kapiteln dargestellte Theorie zusammengesetzter Schalentragwerke wird abschließend an einigen ausgewählten Test- und Anwendungsbeispielen verifiziert. Aus diesem Grund erfolgte die Implementierung der aufgezeigten Algorithmen mit Hilfe der Programmiersprache FORTRAN in ein bestehendes Element des Programmsystems FEMAS2000 (Finite Element Moduln Allgemeiner Strukturen) des Lehrstuhls für Statik und Dynamik der Ruhr-Universität Bochum. Es handelt sich dabei um die Elemente 7651 bis 7662 (Elementnummer - 7650 = Schichtanzahl) nach ECKSTEIN [ECKSTEIN 1999].

5.1 Testbeispiele

Es erfolgt zunächst die Beurteilung der Leistungsfähigkeit der eingebundenen Routinen anhand von Standard-Tests, zu denen Referenzlösungen vorhanden sind. Daraufhin wird die baupraktische Anwendung an einem praxisrelevanten Beispiel, einem auf Stützen gelagerten Gasdruckbehälter, präsentiert, was das große Anwendungsspektrum des entwickelten Schalenelementes und die numerische Umsetzung der Materialmodelle unterstreicht.

5.1.1 Pinch-Kugel mit 18° -Loch unter diametraler Einzellast

Die Pinch-Kugel mit einem 18° Loch dient bei der Untersuchung von Schalenelementen als Standard-Testbeispiel, da sie mit einem Radius/Dicken-Verhältnis von $R/h = 250$ eine dünne Schalenstruktur darstellt.

Sie ist ein vielzitiertes Beispiel in der Literatur, weil bei einer unkorrekten Schalenformulierung das Element Looking aufweist. Mit der Hilfe des implementierten Enhanced-Assumed-Strain-Konzeptes (**Kapitel 3.5.2**) sollen diese “künstlichen Versteifungseffekte” beseitigt werden.

Die Kugel ist durch vier diametral angreifenden Einzelkräften belastet. Die numerische Berechnung erfolgt entsprechend der **Abbildung 5.1** unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen am Viertelsystem. Ebenso können die geometrischen Abmessungen und Materialkennwerte der Abbildung entnommen werden.

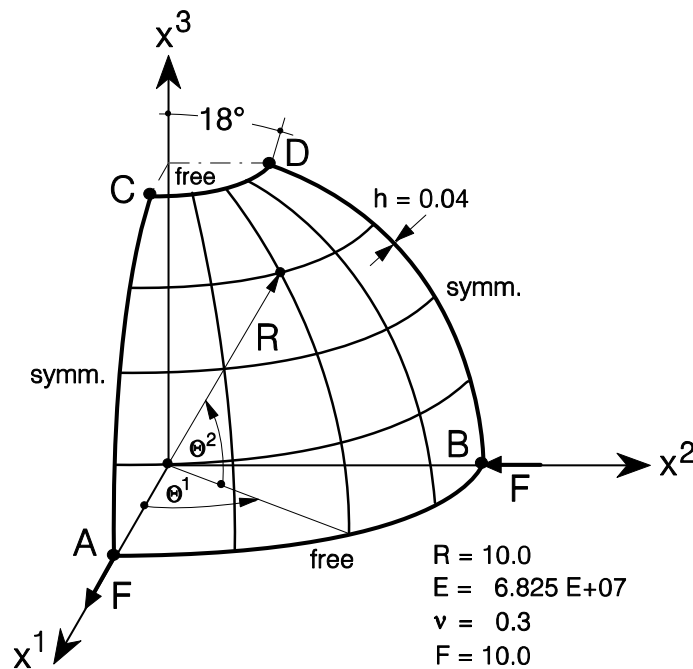


Abbildung 5.1: Geometrie und Belastung der Pinch-Kugel mit 18°-Loch

Wie in der Literatur üblich, wird das Strukturverhalten anhand der Verschiebungen der Lastangriffspunkte zunächst in einer geometrisch linearen Untersuchung analysiert. Da in der linearen Theorie die Verschiebungen der Punkte A und B mit Ausnahme des umgekehrten Vorzeichens identisch sind, wird lediglich die Verschiebung ΔX_A^1 untersucht.

Im Rahmen einer Konvergenzstudie findet eine immer feinere Diskretisierung statt. Die Berechnung aus der Diplomarbeit von Kintzel [KINTZEL 1998] wird im Rahmen dieser Arbeit für dieses Beispiel als Referenzlösung herangezogen.

Das Ergebnis der Konvergenzstudie für die Verschiebung im Punkt A ist in **Abbildung 5.2** dargestellt. Es ist eine exakte Übereinstimmung mit den Resultaten von Kintzel zu erkennen. Da er mit derselben Rotationsformulierung und demselben Materialgesetz (St.VENANT-KIRCHHOFF) gearbeitet hat, ist dies folgerichtig.

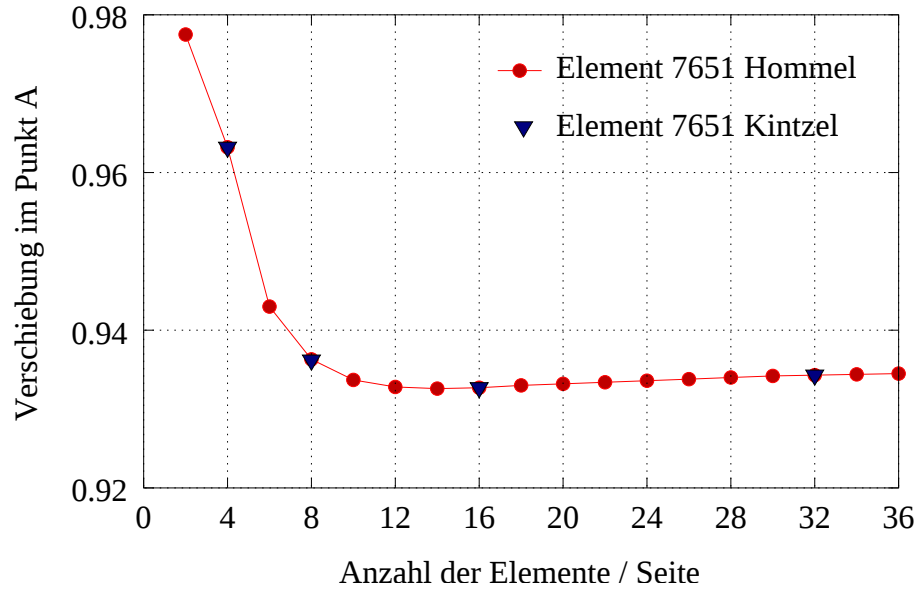


Abbildung 5.2: Konvergenzverhalten für den linearen Lastschritt

Auffällig ist eine gute Konvergenz, die schon bei einer groben Diskretisierung auftritt. Vergleicht man die Ergebnisse der vertikalen Verschiebung $\Delta X_A^1 = 0.9345$, welche man mit einem 36×36 - Netz erhält, mit der exakten Lösung $\Delta X_{A(ref)}^1 = 0.94$, so ist ebenfalls eine gute Übereinstimmung zu erkennen, was für die Leistungsfähigkeit des entwickelten Elementes spricht.

Anhand nichtlinearer Berechnungen soll nachfolgend untersucht werden, ob die für den linearen Bereich festgestellten Konvergenzaussagen und guten Übereinstimmungen mit den Ergebnissen von Kintzel auch auf den nichtlinearen Bereich übertragen werden können. Es findet eine gleichmäßige Belastungssteigerung mit einem maximalen Lastinkrement $\Delta f = 0.5$ bis zu einem Lastfaktor $\lambda = 20$ statt. Anwendung findet hierbei das NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Diese Berechnung erfolgt wie im linearen Fall für eine Mehrzahl an Diskretisierungsvarianten.

Im Vergleich zu der linearen Konvergenzstudie fällt es auf, dass im nichtlinearen Fall eine feinere Diskretisierung notwendig ist, um eine nahezu exakte Lösung zu erhalten. Die lineare Konvergenzuntersuchung (**Abbildung 5.2**) ergibt beispielsweise bei einer

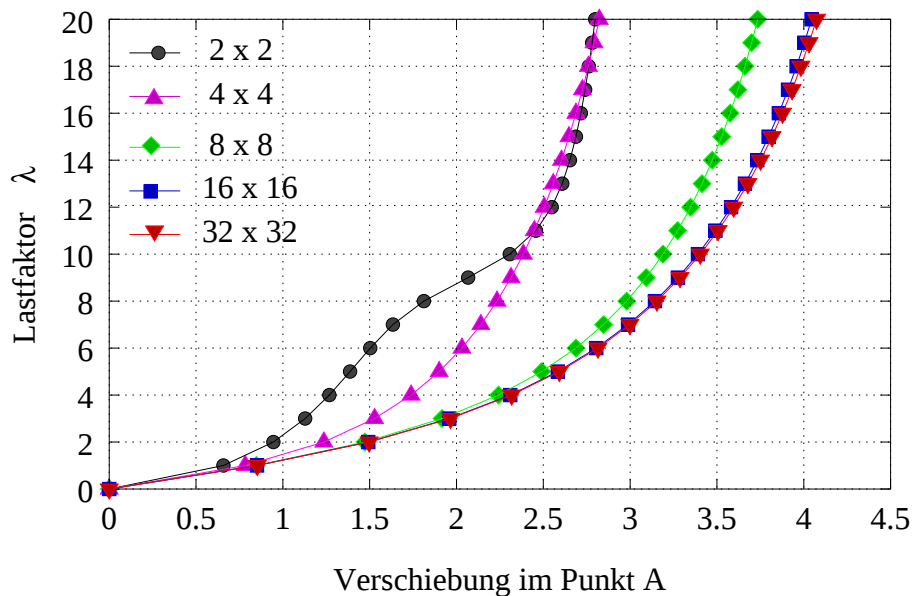


Abbildung 5.3: Last-Verschiebungs-Diagramme des Punktes A für eine Netzverfeinerung

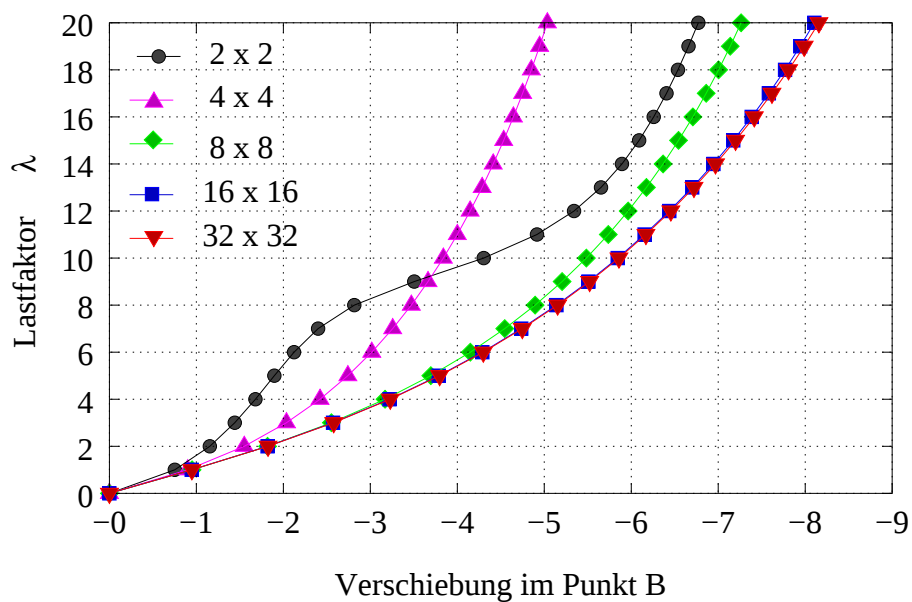


Abbildung 5.4: Last-Verschiebungs-Diagramme des Punktes B für eine Netzverfeinerung

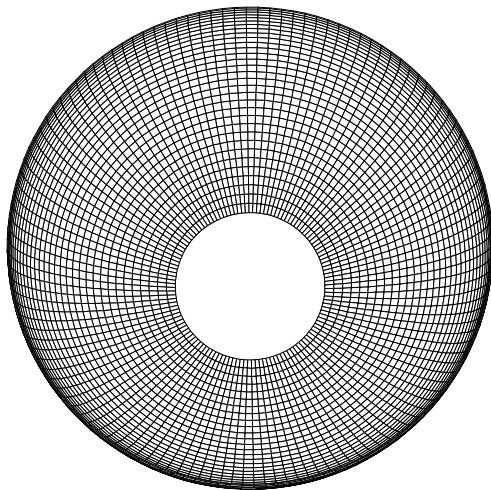
Viertelkreis-Diskretisierung von 4×4 Elementen Verschiebungswerte, die weniger als drei Prozent von der auskonvergierten Lösung abweichen. Dieses schnelle Konvergenzverhalten ist für den nichtlinearen Fall (**Abbildungen 5.3** und **5.4**) nicht gegeben. Für den Lastfaktor $\lambda = 20$ ist ein 16×16 - Netz erforderlich, um nahezu auskonvergierte Ergebnisse der Verschiebungen zu erhalten.

Es lässt sich sehr gut erkennen, wie durch eine Netzverfeinerung ein immer genaueres Ergebnis erzielt werden kann. Das aus der Reihe fallende 2×2 - Netz wird an dieser Stelle nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt. Es handelt sich dabei um ein sehr grobes Netz, welche keine exakten Ergebnisse liefern kann.

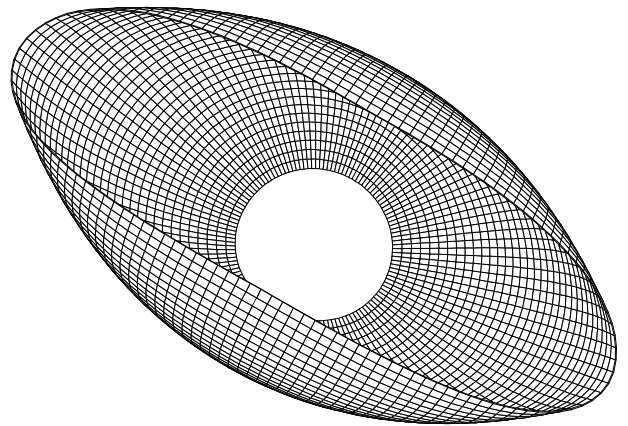
Element	Lastschritt λ					Lastangriffspunkt
	4	8	12	16	20	
7651 Hommel	2.3095	3.1427	3.5814	3.8562	4.0449	A
7651 Kintzel	2.3119	3.1485	3.5906	3.8658	4.0601	
7651 Hommel	3.2201	5.1404	6.4375	7.3843	8.1058	B
7651 Kintzel	3.2231	5.1507	6.4576	7.4153	8.1477	

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung Hommel/Kintzel für eine 16×16 Diskretisierung

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Kintzel [KINTZEL 1998] (**Tabelle 5.1**) zeigt wie schon im linearen Fall eine Übereinstimmung.



Lastfaktor $\lambda = 0$



Lastfaktor $\lambda = 10$

Abbildung 5.5: Unverformte und verformte Konfiguration

Um einen Eindruck über die Größenordnung der auftretenden Verformungen zu erhalten, wird in den **Abbildungen 5.5** und **5.6** die Struktur in unterschiedlichen Verformungsstadien dargestellt. Das Viertelsystem der Halbkugelschale ist mit 32×32 Elementen diskretisiert worden. Das erste Bild zeigt die unverformte sowie die verformte Konfiguration mit einem Lastfaktor von $\lambda = 10$. Um die Verformungsentwicklung noch zu verdeutlichen wurden Berechnungen bis zu einem Lastfaktor von $\lambda = 35$ durchgeführt, deren Ergebnisse in **Abbildung 5.6** zu sehen sind.

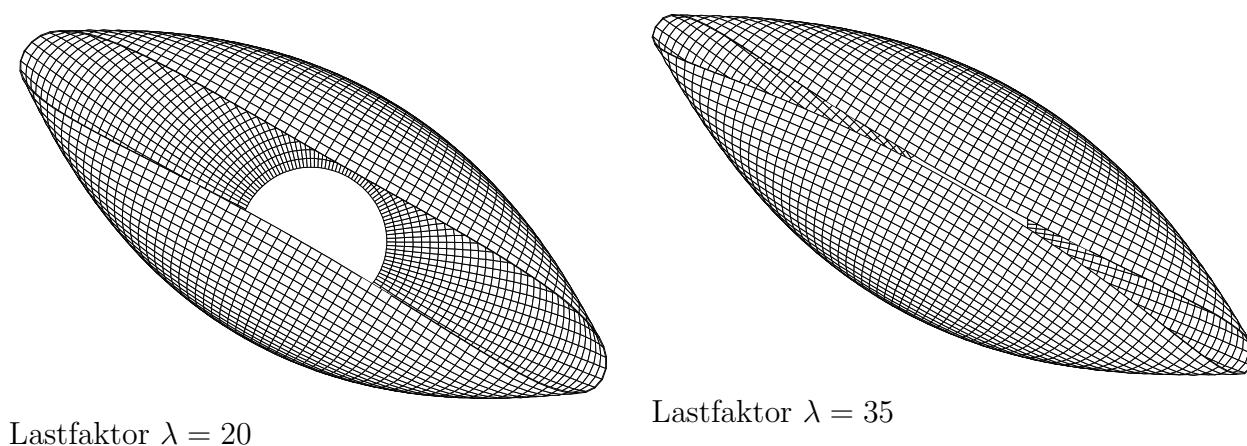


Abbildung 5.6: Verformte Halbkugelschale

Alle diese Deformationsplots sind mit Hilfe des im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Programms “FemasinMentat” entstanden. Durch zweimaliges Spiegeln entsteht die Gesamtstruktur, welche mit dem Postprocessor MENTAT 3.3 des Programmsystems MARC dargestellt werden kann.

Das Beispiel der Halbkugelschale mit Loch ist mit sehr großen Verschiebungen und großen (finiten) Rotationen behaftet, wie es in den letzten beiden Abbildungen noch einmal verdeutlicht wurde. Da die Ergebnisse des im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Elementes 7651 eine gute Übereinstimmung mit den Werten von Kintzel [KINTZEL 1998] aufweisen, kann davon ausgegangen werden, dass die Routinen, die im Zuge der Abänderung der Rotationsformulierung eingefügt wurden, korrekt arbeiten. Es bleibt in den folgenden Testbeispielen die Überprüfung der unterschiedlichen Materialgesetze, des Mehr-Schichten-Konzeptes, sowie der neu implementierten Transformationsroutinen (**Kapitel 3.6** und **3.7**).

5.1.2 Dickwandiger Zylinder unter Innendruck

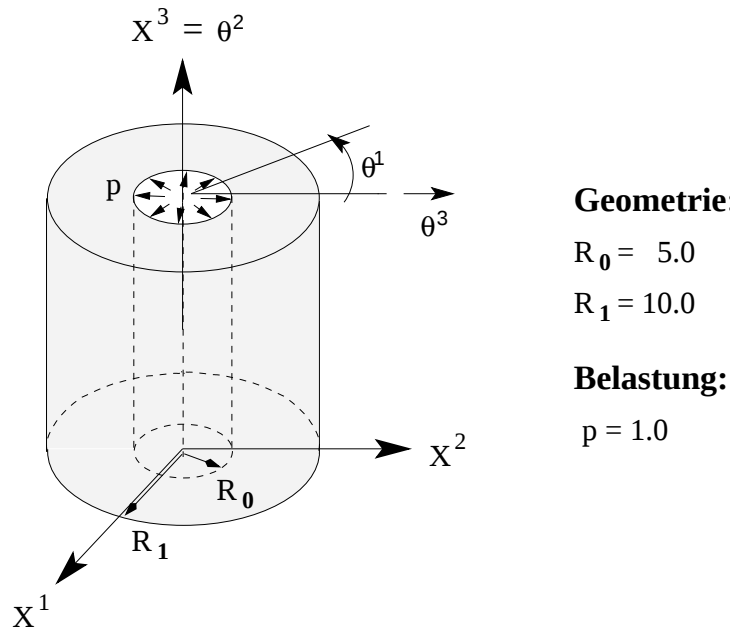


Abbildung 5.7: Geometrie und Belastung des dickwandigen Zylinders

Anhand des nächsten Testbeispiels, einem unendlich langen dickwandigen Zylinder unter Innendruck (**Abbildung 5.7**), wird die Leistungsfähigkeit des Mehr-Schichten-Schalenelementes bezüglich der Erfassung transversaler Verzerrungen und Spannungen nachgewiesen. Die Schale besteht aus drei isotropen Schichten, wobei der Kern über eine geringere Steifigkeit verfügt als die ihn umschließenden äußeren Schichten. Aufgrund der Rotationssymmetrie von Geometrie und Last genügt die Diskretisierung mit einem Element in Ringrichtung. Mit Hilfe des Elementes 7659 wird die Schale in 9 Subelemente in Dickenrichtung unterteilt (**Abbildung 5.8**).

Ferner dient dieses Beispiel der Überprüfung der Leistungsfähigkeit der neu implementierten Transformation (**Kapitel 3.7**). Ohne diese Transformation wäre nur eine Berechnung des Systems als Viertel möglich gewesen. Erst durch die neuen Routinen möglich gewordene Rotation der DIRICHLET-Randbedingungen des globalen in das lokale Koordinatensystem, wird es ermöglicht jedes beliebige Teilsegment des Zylinders zu diskretisieren und zu berechnen. Erfolgte die Berechnung bei [BAŞAR & DING 1995] beispielsweise noch an einem Achtel der Schale, beschränkt sich diese Arbeit auf ein Segment von 1° (**Abbildung 5.8**). Durch eine dadurch verminderte Anzahl an Systemfreiheitsgraden wird die Rechenzeit deutlich gesenkt und Speicherplatz gespart, was besonders bei komplexen Strukturen von großer Wichtigkeit ist.

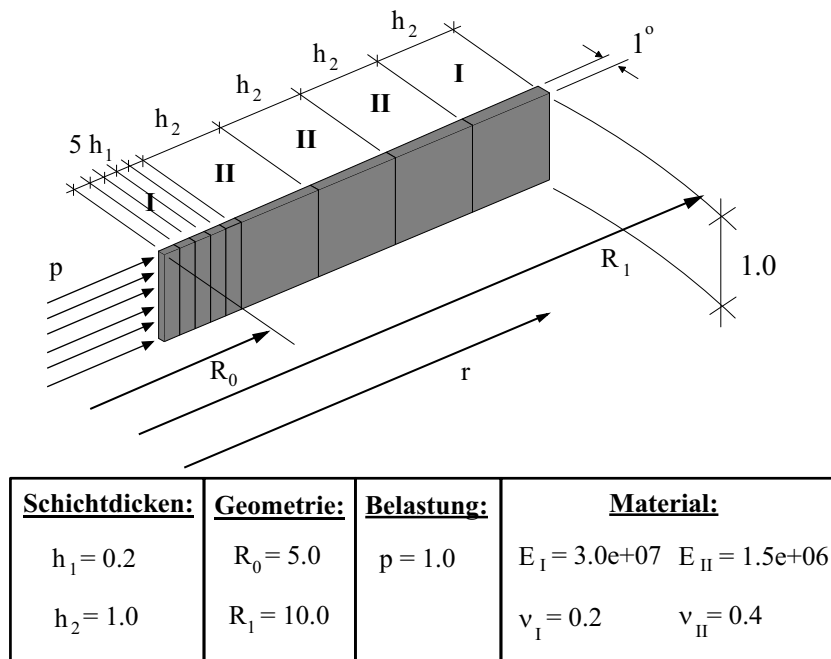


Abbildung 5.8: Diskretisierung über die Schalendicke des dickwandigen Zylinders

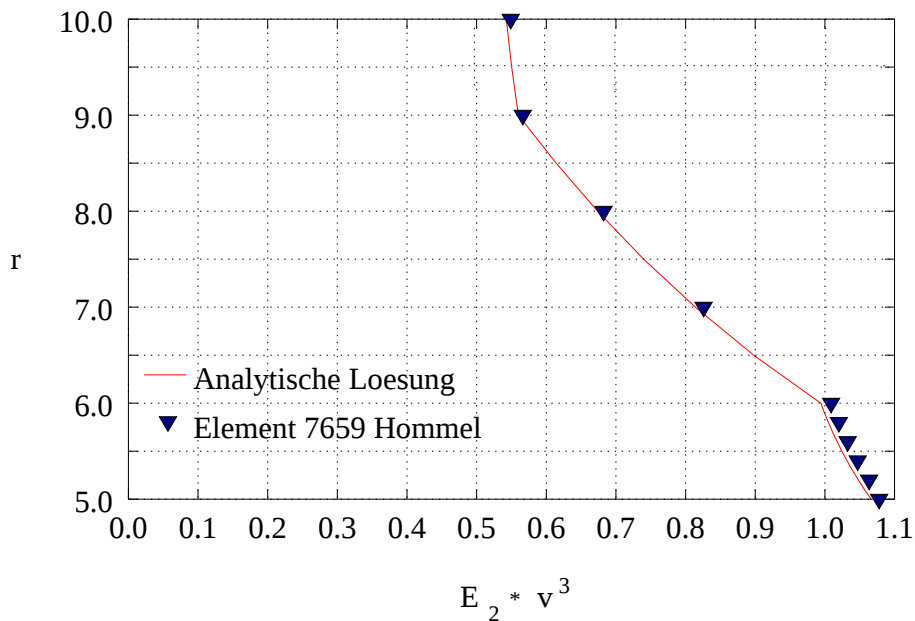
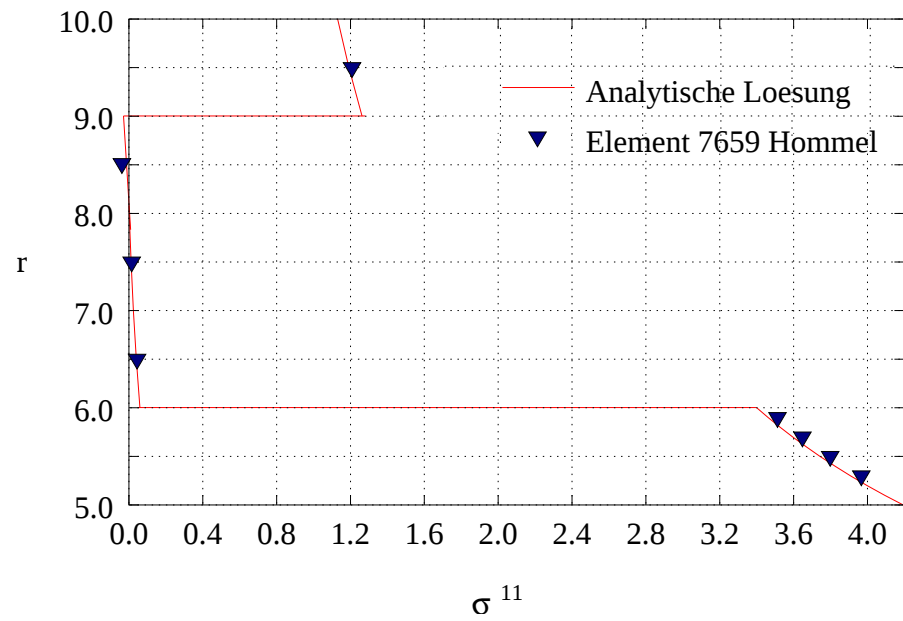
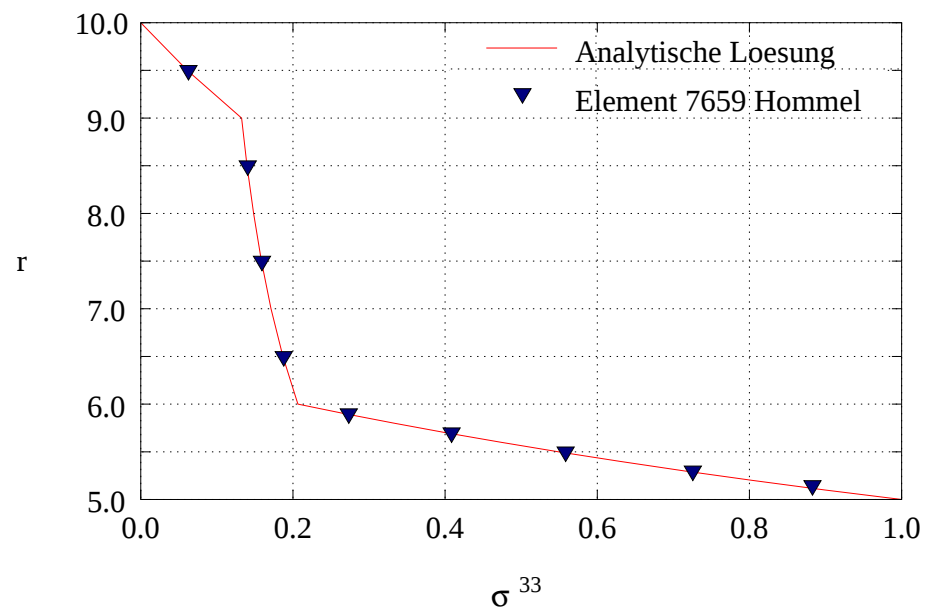


Abbildung 5.9: v^3 -Verlauf über den Radius

Ein Vergleich in den **Abbildungen 5.9, 5.10 und 5.11** mit der analytischen Lösung [TIMOSHENKO & GOODIER 1951] zeigt gute Übereinstimmungen. Sowohl in der Verschiebungs- als auch in den Spannungsverteilungen über den Querschnitt sind keine großen Abweichungen erkennbar. Es kann folglich davon ausgegangen werden, dass

Abbildung 5.10: σ^{11} -Verlauf über den RadiusAbbildung 5.11: σ^{33} -Verlauf über den Radius

die variierten Routinen bezüglich der Transformation, der Spannungsermittlung und des Mehr-Schichten-Konzeptes korrekt implementiert wurden und richtige Ergebnisse liefern.

Die **Abbildungen 5.12** und **5.13** zeigen die beiden unterschiedlichen Darstellungsvarianten, die durch das im Rahmen dieser Arbeit neu entstandene Programm “FemasinMentat” möglich sind. Im ersten Bild ist die Struktur als Volumen in Form eines Segments (32°) dargestellt. Diese Variante neigt jedoch in diesem Beispiel zur Verfälschung der Ergebnisse, da die vorhandenen Druckspannungen in der Darstellung nicht erfaßt werden. Betrachtet man hingegen die zweite Abbildung, in der die Mittelfläche jedes Layers illustriert wird, ist in der Schicht $r=8.5$ die sehr kleine Druckspannung erkennenbar.

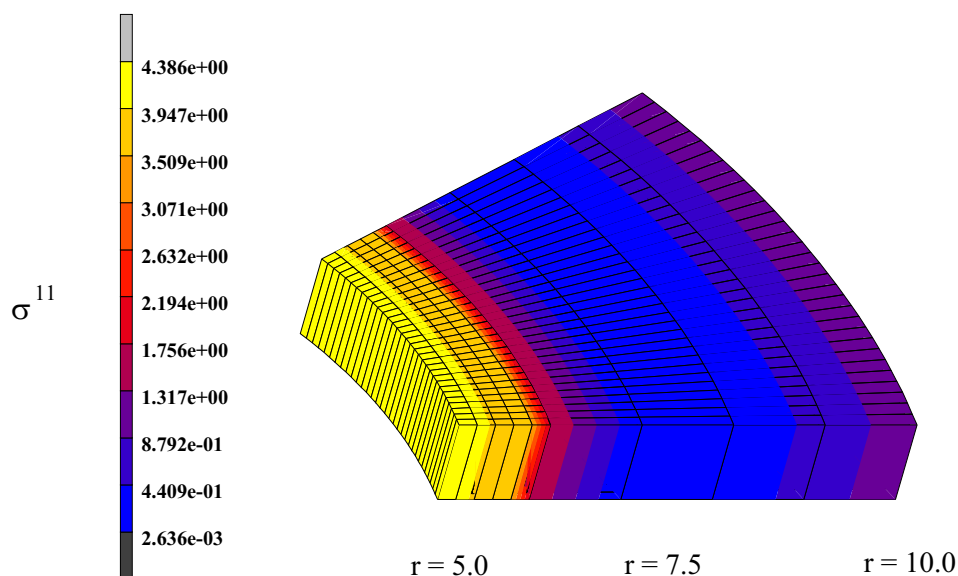


Abbildung 5.12: Ausgabe von σ^{11} eines 32° Volumensegmentes der Struktur mit Hilfe des Postprozessors Mentat

Abschließend erfolgt in der **Abbildung 5.14** die Darstellung der unverformten und der verformten Konfiguration. Es wurde dazu das Einzelsegment mit Hilfe von “FemasinMentat” sooft gespiegelt, bis ein Vollkreis entstand. Aufgrund der sehr kleinen Deformationen, wie sie im Rahmen dieser linearen Berechnung ermittelt wurden, bedurfte es einer Multiplikation der Ergebnisse mit dem Faktor 10^6 um in der Darstellung einen Unterschied zwischen der Referenz- und der deformierten Konfiguration zu verdeutlichen.

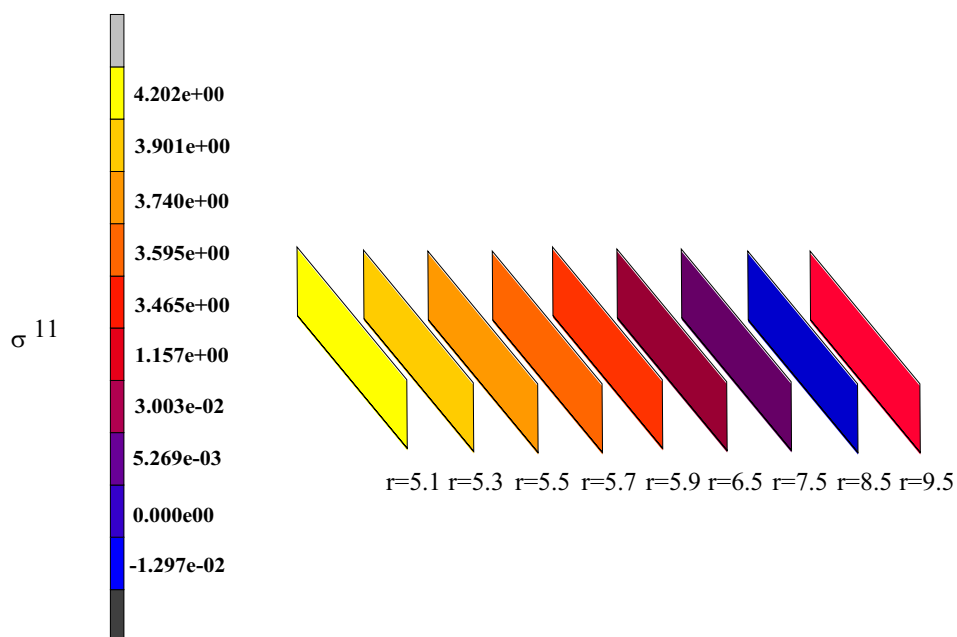


Abbildung 5.13: Layerweise Ausgabe von σ^{11} der Struktur mit Hilfe des Postprozessors Mentat

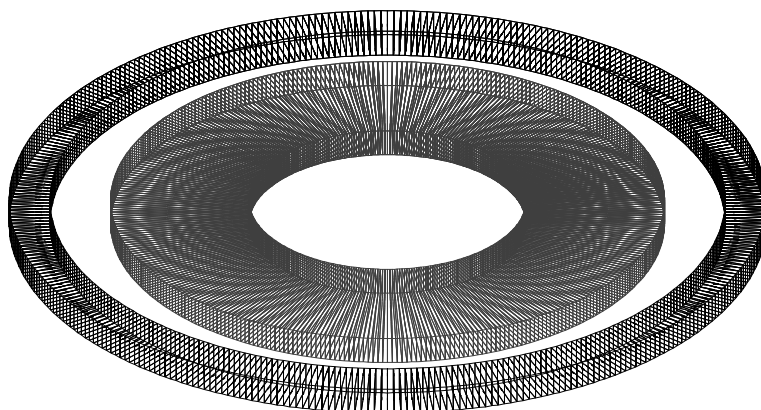


Abbildung 5.14: Darstellung der unverformten und verformten Konfiguration

Die Fähigkeit, welche das im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelte Element, bezüglich der Erfassung von Verschiebungs- und Spannungsverteilungen über die Dicke aufweist, wird an diesem Beispiel sehr gut verdeutlicht. Das Element ist zur Berechnung von sehr dicken Schalenstrukturen geeignet.

5.1.3 U-Träger unter Einzellast

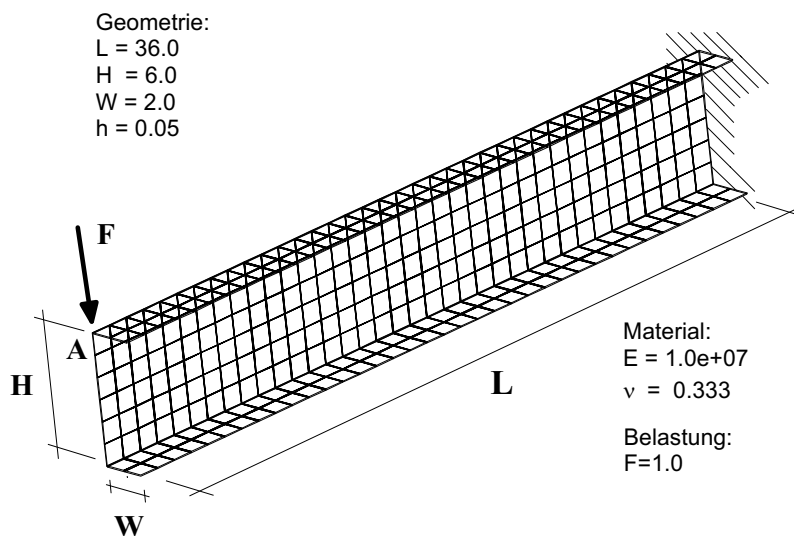


Abbildung 5.15: Geometrie und Belastung des U-Trägers

Anhand des kommenden Beispiels wird die Berechnung von Schalenverschnitten überprüft. Um zu testen, ob die zu diesem Zweck in das Element eingebauten Routinen korrekt arbeiten, wird der U-Träger mit Einzellast (**Abbildung 5.15**) gerechnet. Diese eingespannte Struktur besitzt zwei Verschnittlinien.

Diese Arbeit berücksichtigt zwei Arten der Modellierung der Verschnittlinien. Einerseits ist die Ausbildung steif möglich, was einer Sperrung der Dickendehnung λ bei allen auf der Verschnittlinie liegenden Punkten entspricht (**Fall I**). Zum anderen ist auch eine Modellierung ohne jegliche Modifizierung, das heißt ohne Dehnungsbehinderung in Dickenrichtung möglich (**Fall II**).

Da dieses Beispiel ebenfalls in der Literatur zitiert wird, ist ein Vergleich mit diesen Ergebnissen möglich. Genau wie bei [BETSCH, GRUTTMANN & STEIN 1996] findet die Diskretisierung im Rahmen dieser Arbeit mit der Hilfe eines 10×36 - Netzes statt. Bei [CHRÓSCIELEWSKI, MAKOWSKI & STUMPF 1992] wurde ein 5×6 - Netz verwendet.

Element	Diskretisierung	Verschiebung $v_A^3 [\times 10^{-3}]$
Betsch	10×36	1.0998
Chróścielewski	5×6 (9 – <i>knotig</i>)	1.1373
7651 Hommel (Fall I)	10×36	1.1000
7651 Hommel (Fall II)	10×36	1.1480

Tabelle 5.2: Gegenüberstellung Hommel/Betsch/Chróścielewski für eine lineare Berechnung

Die Berechnung wurde dort jedoch auch mit einem 9 knotigen Lagrange-Element durchgeführt.

Die lineare Berechnung ergibt eine sehr gute Übereinstimmung mit [BETSCH, GRUTTMANN & STEIN 1996] für den **Fall I**, wie **Tabelle 5.2** zeigt. Aufgrund der Gleichheit der beiden Finite Element Formulierungen ist dieses ein Indiz dafür, dass die Kopplung der Schalen korrekt ausgeführt wird.

Aus Gründen der ausführlicheren Überprüfung wird anschließend noch eine nichtlineare Berechnung durchgeführt. Die Ergebnisse sind in **Abbildung 5.16** dargestellt.

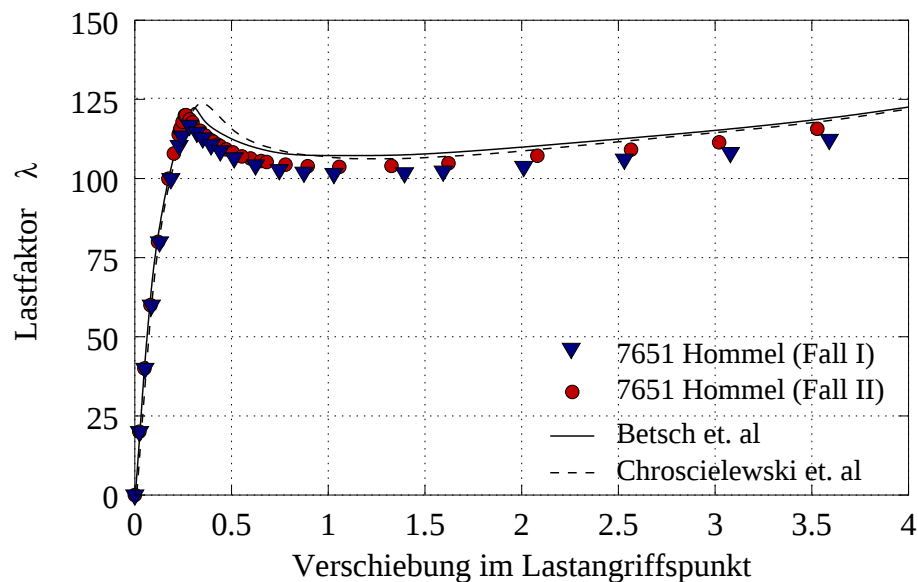


Abbildung 5.16: Last-Verschiebungs-Diagramm des U-Trägers

Hierbei sind ebenfalls die guten Übereinstimmungen der Resultate erkennbar. Es kann

also davon ausgegangen werden, dass eine Berechnung von zusammengesetzten Strukturen, das heißt Schalen mit Verschneidungslinien korrekt durchgeführt werden kann.

Die **Abbildung 5.17** zeigt den U-Träger in der verformten Konfiguration. Diese Deformation stellte sich bei einem Lastfaktor von $\lambda = 120.0$ ein und bewirkte eine Verschiebung von 5.0 in X^3 -Richtung des untersuchten Punktes A.

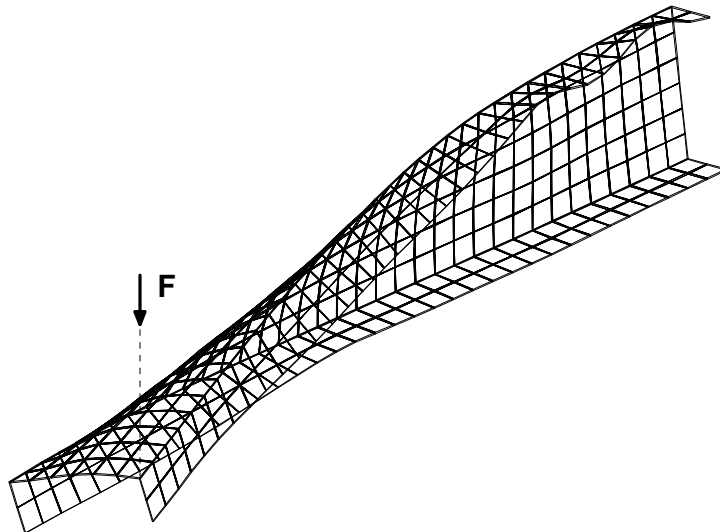


Abbildung 5.17: Verformte Konfiguration mit einer Verschiebung $v_A^3 = 5.0$

5.1.4 Pinch-Kugel ohne Loch unter diametraler Einzellast

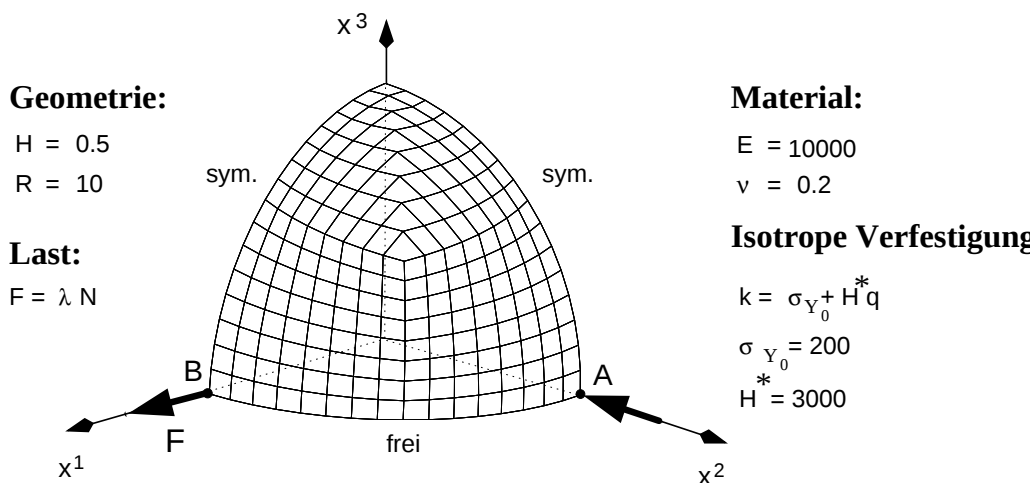


Abbildung 5.18: Geometrie und Belastung der Pinch-Kugel ohne Loch

Dieses elasto-plastische Testbeispiel dient der Überprüfung der numerischen Algorithmen der Materialgesetzformulierung aus **Kapitel 2.7**. Die Halbkugel ist mit vier diametral angreifenden Einzellasten belastet. Aus Symmetriegründen erfolgt die Berechnung an einem Viertel der Struktur, welches mit 192 Elementen diskretisiert ist (**Abbildung 5.18**). Ein Vergleich findet mit den Ergebnissen von [ECKSTEIN 1999] statt. Gerechnet wird mit dem Element 7651, mit einer Anzahl von 2 Integrationspunkten in der Schalendickenrichtung. Die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung erfolgt bis zu einem Endlastfaktor $\lambda = 40$. Es wird mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren in Inkrementen von 2.0 gerechnet. Es wird zur Ermittlung der Ergebnisse die in das Element implementierte VON MISES-Fließbedingung mit einem Verfestigungsmodul H^* verwendet.

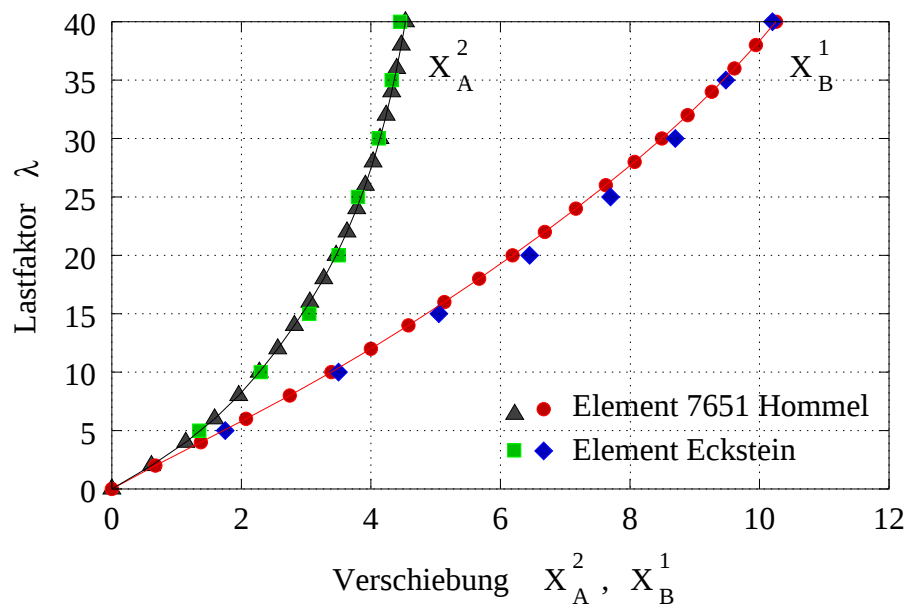
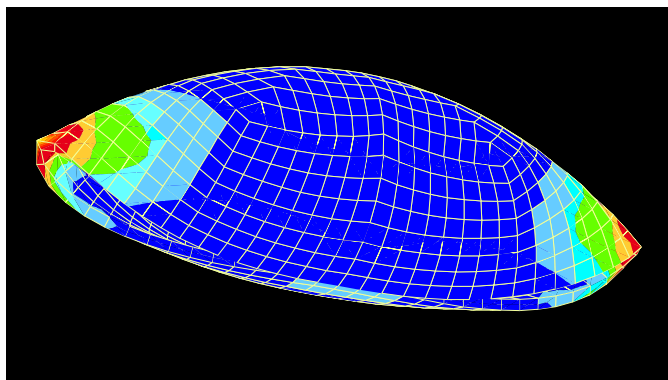
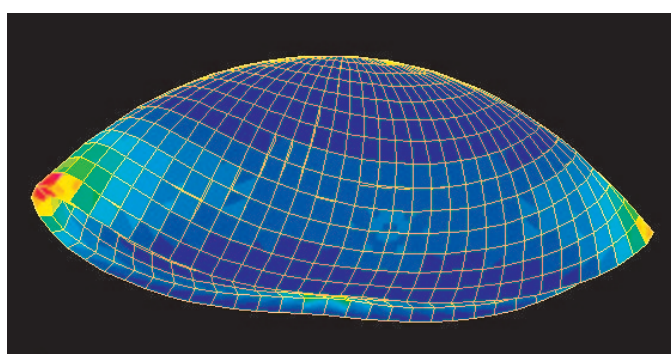


Abbildung 5.19: Elasto-plastische Untersuchung der Pinch-Kugel ohne Loch: Last-Verschiebungs-Diagramm im Vergleich mit Literaturergebnissen

In der **Abbildung 5.19** ist der Lastfaktor λ in Abhängigkeit der Verschiebungen an den Lastangriffspunkten dargestellt. Die mit dem im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Element erhaltenen Ergebnisse werden mit [ECKSTEIN 1999] verglichen und es ist eine gute Übereinstimmung erkennbar. ECKSTEIN rechnete mit demselben Materialmodell, benutzte jedoch eine andere Rotationsformulierung. Eine Übereinstimmung ist ebenfalls in der **Abbildung 5.20** zu beobachten, welche die plastische Vergleichsverzerrung im Vergleich HOMMEL - ECKSTEIN darstellt. Die Bilder zeigen die deformierte Struktur für den Endlastfaktor $\lambda = 40$.



Vorliegende Arbeit



Dissertation Eckstein

Abbildung 5.20: Elasto-plastische Untersuchung der Pinch-Kugel ohne Loch: Vergleich der plastischen Vergleichsverzerrungen bei Endlastfaktor $\lambda = 40$ mit ECKSTEIN

5.1.5 Hyperbolische Schale unter lokaler Zugbelastung

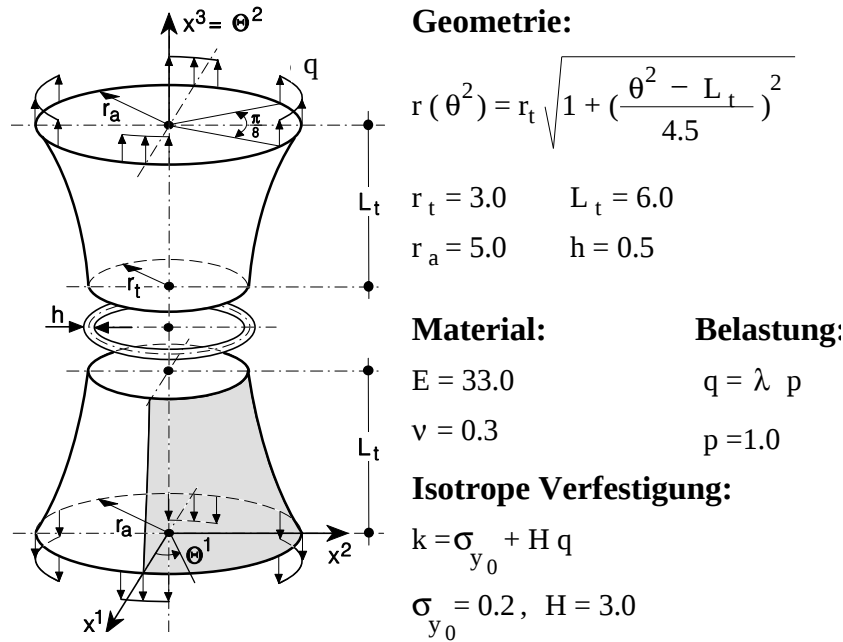


Abbildung 5.21: Geometrie und Belastung der hyperbolischen Schale

Als nächstes Testbeispiel mit elasto-plastischem Materialverhalten dient die Hyperbelschale, die mit einer aus vier Paaren bestehenden lokal verteilten vertikalen Linienlast q belastet wird **Abbildung 5.21**. Aufgrund der vorhandenen Symmetrie der Schalenstruktur und der Belastung wird zur Berechnung nur ein Achtel der Gesamtschale betrachtet. Die Diskretisierung findet mit einem 12×12 - Netz und einem Subelement in Dickenrichtung (2 GP) statt.

Wie bereits im vorangegangenen Beispiel erfolgt die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens. Es kann bis zu einem Endlastfaktor von $\lambda = 0.625$ in maximalen Inkrementen von 0.03125 gerechnet werden. Als Materialgesetz wurde die VON MISES-Fließfunktion mit einer Verfestigungsfunktion k gewählt.

Als Referenzlösung dient die Berechnung nach ECKSTEIN [ECKSTEIN 1999], die auf denselben Materialparametern basiert. Ursprünglich wurde dieses Beispiel zur Simulation großer elastischer Dehnungen bei Schalenstrukturen von [BAŞAR & DING 1996] vorgeschlagen.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der elasto-plastische Untersuchung für einige charakteristische Zustandsgrößen der Punkte A und B dargestellt (**Abbildung 5.22**).

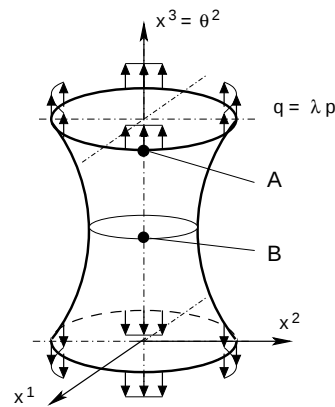


Abbildung 5.22: Charakteristische Punkte zur elasto-plastischen Untersuchung

Die **Abbildungen 5.23 bis 5.25** vergleichen die im Rahmen dieser Arbeit erzielten Ergebnisse mit denen von ECKSTEIN. Dargestellt sind die Verschiebung X_A^3 , die Normalspannung σ^{22} und die plastische Vergleichsverzerrung q in den Punkten A und B. Es gilt nach (2.78): $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{q}$.

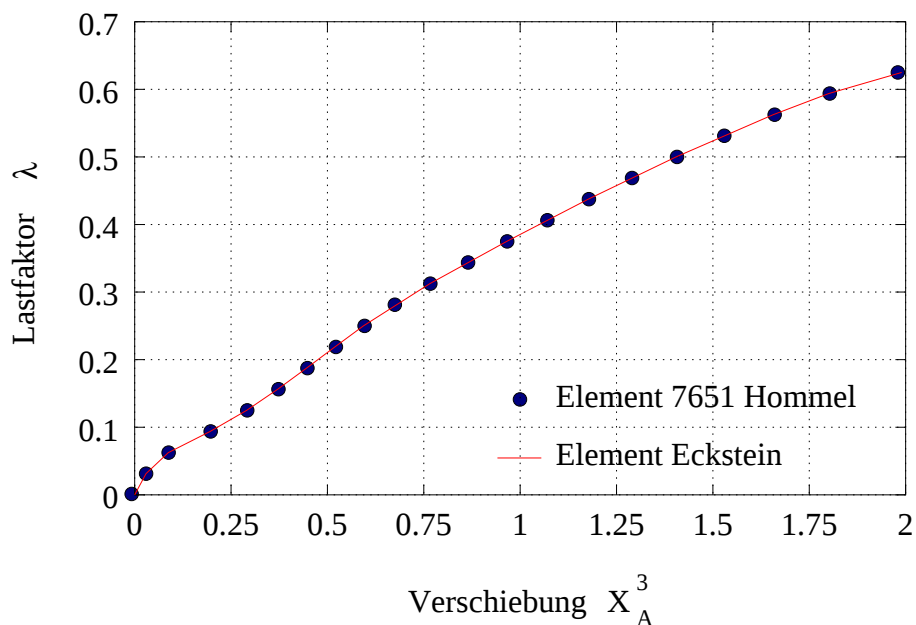


Abbildung 5.23: Elasto-plastische Untersuchung: Last-Verschiebungs-Diagramm

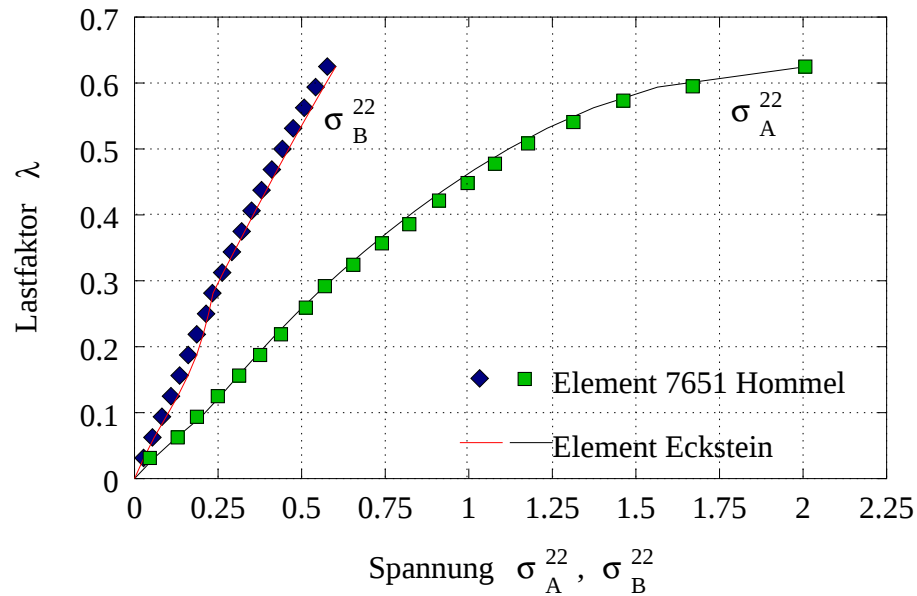


Abbildung 5.24: Elasto-plastische Untersuchung: Last-Spannungs-Diagramm

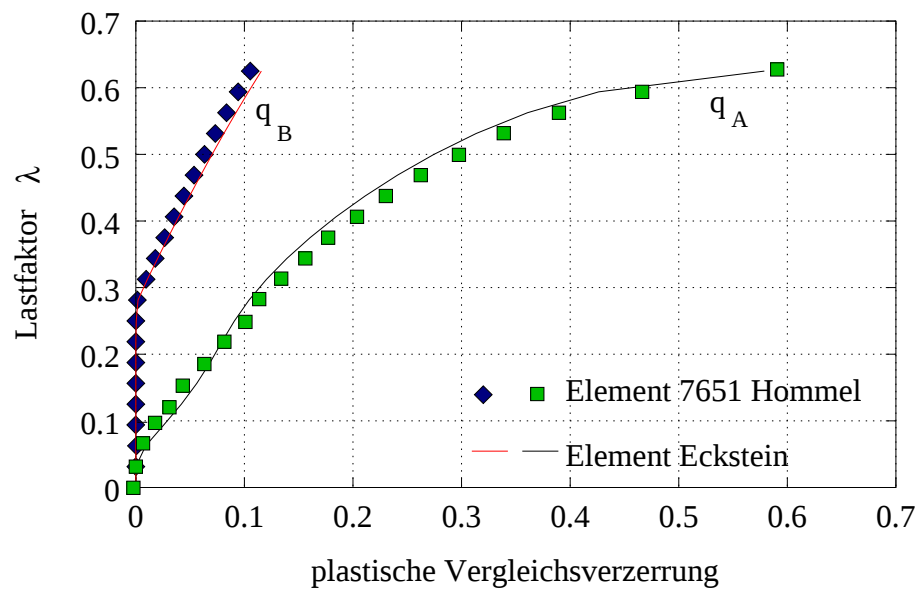


Abbildung 5.25: Elasto-plastische Untersuchung: Last-Verzerrungs-Diagramm

Die Abbildungen lassen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse erkennen. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die im Element implementierten Algorithmen bei elasto-plastischen Materialverhalten korrekt arbeiten.

Weiterhin zeigt die **Abbildungen 5.26** die unverformte und die verformte Struktur bei einem Endlastfaktor von $\lambda = 0.625$, welcher in 20 äquidistanten Lastinkrementen aufgebracht wurde. Es sind dort sehr gut die großen Verzerrungen und die moderaten Rotationen in der Nähe der Lastangriffslinie erkennbar.

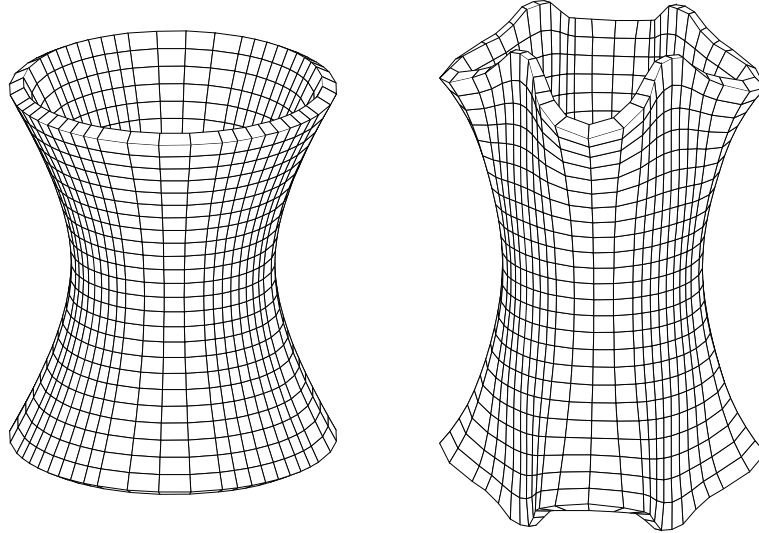


Abbildung 5.26: Unverformte und verformte ($\lambda = 0.625$) Konfiguration der hyperboloidischen Schale

5.2 Praxisrelevantes Beispiel

5.2.1 Kugelförmiger Gashochdruckbehälter auf Stützen unter Stützensenkung

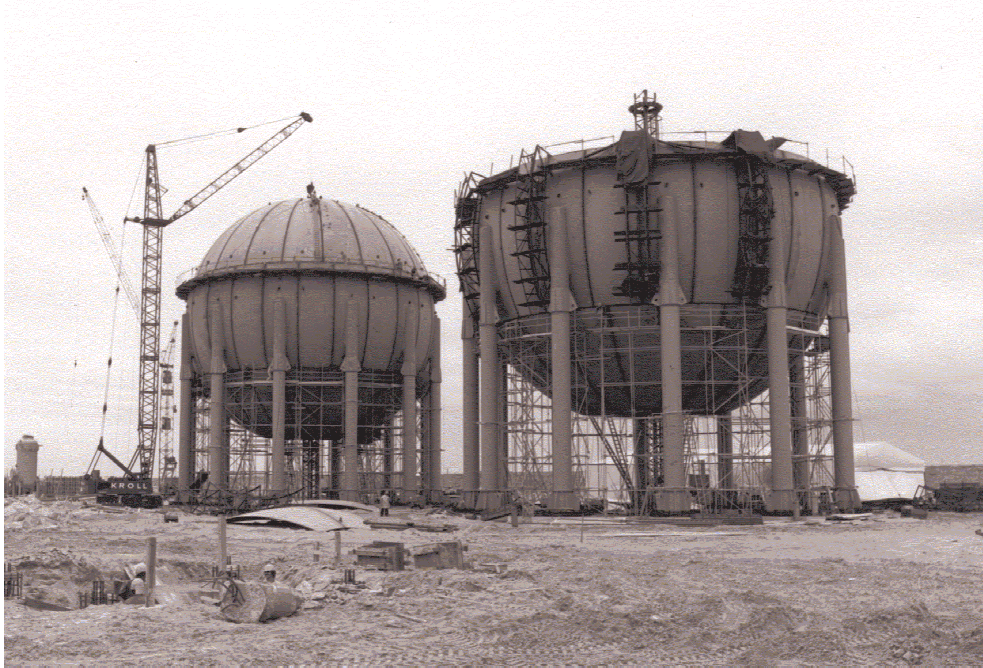


Abbildung 5.27: Kugelbehälter der ICI - Wilhelmshaven

Abschließend soll anhand eines realen Beispiels gezeigt werden, dass das entwickelte FE-Modell reale Strukturen mit Geometrieverschnidungen präzise simulieren kann.

An einem Kugelbehälter der ICI - Wilhelmshaven GmbH & Co (**Abbildung 5.27**) sind unvorhergesehene Fundamentsetzungen aufgetreten, die es zu modellieren gilt.

5.2.2 Vorgaben

Als Vorgaben für die Berechnung gibt es lediglich die in **Abbildung 5.28** dargestellten Angaben sowie die Tatsache, dass es sich bei der zu berechnenden Struktur um einen metallischen Werkstoff handelt. Dementsprechend wurde ein Elastizitätsmodul von 21000 kN/cm^2 und eine Querkontraktionszahl von 0.3 angenommen.

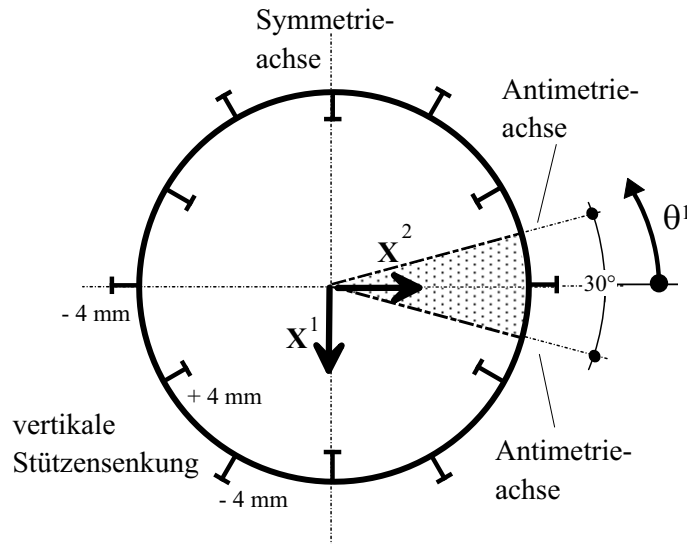


Abbildung 5.29: Geometrie der Kugelschale

5.2.3.1 Ermittlung der Geometrieversehnung

Zunächst galt es die Verschnidungslinie zwischen der Stütze, die als Zylinder modelliert wurde, und der Kugel zu bestimmen. Da kaum praxisrelevante Daten vorlagen, galt es vorab den Radius der Stütze zu ermitteln.

Für die weiteren Berechnungen wurde der Ursprung des global-kartesischen Koordinatensystems in den Kugelmittelpunkt gelegt. Dann gilt für die Kugelgleichung mit $R = 23.30/2 = 11.65$ m in:

- Globalen kartesischen Koordinaten:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 11.65^2 \quad (5.1)$$

- Lokalen krummlinigen Koordinaten:

$$\mathbf{X} = 11.65 \cos \Theta^1 \cos \Theta^2 \mathbf{i}_1 + 11.65 \sin \Theta^1 \cos \Theta^2 \mathbf{i}_2 + 11.65 \sin \Theta^2 \mathbf{i}_3 \quad (5.2)$$

Aufgrund der gegebenen Längenangaben (**Abbildung 5.28**) ist bekannt, dass der Punkt P_{14} (0.000, X^2 , -3.8) Element der Schnittmenge der beiden Geometrien ist. Durch Einsetzen in die Kugelgleichung (5.1) ergibt sich für X^2 der Wert 11.000. Die Subtraktion der X^2 -Werte der Punkte P_{14} und P_1 in **Abbildung 5.30** ergibt für die Zylinderschale einen Durchmesser von $d = 0.65$ m.

Die Geometrievorschrift des Zylinders lautet damit in:

- Globalen kartesischen Koordinaten:

$$(X^1)^2 + (X^2 - 11.325)^2 = 0.325^2 \quad (5.3)$$

- Lokalen krummlinigen Koordinaten:

$$\mathbf{X} = 0.325 \cos \bar{\Theta}^1 \mathbf{i}_1 + (11.325 + 0.325 \sin \bar{\Theta}^1) \mathbf{i}_2 + \bar{\Theta}^2 \mathbf{i}_3 \quad (5.4)$$

Durch Gleichsetzen der Beziehungen ist es möglich, die Schnittkurve zu errechnen. Zu diesem Zweck löst man beispielsweise (5.3) nach X^1 auf und setzt den so erhaltenen Ausdruck in (5.1) ein. Daraus folgt:

$$X^2 = \frac{263.8725 - (X^3)^2}{22.65} . \quad (5.5)$$

Durch das erneute Einsetzen von (5.5) in (5.1) ergibt sich die Beziehung zwischen den globalen kartesischen Koordinaten X^1 und X^3 zu:

$$X^1 = \pm \sqrt{\frac{14.7225(X^3)^2 - (X^3)^4}{513.0225}} . \quad (5.6)$$

Der vollständige Ortsvektor der Geometrieverschnidung

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{i}_i = \pm \sqrt{\frac{14.7225(X^3)^2 - (X^3)^4}{513.0225}} \mathbf{i}_1 + \frac{263.8725 - (X^3)^2}{22.65} \mathbf{i}_2 + X^3 \mathbf{i}_3 \quad (5.7)$$

mit $X^3 \in [0.0, -3.8]$ als unabhängiger Variablen ist somit bekannt. Die Kurve im Raum ist in **Abbildung 5.30** dargestellt.

Anmerkung. Interessanter Weise scheint an der Stelle P_1 eine Diskontinuität der Schalenverschnidung vorzuliegen, was nicht von vorneherein erkennbar war, sondern erst durch den Plot offensichtlich wird. Durch genauere Untersuchung der Kurvengleichung (5.7) lässt sich diese Feststellung mathematisch begründen. Mit Hilfe einer Projektion der räumlichen Kurve auf die X^1 - X^3 -Ebene lässt sich die Untersuchung 2-dimensional durchführen. Hierzu wird lediglich die erste Ortsvektorkomponente betrachtet. Durch die partielle Ableitung von X^1 nach X^3 erhält man die Tangentensteigung der Kurve an jedem Punkt bezogen auf die X^1 - X^3 -Ebene zu:

$$(X^1)' = \frac{29.445 - 4(X^3)^2}{45.3 \sqrt{14.7225 - (X^3)^2}} .$$

Es ist zu erkennen, dass bei einer Annäherung der Werte an $X^3 = 3.8$ die Ableitung gegen ∞ divergiert, bei einer Annäherung an den Wert $X^3 = 0.0$ jedoch gegen einen konstanten Wert konvergiert. In anderen Worten ausgedrückt, liegt im Punkt P_{14} eine horizontale Tangente vor wohingegen in P_1 ein Knick auftritt.

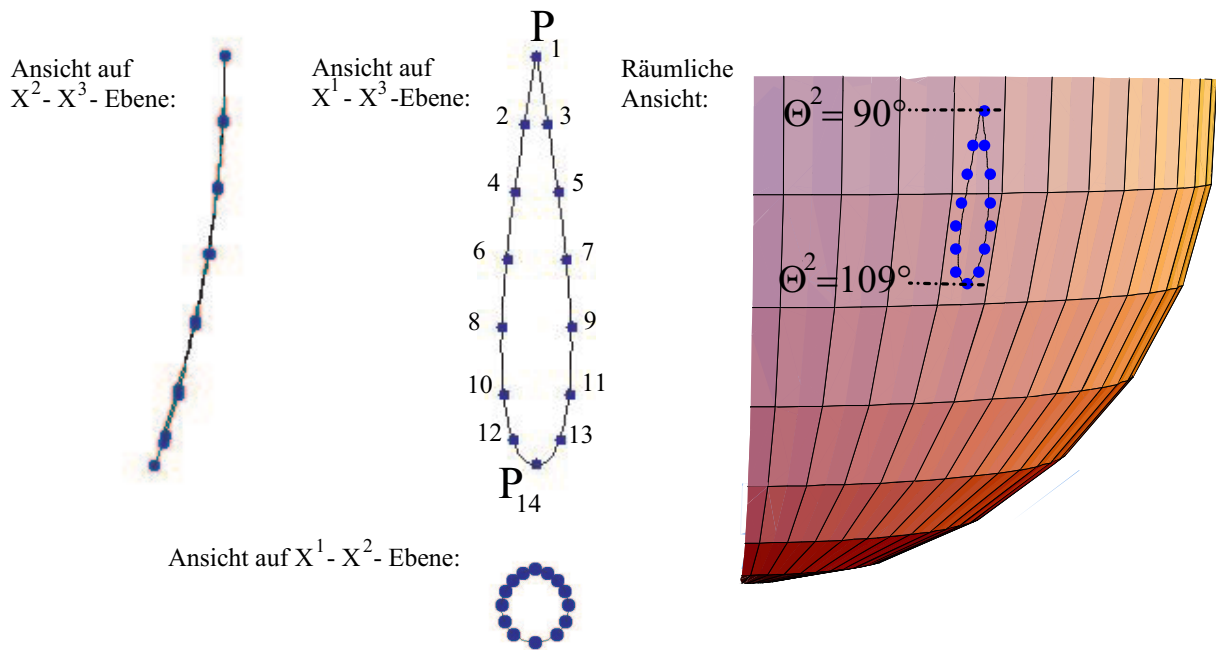


Abbildung 5.30: Darstellung der Schnittkurve mit Mathematica

5.2.3.2 Kugelschale

Obwohl die Geometrie der zu berechnenden Struktur durch die Ortsvektoren nun exakt beschrieben ist, erweist sich die Netzgenerierung als problematisch. Im stark beanspruchten Bereich des Stützenanschlusses an die Kugelschale ist eine feinere Netzeinteilung erforderlich, um die dort auftretenden Effekte der Spannungskonzentrationen besonders gut simulieren zu können. Wohingegen in den ungestörten Bereichen der Pole eine gröbere Unterteilung vollkommen ausreichend ist. Zusätzlich kommt erschwerend hinzu, dass bei der Netzwahl die veränderliche Blechdicke zu berücksichtigen ist (**Abbildung 5.32**).

Zur Eingabe in die Input-Datei des Programmsystems FEMAS2000 sind Punktkoordinaten in lokalen Koordinaten erforderlich.

Zuerst wird eine Unterteilung der Schnittkurve in sieben Bereiche (je Seite) vorgenommen, wodurch 14 Punkte entstehen. Danach wird das Netz vom Bereich der Schalenverschneidung ausgehend systematisch aufgebaut (**Abbildung 5.31**).

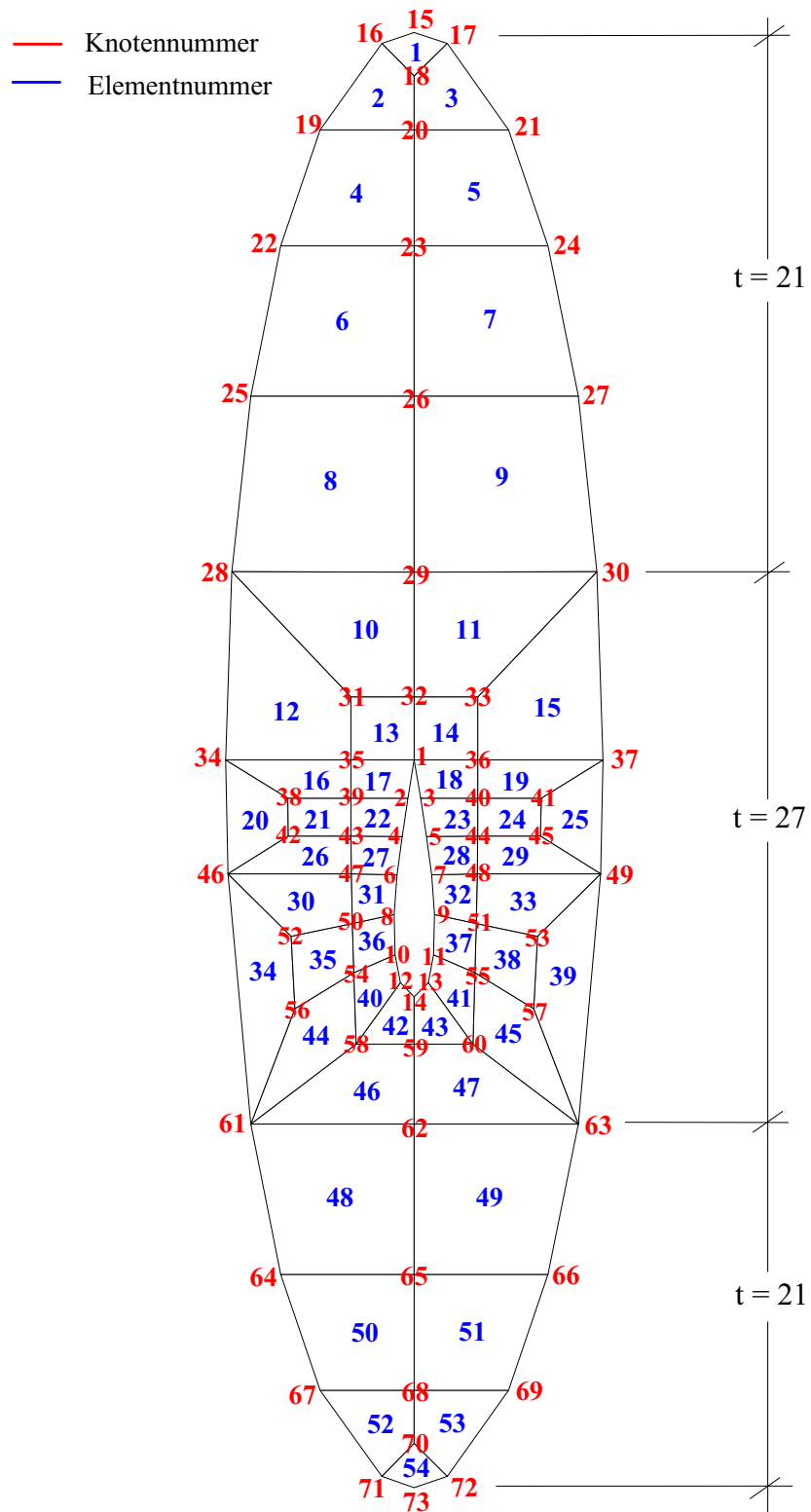


Abbildung 5.32: Diskretisierung auf der Kugelschale

Zur Berechnung der zugehörigen Koordinate Θ^1 bedarf es einiger Rechenoperationen. Man kann mit der Gleichung $X^3 = 11.65 \sin \Theta^2$ (siehe (5.2)) die dritte, unabhängige globale Koordinatenkomponente ermitteln. Danach kann eine der beiden abhängigen globalen Komponenten beispielsweise $X^1 = \sqrt{(14.7225(X^3)^2 - (X^3)^4)/513.0225}$ (siehe (5.6)) berechnet werden, um letztendlich über die Gleichung $X^1 = 11.65 \cos \Theta^1 \cos \Theta^2$ (siehe (5.2)) die gesuchte Koordinate Θ^1 zu erhalten.

Eine Berechnung der Koordinaten der Punkte 15 - 73 ist nicht erfolgt, da sie durch gleichmäßige Unterteilung der Kugelschale festgelegt wurden. Es gilt ein Netz zu schaffen, welches von innen (Verschneidung) nach außen immer mehr an Dichte abnimmt. Desweiteren muß beachtet werden, dass keine "hängenden Knoten" entstehen. In **Abbildung 5.31** ist dieser verfeinerte Bereich dargestellt, der ebenfalls über eine größere Dicke verfügt. Repräsentativ sind dort einige Koordinaten angegeben.

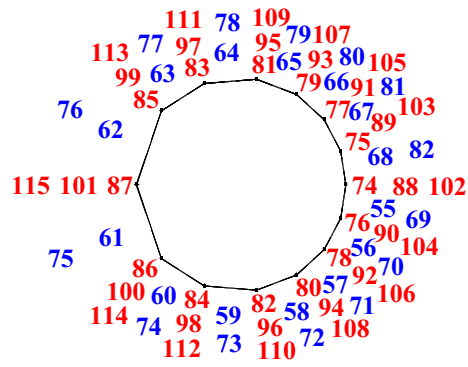
Desweiteren gilt es die Diskretisierung des gesamten 30° Segmentes vorzunehmen. Die im Rahmen dieser Arbeit gewählte Lösung ist in **Abbildung 5.32** illustriert. Daraus wird gut ersichtlich, dass der Bereich in Polnähe nicht so fein, sondern eher grob generiert ist. Das gewählte Netz besteht aus 73 Knoten und 54 Elemente.

5.2.3.3 Zylinderschale

Nach der Netzgenerierung des Kugelsegmentes galt es eine geeignete Diskretisierung für die Zylinderschale zu finden. Durch die Unterteilung der Verschneidungslinie ist die Wahl des Netzes a priori eingeschränkt. Es bietet sich demzufolge an, mit Hilfe der dort vorhandenen 14 Punkte ein Netz aus 14 Elementen in $\bar{\Theta}^1$ -Richtung des Zylinders zu generieren. Fraglich ist lediglich die Diskretisierung in Richtung von $\bar{\Theta}^2$.

Bei der vorhandenen, zusammengesetzten Struktur sind hauptsächlich die dem Stützenanschluß benachbarten Zonen der Kugelschale aufgrund der dort auftretenden Spannungskonzentrationen von großer Bedeutung. Es wurde daher im Rahmen dieser Simulation nicht als sinnvoll erachtet, die gesamte Stütze mit ihrer Länge von 16.95 m zu diskretisieren. Vereinfacht kann die Zylinderschale als Druck- bzw. Zugstab angesehen werden und ist daher für die Betrachtung nicht von wesentlichem Interesse. Die Stütze wird auf eine Länge von 7 m reduziert. Nachdem die Knoten 1-73 der Kugelschale zugeordnet sind, werden die Knoten 74-115 gemäß **Abbildung 5.33** dem Zylinder zugeordnet. Es entstehen dadurch 28 zusätzliche Elemente, die von 55 bis 83 fortlaufend durchnummeriert werden.

Draufsicht:



— Knotennummer
— Elementnummer

Ansicht:

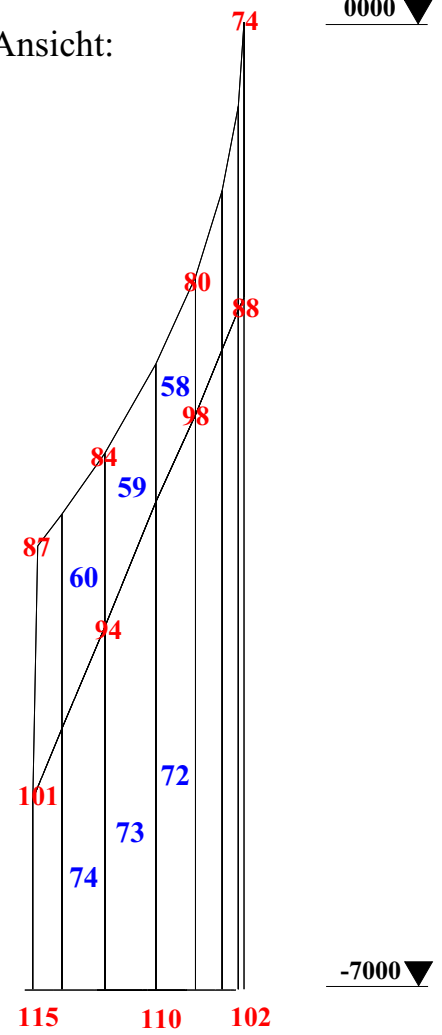


Abbildung 5.33: Diskretisierung der zylinderförmigen Stütze

5.2.4 Erzeugen einer FEMAS-Input-Datei

Zur Erstellung der FEMAS-Input-Datei sind neben den bereits ermittelten Knotenkoordinaten (CRD-BLOCK) und der Inzidenz (MAN-BLOCK) auch noch die Randbedingungen (CON-BLOCK) festzulegen. Aufgrund der antimetrischen Belastung des Systems sind an den Rändern der Kugelschale Antimetriebedingungen anzugeben. Dazu sind die Knotenfreiheitsgrade 1, 2, 3, 4 und 7 in lokaler Richtung zu sperren. Dieses verhindert jegliche Verschiebung und gestattet lediglich eine Rotation um die lokale 2- und 3-Achse. Die Dickendehnung in diesen Knoten ist ebenfalls gesperrt. Die Tatsache, dass die Freiwerte im lokalen System betrachtet werden, erfordert eine Transformation der Freiheitsgrade (ROT-BLOCK) nach **Kapitel 3.7**. Es kommen hierzu die eigens für dieses Problem implementierten Transformationsroutinen für eine Kugelschale zur Anwendung.

Der Stützenfuß wird als membrangelagert angesehen. Um unnötige Zwängungs- bzw. Biegeeffekte zu vermeiden, müsste demzufolge nur in lokale Θ^2 -Richtung gesperrt werden. Dies ist jedoch nicht nötig, da die Berechnung weggesteuert durchgeführt wird.

Desweiteren müssen die Knoten der Schalenverschneidung (ROT-BLOCK) gekennzeichnet werden, damit die in **Kapitel 3.6** beschriebenen Algorithmen zur Sonderbehandlung einer Verschneidungslinie aktiviert werden können.

Eine Kopplung zwischen der Kugel- und der Zylinderschale ist ebenfalls erforderlich. Sie erfolgt durch die entsprechenden Kopplungen aller Freiheitsgrade der Knoten auf der Verschneidungsfläche.

Im Folgenden ist ein Auszug aus der Input-Datei dieses Beispiels abgebildet.

Printed by Jan-Hendrik Hommel

Oct 31, 01 11:43

Originalbsp-inp

Page 1/2

INSTITUT FUER STATIK UND DYNAMIK, RUHR-UNIVERSITAET BOCHUM

BLOCK: HDL

Originalbeispiel des Gashochdruckbehalters

Created by Jan-Hendrik Hommel

25.10.01

BLOCK: UNITS

KNM S

BLOCK: CTR

111111

BLOCK: SYS

1

BLOCK: CRD

1611.650.0000.0000.000

0190.000.000

0289.498-3.00

.

.

072105.00-80.00

07390.00-90.00

40.3250.0011.3250.00

07490.0000.000

07571.709-0.611

.

.

0114214.911-7.000

0115270.000-7.000

BLOCK: CON

0151347

01612347

01712347

.

.

07112347

07212347

0731347

BLOCK: CPL

1174123456

1411

Wednesday October 31, 2001

1/2

Printed by Jan-Hendrik Hommel

Oct 31, 01 11:43		Originalbsp-inp		Page 2/2	
BLOCK: ROT					
1	2	0.0	1.0		
13	1				
1	75	0.0	1.0		
13	1				
0	15	1.0	0.0		
0	16	1.0	0.0		
	.				
	.				
	.				
0	72	1.0	0.0		
0	73	1.0	0.0		
BLOCK: ETP					
7651					
BLOCK: FDP					
1	1				
1	102	0.0	-0.004	0.0	-1
14	1				
BLOCK: MAN					
7651					
0	1	18	17	15	16
0	2	19	20	18	16
	.				
	.				
	.				
0	81	103	105	91	89
0	82	102	103	89	88
BLOCK: ESD					
7651					
1	1				
5					
	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0
	0.0105	-0.0105	2.0	0.0	2.1d8
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	1				
1	10				
5					
	.				
	.				
	.				
	1.0	0.0	1.0	1.0	1.0
	0.0135	-0.0135	2.0	0.0	2.1d8
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
28	1				

2/2

Wednesday October 31, 2001

Abbildung 5.34: Auszug aus der Input-Datei des Originalbeispiels

5.2.5 Berechnung

Mit der erzeugten Input-Datei erfolgt nun eine lineare Berechnung. **Abbildung 5.35** zeigt die unverformte und die verformte Konfiguration. Letztere ist mit einem skalaren Faktor von 250 überhöht, um die Ergebnisse deutlicher darzustellen. Betrachtet man die verformte Struktur etwas genauer, so fällt auf, dass trotz einer vorgegebenen Verschiebung in negativer i_3 -Richtung große Verschiebungsanteile in radialer Richtung auftreten, die wechselnden Vorzeichens und abklingenden Charakters sind.

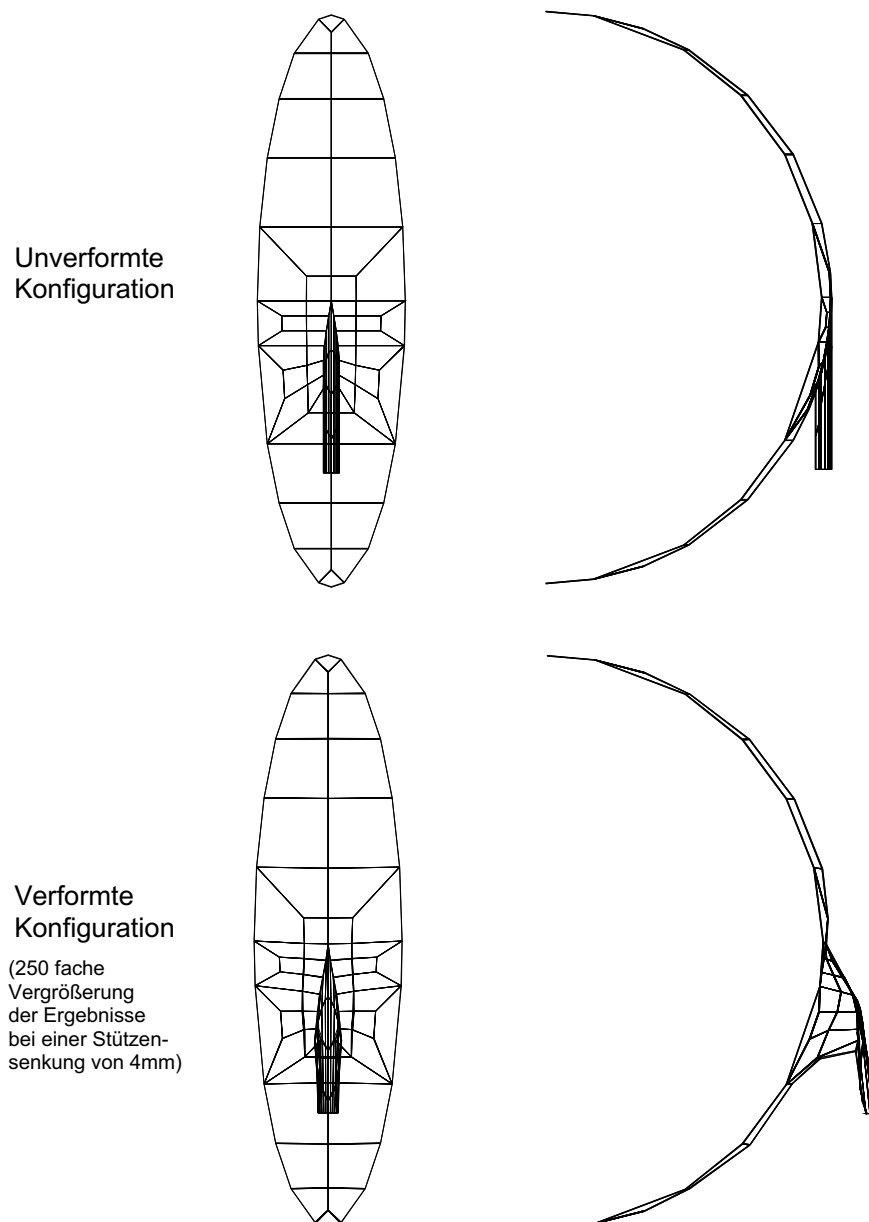


Abbildung 5.35: Verformte und unverformte Konfiguration

Dieses Phänomen kann schalentheoretisch erklärt werden. Es handelt sich dabei aufgrund der Schalenverschneidung und teilweise orthogonal zur Kugelfläche stattfindender Lastaufbringung um ein *Randstörungsproblem*, welches durch starke Biegemomente charakterisiert ist, die allerdings schnell abklingen. Ihr Verlauf ist durch eine gedämpfte Schwingungsfunktion beschreibbar, welche die Periode T besitzt [MARKUS 1967]:

$$T = \frac{360^\circ}{\sqrt{\frac{R}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}}} = \frac{360^\circ}{\sqrt{\frac{11.65}{0.027} \sqrt{3(1-0.3^2)}}} = 13.5^\circ. \quad (5.8)$$

Zur Überprüfung der errechneten Periodenlänge ist in **Abbildung 5.36** und **5.37** der Verschiebungsverlauf in Normalenrichtung und in tangentialer Richtung entlang des 90° -Meridians dargestellt. Hier ist der kurzweilige Verlauf der Randstörung sehr gut erkennbar. Aufgrund der groben Diskretisierung kann dieser Bereich nicht genau genug erfaßt werden. Anhand des Diagramms läßt sich eine Periode von 26° ablesen. Sie liegt genau zwischen den Punkten P_{14} und P_{65} . Diese Periode stimmt nicht mit der rechnerisch ermittelten von 13.5° überein. Eine bessere Simulation dieses Effektes wäre durch eine Netzverfeinerung erreichbar.

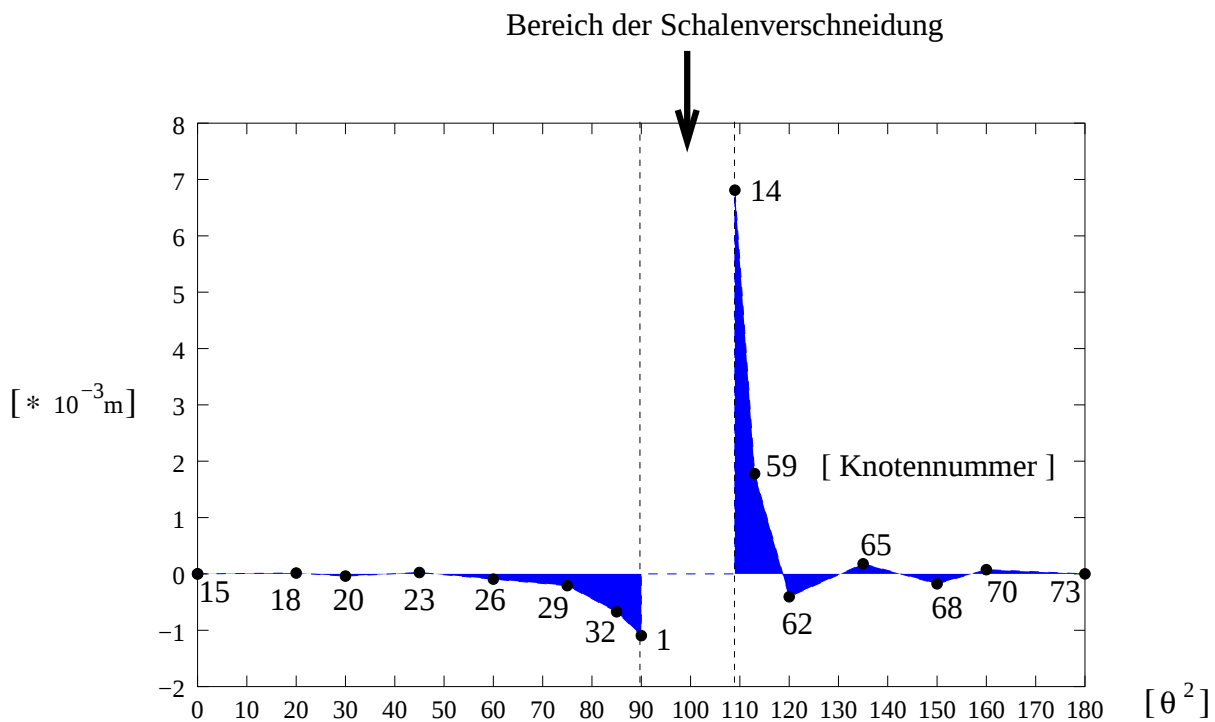


Abbildung 5.36: Verschiebung in radialer Richtung entlang des 90° -Meridians

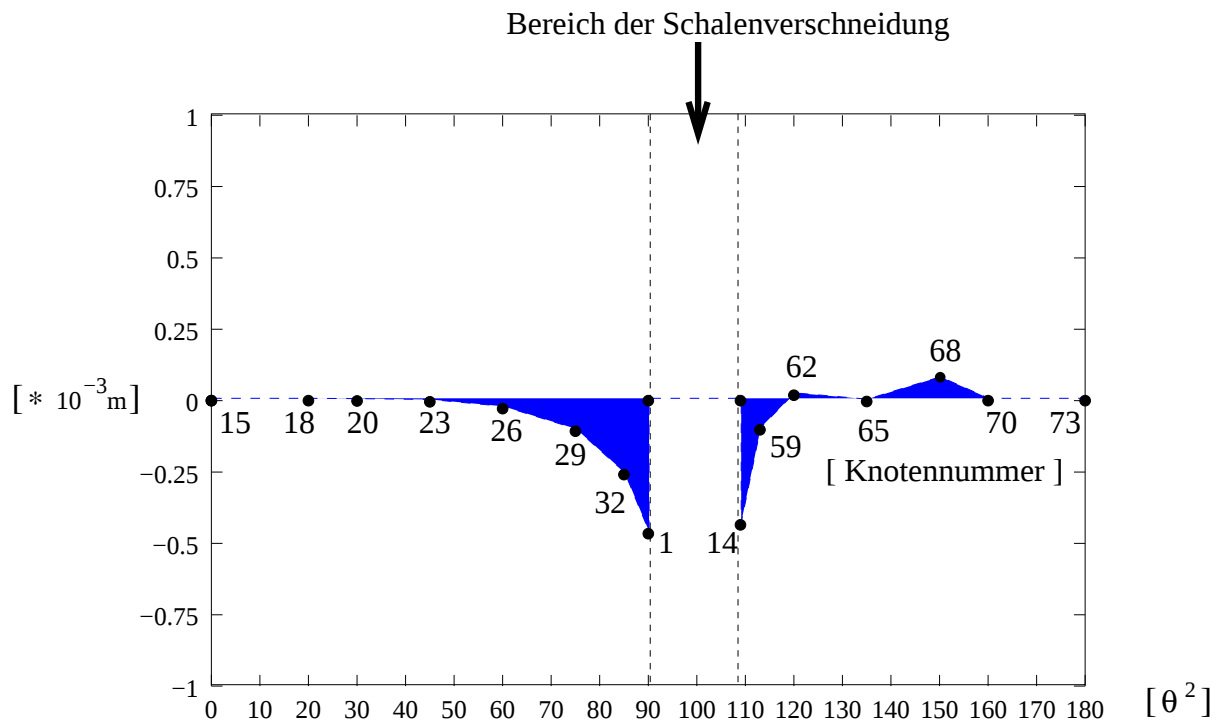


Abbildung 5.37: Verschiebung in tangentialer Richtung entlang des 90°-Meridians

Um den Abklingungseffekt auch entlang der lokalen Θ^1 -Achse zu zeigen sind die Verschiebungsverläufe in radialer und in tangentialer Richtung entlang des 93°-Breitengrads in **Abbildung 5.38** und **5.39** illustriert.

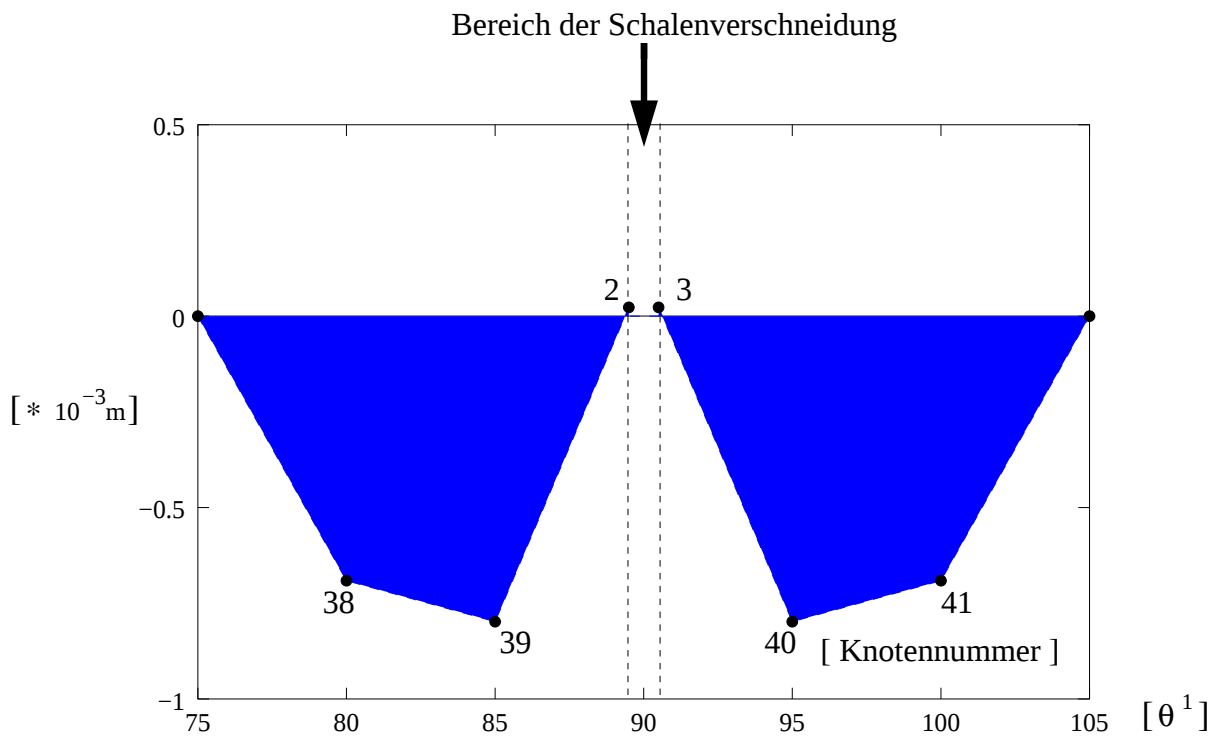


Abbildung 5.38: Verschiebung in radialer Richtung entlang des 93°-Breitengrads

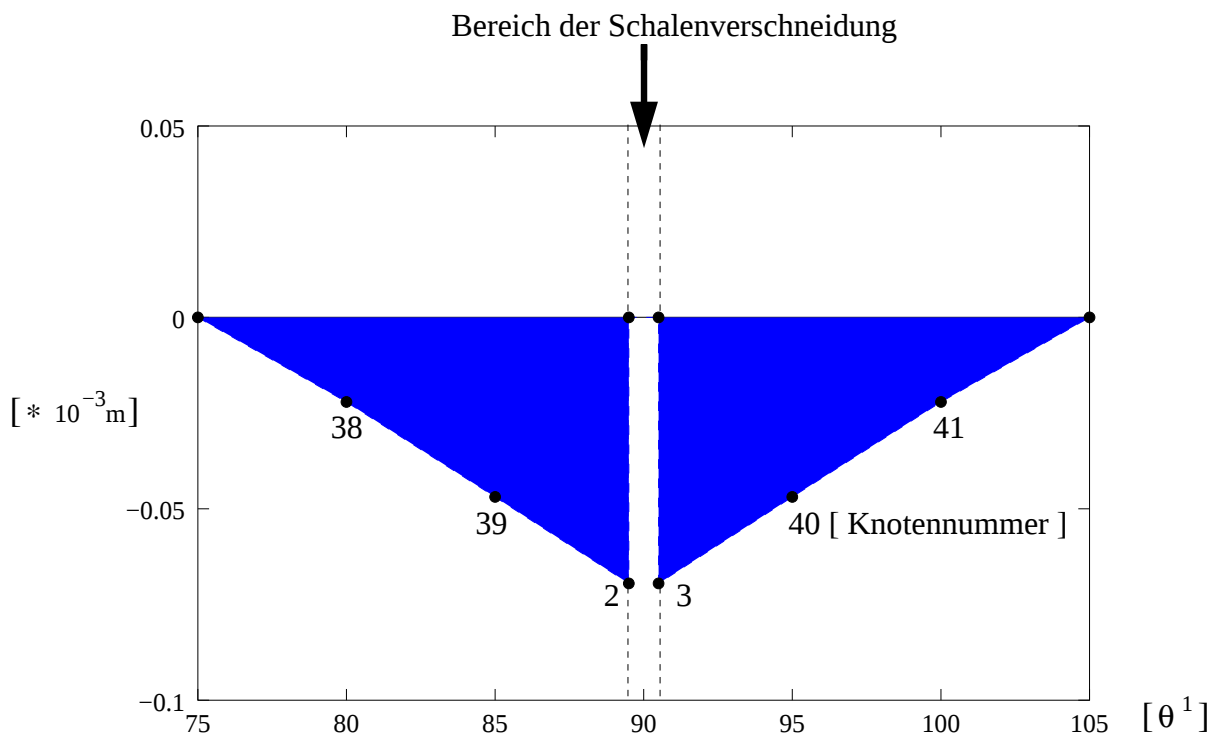


Abbildung 5.39: Verschiebung in tangentialer Richtung entlang des 93°-Breitengrads

Um abschließend noch einmal einen plastischen Gesamteindruck der Verformung in radialer Richtung zu vermitteln, ist in **Abbildung 5.40** der Bereich der Verschneidungslinie in einem 3-dimensionalen Verformungsplot dargestellt. Die **Abbildungen 5.36** und **5.38** stellen nichts anderes als einen Schnitt durch diese Verformungsfigur dar. Innerhalb der Figur sind die Abklingeffekte der Randstörung gut erkennbar, sie stellen sich in Form von Wellenbildung dar.

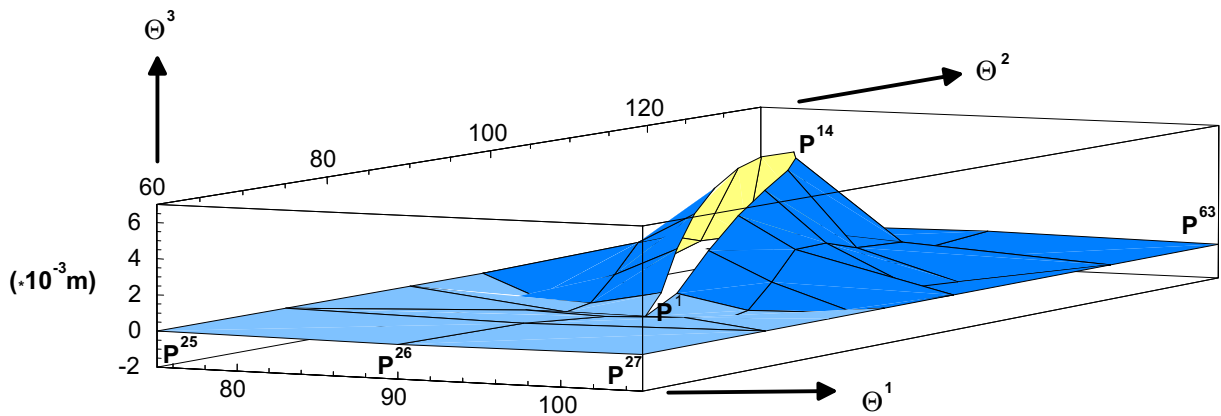
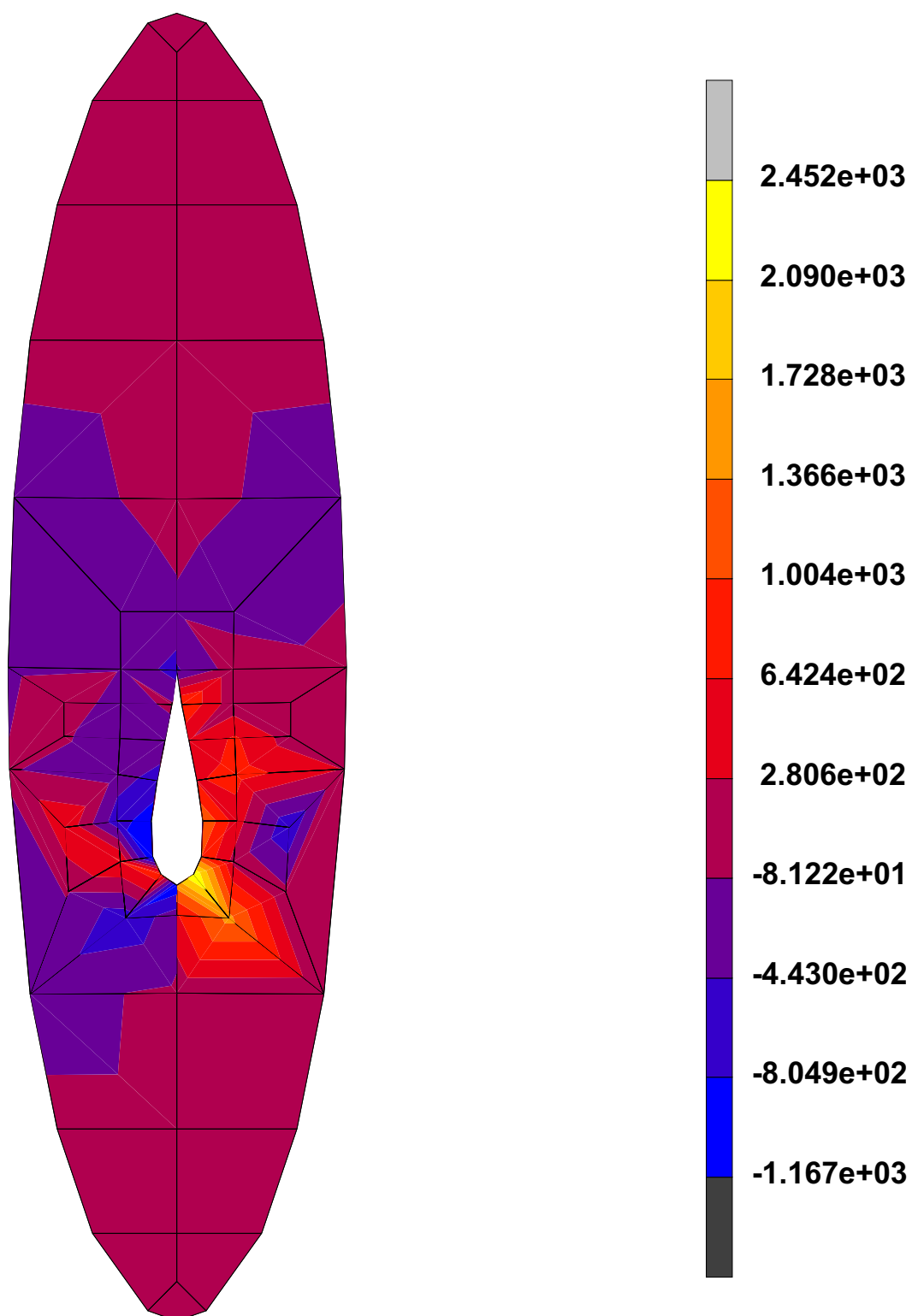
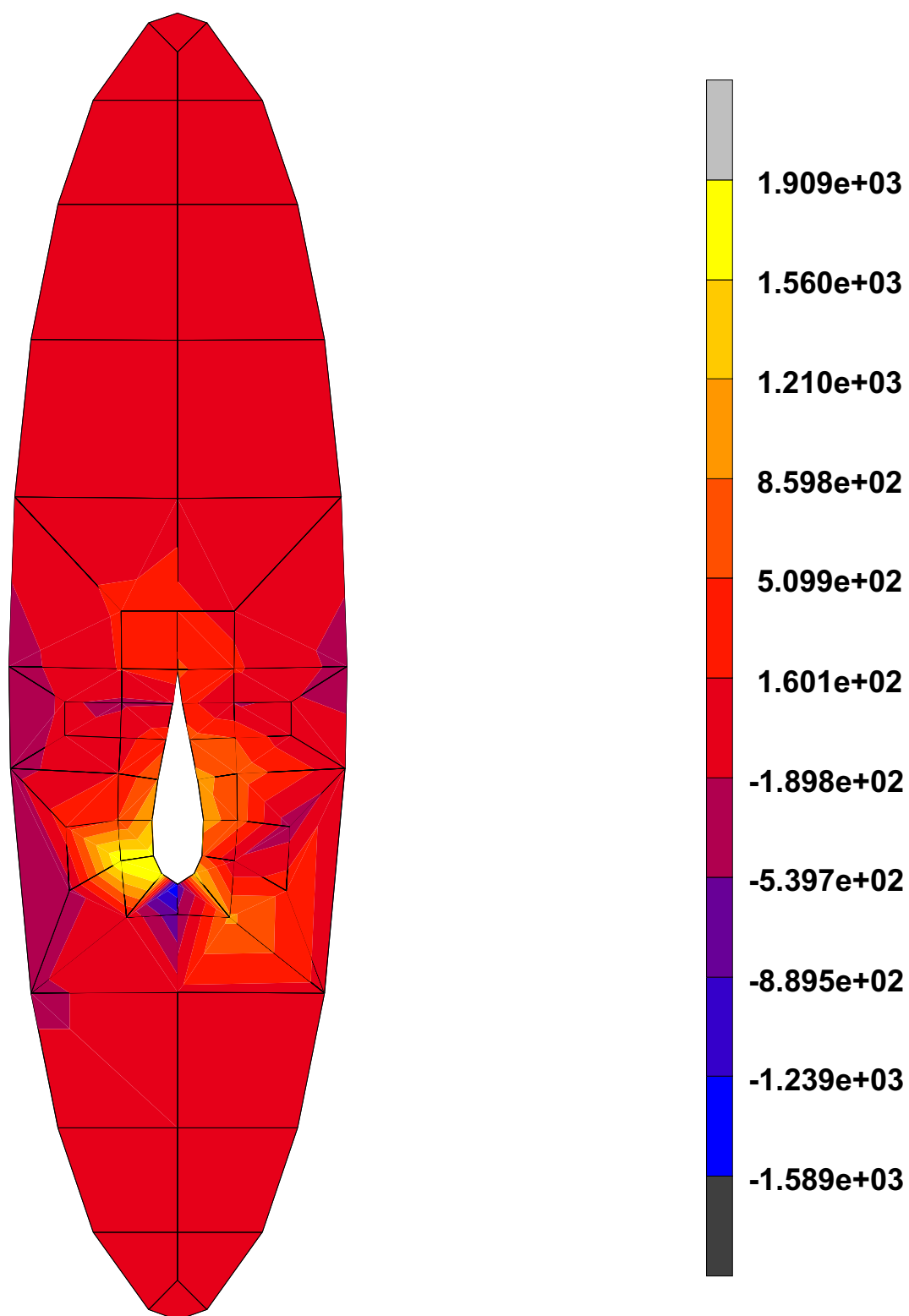


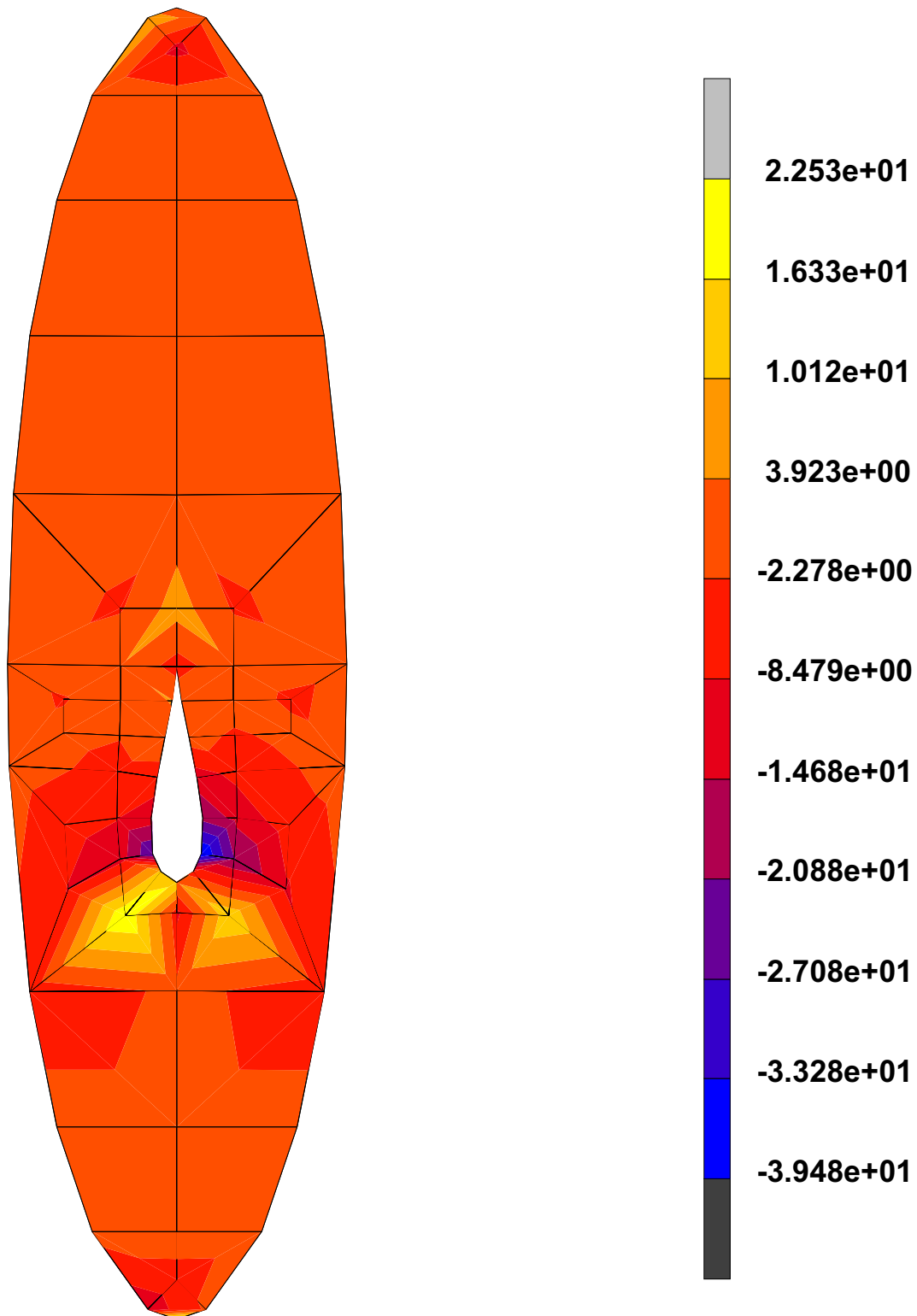
Abbildung 5.40: Radialverformung des Schalenverschneidungsbereichs

Zur Verdeutlichung des zugehörigen Lastabtrags werden Spannungsbilder der σ_{11} -, σ_{22} - und σ_{12} -Spannungen dargestellt. Sie sind auf das lokale Koordinatensystem bezogen, welches symmetrisch in Bezug auf die Mittelachse diskretisiert wurde. Dabei ist zum einen das typische antimetrische Verhalten bezüglich der Mittelachse der σ_{11} - und σ_{22} -Spannungen erkennbar, als auch der Vorzeichenwechsel in Meridianrichtung in der Nähe der Schalenverschneidung. Der Spannungsplot der σ_{12} -Spannung zeigt erwartungsgemäß eine symmetrische Struktur.

Der Verlauf der Spannungswerte wird durch die Einfärbung der Struktur deutlich, wobei die korrespondierenden Spannungswerte der Legende entnommen werden können.

Abbildung 5.41: Spannungsplot σ_{11}

Abbildung 5.42: Spannungsplot σ_{22}

Abbildung 5.43: Spannungsplot σ_{12}

Kapitel 6

Resümee und Ausblick

6.1 Resümee

In der vorliegenden Diplomarbeit findet eine kontinuumsbasierte Mittelflächen-Direktor-Schalentheorie Anwendung, die sowohl die Berücksichtigung finiter Rotationen und großer Verzerrungen als auch die unmodifizierte Implementierung beliebiger dreidimensionaler Materialgesetze zulässt. Sie ist erweitert auf eine Mehrschichten-Schalenkinematik, wodurch eine Analyse beliebig dicker Schalenstrukturen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften in transversaler Richtung möglich ist.

Die numerische Umsetzung der Mehrschichten-Schalenkinematik erfolgt im Rahmen der Finite-Element-Methode durch das isoparametrische Elementkonzept mittels bilinearer Ansätze. Einen wichtigen Punkt stellt dabei die Erarbeitung numerischer Stabilisierungsmaßnahmen zur Behebung der auftretenden *Locking*-Phänomene dar. In diesem Zusammenhang werden das *Assumed-Natural-Strain*- und das *Enhanced-Assumed-Strain*-Verfahren eingesetzt.

Hauptziel der Arbeit war es, dass dazu bestehende Element so weiter zu entwickeln, dass beliebig zusammengesetzte Flächentragwerke simuliert werden können. Eine entscheidende Rolle spielt dabei die Parametrisierung des Direktors. Die bestehende Parametrisierung mittels Eulerwinkeln musste gegen eine Rotationsformulierung basierend auf dem RODRIGUES-Rotationsvektor ausgetauscht werden. Die bei der Berechnung von zusammengesetzten Strukturen auftretende Singularität der Steifigkeitsmatrix galt es mit der Hilfe eingeführter, künstlicher Steifigkeiten zu beheben.

Den Abschluß der Arbeit bilden ausgewählte Testbeispiele. Mit ihnen kann die fehlerfreie Arbeit der neu implementierten Routinen mittels vorhandener Referenzlösungen bestätigt werden.

Die praktische Relevanz dieser Arbeit wird anhand eines stützengelagerten Gasdruckbehälters gezeigt. Dieses Berechnungsbeispiel stellte sich als sehr arbeitsintensiv dar, weshalb es im Rahmen dieser Arbeit auch nicht gelang elasto-plastische oder schädigungsbezogene Berechnungen vorzunehmen.

Darüberhinaus ist ein Programm entstanden, welches das komplette Post-Processing von FEMAS übernehmen kann. “FemasInMentat” ermöglicht eine adäquate und effiziente Darstellung der Deformations- und Spannungsplots.

6.2 Ausblick

Das entwickelte Element hat sich als ein leistungsstarkes Werkzeug zur Berechnung zusammengesetzter Schalenstrukturen erwiesen. Die neu implementierten Routinen zur Parametrisierung des Direktors und zur Transformation der Randbedingungen arbeiten fehlerfrei.

Die Simulation von Plastizität mit zusätzlicher Berücksichtigung von Schädigungseffekten weist noch einige Schwächen auf, die es im Anschluß an diese Arbeit zu beheben gilt.

Desweiteren wäre es interessant an dem praxisrelevanten Beispiel weitere Untersuchungen vorzunehmen, die mangels Zeit nicht mehr in dieser Arbeit zu realisieren waren. Eine feinere Diskretisierung wäre ein erster, wenn auch arbeitsintensiver Ansatz, um die in diesem Beispiel auftretenden Phänomene noch besser beurteilen zu können.

Literaturverzeichnis

- ARGON, A.S., J. IM UND R. SAFOGLU (1975). Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Met. Trans.* 6A, 825–837.
- BAŞAR, Y. (1993). Finite-Rotation Theories for Composite Laminates. *Acta Mechanica* 98, 159–176.
- BAŞAR, Y. (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer-Verlag, New York.
- BAŞAR, Y. UND Y. DING (1992). Finite-Rotation Shell Elements for the Analysis of Finite-Rotation Shell Problems. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 34, 165–169.
- BAŞAR, Y. UND Y. DING (1995). Interlaminar stress analysis of composites: Layerwise shell finite elements including transverse strains. *Composites Engineering* 5(5), 485–499.
- BAŞAR, Y. UND Y. DING (1996). Finite-element analysis of hyperelastic thin shells with large strains. *Computational Mechanics* 18(3), 200–214.
- BAŞAR, Y. UND A. ECKSTEIN (2000). Large inelastic strain analysis by multi-layer shell elements. *Acta Mechanica* 141, 225–252.
- BAŞAR, Y., U. HANSKÖTTER UND CH. SCHWAB (2001). A General High-Order Finite Element Formulation for Shells at Large Strains and Finite Rotations. *submitted to Int. J. Num. Meth. Eng.*.
- BAŞAR, Y., M. ITSKOV UND A. ECKSTEIN (1999). Composite Laminates: Nonlinear Interlaminar Stress Analysis by Multi-Layer Shell Elements. *received to Comp. Meth. Mech. Engrg.*.
- BAŞAR, Y. UND O. KINTZEL (2001). Finite Rotations and large strains in Finite Elements Shell Analysis. *CMES* 2, 1–15.
- BAŞAR, Y. UND D. WEICHERT (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer Verlag, Berlin.
- BATHE, K.J. (1986). *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin.

- BEEM, H., C. KÖNKE, U. MONTAG UND W. ZAHLTEN (1996). *FEMAS-2000 Users Manual. Release 3.0*. Institute for Statics and Dynamics, Ruhr-University Bochum.
- BEREMIN, F.M (1981). Experimental and numerical study of the different stages in ductile rupture. In *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*, 185–205. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
- BETSCH, P., F. GRUTTMANN UND E. STEIN (1996). A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 130, 57–79.
- BETSCH, P. UND E. STEIN (1995). An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element. *Comm. Num. Meth. Eng.* 11, 899–909.
- BÜCHTER, N. (1992). *Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen*. Bericht Nr. 14. Institut für Baustatik d. Universität Stuttgart.
- CHRÓŚCIELEWSKI, J., J. MAKOWSKI UND H. STUMPF (1992). Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. *Int. J. Num. Methodes Eng.* 35, 63–94.
- CHU, C.C. UND A. NEEDLEMAN (1980). Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Eng. Mat. Tech.* 102, 249–256.
- DUMSTORFF, P. (2000). *Entwicklung einer effizienten hierarchischen Schalelementfamilie zur p-adaptiven Netzverfeinerung*. Diplomarbeit. Ruhr-Universität Bochum.
- DVORKIN, E.N. UND K.-J. BATHE (1984). A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1, 77–88.
- ECKSTEIN, A. (1999). *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. Dissertation, TWM Nr.99-3. Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- KINTZEL, O. (1998). *Finite-Element-Simulation großer Dehnungen bei Schalenstrukturen und numerische Simulation der Wölbkrafttorsion*. Diplomarbeit. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- MARKUS, G. (1967). *Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke*. Werner-Verlag, Düsseldorf.
- MENZEL, W. (1996). *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*. TWM Nr. 96-4. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.

- RAMM, E. (1976). *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*. Habilitation. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.
- ROUSSELIER, G. (1987). Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nucl.Eng.Des.* 105, 97–111.
- SCHULTZ, R. (1996). *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen*. TWM Nr. 96-3. Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- SIMO, J.C. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.* 99, 61–112.
- SIMO, J.C. UND D.D. FOX (1989). On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 72, 267–304.
- SIMO, J.C. UND M.S. RIFAI (1990). A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* 29, 1595–1638.
- SIMO, J.C., M.S. RIFAI UND D.D. FOX (1990). On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 81, 91–126.
- SIMO, J.C. UND L. VU-UC (1986). A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational Aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 58, 79–116.
- TIMOSHENKO, S. UND J.N. GOODIER (1951). *Theory of Elasticity*. 2nd edition, McGraw-Hill, New York.
- TRUESDELL, C. UND W. NOLL (1992). *The non-linear field theories of mechanics* (2. Auflage). Springer-Verlag, New York.