Die Selberg-Spurformel auf symmetrischen Räumen negativer Krümmung

Diplomarbeit an der
Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von Benjamin Holthaus,
betreut von Prof. Dr. Gerhard Knieper
Bochum, 30. Oktober 2008

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr. Gerhard Knieper für seine Betreuung bedanken, die wesentlich zum gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.
Mein Dank gilt auch all den Menschen, die mir beim Korrekturlesen eine unverzichtbare Hilfe waren.

Inhaltsverzeichnis

Notationsindex

Die Zahl hinter dem Zeichen gibt an, an welcher Stelle der Arbeit weitere Informationen über das jeweilige Zeichen zu finden sind.

$\mathfrak{A}$	(2.4.)
$\mathcal{A}_w$	Weingartenabbildung (1.4.3)
$b_x(y,\xi)$	Busemannfunktion (1.5.1)
β_z	2.Fundamentalform (1.4.1)
$c_{p,q}$,c_v	Geodäten (1.)
$\mathcal{C}^n(\mathfrak{X})$	n-mal stetig diffb. Fkt.
$d(p,q)$	riemannscher Abstand (1.)
Δ	Laplace-Operator (1.3.4)
exp	Exponentialabbildung
φ_λ	(2.3.2)
$\mathfrak{F}$	Fundamentalmenge (1.2.4)
$\mathcal{F}$	(2.4.3)
$g, \hat{g}$	(2.3.6)
$\mathfrak{G}$	(1.1.)
γ	$\in \Gamma$ Isometrie
$< \gamma_0 >$	(1.2.6)
Γ	$\subseteq Iso(\mathfrak{X})$
Γ_γ	Zentralisator (1.2.5)
$\Gamma(T\mathfrak{X})$	(1.3.1)
h_t	Wärmeleitkern (3.1.1)
$\mathfrak{h}$	(1.6.2)
$\mathfrak{H}_t(x)$	$:= b_x^{-1}(\cdot,\xi)(t)$ (1.5.3)
$I_{\mathfrak{M}}$	(2.1.4)
$I_{\mathfrak{X}}$	(2.1.4)
$Iso(\mathfrak{X})$	Isometriegruppe (1.2)
$K(u,v)$	Schnittkrümmung (1.)
$\mathfrak{K}$	(1.1.)
$\mathcal{K}$	(2.1.1)
$\mathcal{K}_{\mathfrak{M}}$	(2.1.2)
$\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$	(2.1.1)
$l(c)$	Länge einer Kurve c (1.)
$l(\gamma)$	(1.2.6)
$\{l_i\}_{i\geq 1}$	Längenspektrum (3.2.1)
$\mathcal{L}^2(\mathfrak{X})$	quadr. integr. Fkt.
$\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$	Laplace-Spektrum (3.)
Λ	Spektralfunktion (2.3.3)
$m_{\mathfrak{Y}}(z)$	(1.4.4)
$\mathfrak{M}$	(1.2.3)
$\mathcal{M}_r(f)$	(1.3.7)
$\mathfrak{N}$	(2.4.)
P_γ	Poincare-Abbildung (2.5.)
$\mathcal{P}$	(3.2.2)
Π	(2.2.)
$R(u,v)w$	Krümmungstensor (1.)
$\varrho(r)$	(1.3.5)
$S_r(p)$	geodätische Sphäre(1.3.5)
$S_p\mathfrak{X}$	Einheitstangentialball
$S\mathfrak{X}$	Einheitstangentialbündel
$\mathcal{S}_p$	geodätische Symmetrie
$T_p\mathfrak{X}$	Tangentialraum
$T\mathfrak{X}$	Tangentialbündel
$T\mathfrak{Y}^\perp$	(1.4.1)
$(\mathfrak{X}, g)$	(2.)
$\overline{\mathfrak{X}}$	$= \mathfrak{X} \bigcup \mathfrak{X}(\infty)$
$\mathfrak{X}(\infty)$	Randsphäre (1.1)

Einleitung

In der Linearen Algebra lernt man bereits die Spur einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als die Summe der Diagonalelemente der die Abbildung repräsentierenden quadratischen Matrix kennen.
In dieser Arbeit sollen beliebig-dimensionale Räume $\mathfrak{X}$ betrachtet werden und eine Spurformel für Integraloperatoren $I_{\mathfrak{X}} : \mathcal{L}^2(\mathfrak{X}) \to \mathcal{L}^2(\mathfrak{X})$ entwickelt werden. Dabei bezeichnet $\mathfrak{X}$ besondere Hadamard-Mannigfaltigkeiten, sogenannte symmetrische Räume mit negativer Krümmung.
Mit der Hilfe besonderer Eigenfunktionen des Laplace-Operators soll die Selberg-Spurformel entwickelt werden. Da man sich oft auf symmetrische oder homogene Räume beschränkt, wird die Spurformel gerne mit Hilfe der Liegruppentheorie hergeleitet. Hier hingegen werden fast ausschliesslich geometrische Methoden verwendet.
Die beiden Artikel [Kni] und [KnP] bilden dabei die Grundlage dieser Arbeit.

In Kapitel 1 soll zunächst an die grundlegenden Hilfsmittel und Begriffe der hyperbolischen Geometrie erinnert werden. Dort werden dann auch die zu betrachtenden Räume genauer definiert. Man schränkt die Menge der symmetrischen Räume ein auf jene mit Rang 1. Dank der Liegruppentheorie sind diese bekannt, nämlich die hyperbolischen Räume $\mathbb{R}H^n$, $\mathbb{C}H^n$, $\mathbb{H}H^n$ und $\mathbb{O}H^2$. Es wird eine Möglichkeit aufgezeigt, mit der $\mathfrak{X}$ kompaktifiziert werden kann, um die Busemannfunktionen zu definieren. Mit Hilfe der Busemannfunktionen werden die ebenen Wellen definiert, welche Dank der Struktur der hyperbolischen Räume eine Klasse von Eigenfunktionen für den Laplace-Operator darstellen. Speziell liegt dies an der geometrischen Struktur der Horosphären in der Kompaktifizierung von $\mathfrak{X}$.

In Kapitel 2 werden die Integraloperatoren $I_{\mathfrak{X}}$ und $I_{\mathfrak{M}}$ definiert. $\mathfrak{M}$ ist dabei eine kompakte Mannigfaltigkeit, deren Überlagerung $\mathfrak{X}$ ist. Unter den gegeben Voraussetzungen kommutiert der Laplace-Operator mit dem Mittelwert-Operator.
Man stellt fest, dass $I_{\mathfrak{X}}$ eine Funktion des Laplace-Operators ist. Daher wendet man $I_{\mathfrak{X}}$ auf Eigenfunktionen des Laplace-Operators an.
Mit Hilfe der Geometrie der Horosphären wird die Spurformel so dargestellt,

dass diese nur von den Eigenwerten des Laplace-Operators bzw. den geschlossenen Geodäten in $\mathfrak{M}$ abhängt.

In Kapitel 3 soll der Zusammenhang zwischen den geschlossenen Geodäten in $\mathfrak{M}$ und den Eigenwerten des Laplace-Operators mit Hilfe der Spurformel betrachtet werden. Dabei wird für den Kern des Integraloperators der Wärmeleitkern benutzt und mit dessen Hilfe die Spurformel aufgestellt. Da die linke Seite der Spurformel die Fourier-Tranformierte eines Teils der rechten Seite ist, die linke Seite der Spurformel in diesem Fall aber die Spur des Wärmeleitkern ist, benutzt man die inverse Fouriertransformation, um die Spurformel herzuleiten.
Nun kann man mit Hilfe des Laplace-Spektrums das Längenspektrum errechnen.
Zuletzt werden die Spurformeln für $\mathbb{R}H^2$ und $\mathbb{R}H^3$ präsentiert.

1 Hyperbolische Geometrie

In der Differentialgeometrie beschäftigt man sich mit Mannigfaltigkeiten klassifiziert nach ihren Krümmungseigenschaften. Dabei unterscheidet man 3 verschiedene Geometrien: die euklidische ($K = 0$), die sphärische ($K \geq 0$) und die hyperbolische Geometrie ($K \leq 0$), wobei K die Schnittkrümmung bezeichnet. Diese Arbeit behandelt im Wesentlichen spezielle Mannigfaltigkeiten aus der hyperbolischen Geometrie. Daher werden in diesem Kapitel zuerst wichtige Begriffe, Notationen und Ergebnisse der hyperbolischen Geometrie aufgeschrieben.
Begonnen wird mit allgemeinen Begriffen der Differentialgeometrie:

$(\mathfrak{X}, \mathtt{g})$ sei eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*. Dabei wird die *riemannsche Metrik* auch mit $\mathtt{g} = \langle , \rangle_{\mathfrak{X}}$ oder wenn nicht missverständlich mit $\langle , \rangle$ bezeichnet.
$u, v, w \in T_p\mathfrak{X}$ seien Elemente aus dem *Tangentialraum* an $p \in \mathfrak{X}$, also *Tangentialvektoren* an p.
$R(u, v)w : T_p\mathfrak{X} \times T_p\mathfrak{X} \times T_p\mathfrak{X} \to T_p\mathfrak{X}$ sei der *Krümmungstensor* von $\mathfrak{X}$ an p.
Die Schnittkrümmung $K(u, v)$ an p, der durch die beiden linear unabhängigen Vektoren $u, v \in T_p\mathfrak{X}$ aufgespannten Tangentialebene, ist mit Hilfe von R definiert als:

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u\rangle}{\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2}$$

Sei $c : [a, b] \to \mathfrak{X}$ eine beliebige Kurve in $\mathfrak{X}$, so ist *die Länge* dieser Kurve definiert als:

$$l(c) = \int_a^b \sqrt{\mathtt{g}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt$$

Sind $p, q \in \mathfrak{X}$ zwei beliebige Punkte, so ist *der Abstand* zwischen ihnen definiert als:

$$d(p, q) := \inf_c l(c)$$

Dabei wird das Infimum über alle Kurven c gebildet, die p mit q verbinden.

Eine Kurve, welche die nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = 0$$

erfüllt, heisst *Geodäte*.
Die Geodäten sind die lokal kürzesten Verbindungen.
Im Weiteren werden die Geodäten mit $c(t)$ bezeichnet und, wenn nicht anders angegeben, nach Bogenlänge parametrisiert betrachtet.
Indizes geben Startwerte für die Geodäten an. Dies können entweder zwei Punkte $p, q \in \mathfrak{X}$ sein, wobei $c_{p,q}$ die Geodäte bezeichnet, die im Zeitpunkt Null in p startet und mit Einheitsgeschwindigkeit nach q läuft, oder $v \in T\mathfrak{X}$, wobei c_v die Geodäte mit der Eigenschaft $\dot{c}_v(0) = v$ bezeichnet.

1.1 Hadamard Mannigfaltigkeiten

Gegenstand dieser Arbeit sind spezielle Mannigfaltigkeiten. Deren Definition und Eigenschaften sollen nun betrachtet werden.

1.1.1 Definition

Eine riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathfrak{X}, g)$ heisst *Hadamard-Mannigfaltigkeit*, wenn sie vollständig, einfachzusammenhängend und nicht-positiv gekrümmt ist. Die Krümmung von $\mathfrak{X}$ ist nicht notwendigerweise konstant.

Bemerkung: *Nach dem Satz von Hadamard-Cartan sind Hadamard-Mannigfaltigkeiten diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$. Ausserdem gibt es für zwei beliebige Punkte der Mannigfaltigkeit eine eindeutige Geodätische, welche diese beiden Punkte miteinander verbindet.*

Im Weiteren sei $\mathfrak{X}$ eine Hadamard-Mannigfaltigkeit.
Eine Klasse von Eigenfunktionen für den Laplaceoperator sind die sogenannten *ebenen Wellen*. Diese werden über der Kompaktifizierung $\overline{\mathfrak{X}}$ von $\mathfrak{X}$ definiert.
$\overline{\mathfrak{X}}$ soll nun konstruiert werden. Dazu betrachtet man das Verhalten unterschiedlicher Geodäten zueinander und teilt die Geodäten in Klassen ein.

1.1.2 Definition

Zwei Geodäten $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ heissen *asymptotisch* ($c_1 \sim c_2$), wenn gilt:

$$\sup_{t \in [0,\infty]} d(c_1(t), c_2(t)) < \infty$$

Diese Relation induziert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geodäten von $\mathfrak{X}$. Die Menge der Äquivalenzklassen von asymptotischen Geodäten wird die *Sphäre im Unendlichen* oder *Randsphäre* genannt und mit $\mathfrak{X}(\infty)$ bezeichnet.

1.1.3 Definition

Für einen Punkt $p \in \mathfrak{X}$ sei $f_p : S_p\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}(\infty)$ eine Abbildung mit $v \mapsto [c_v]$, wobei $[c_v]$ die Äquivalenzklasse von $c_v : \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}(\infty)$ bezeichnet. $S_p\mathfrak{X}$ bezeichnet den Einheitstangentialraum an p.

Bemerkung: *Wegen der nicht positiven Krümmung von $\mathfrak{X}$ ist f_p eine Bijektion.*
Die Topologie auf $\mathfrak{X}(\infty)$, welche so definiert ist, dass f_p ein Homöomorphismus wird, ist eindeutig und unabhängig von p. Dies folgt ebenso wegen der negativen Krümmung.
Das Urbild einer durch f_p induzierten offenen Menge in $\mathfrak{X}(\infty)$ entspricht einer offenen Menge in $S_p\mathfrak{X}$ und das Bild dieser Menge unter der Abbildung $f_q^{-1} \circ f_p : S_p\mathfrak{X} \to S_q\mathfrak{X}$ ist wiederum eine offene Menge in $S_q\mathfrak{X}$.

Damit ist es möglich, $\mathfrak{X}$ zu einem topologischen Raum $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}(\infty)$ zu erweitern. Mit der Abbildung $\varphi : B_1(p) = \{v \in T_p\mathfrak{X} \,|\, ||v|| \leq 1\} \to \overline{\mathfrak{X}}$, gegeben als

$$\varphi(v) = \begin{cases} \exp_p(\frac{||v||}{1-||v||}v) & ||v|| < 1 \\ f_p(v) & ||v|| = 1 \end{cases}$$

wird der Einheitstangentialball am Fusspunkt $p \in \mathfrak{X}$ homöomorph auf $\overline{\mathfrak{X}}$ abgebildet. Diese Topologie heisst Kegel-Topologie (cone topology)[EON].

Die Hadamard-Mannigfaltigkeiten, welche betrachtet werden sollen, sind noch spezieller, so genannte *symmetrische Räume*.

1.1.4 Definition

Sei $p \in \mathfrak{X}$, c eine Geodäte in $\mathfrak{X}$ mit $c(0) = p$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Diffeomorphismus $\mathcal{S}_p : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, definiert durch:

$$\mathcal{S}_p(c(t)) := c(-t)$$

heisst *geodätische Symmetrie* und ist eindeutig bestimmt durch die Eindeutigkeit der Geodäten auf $\mathfrak{X}$.

1.1.5 Definition

Eine Hadamardmannigfaltigkeit $\mathfrak{X}$ ist *symmetrischer Raum*, wenn für jedes $p \in \mathfrak{X}$ die geodätische Symmetrie $\mathcal{S}_p : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ eine Isometrie auf $\mathfrak{X}$ ist.

Bemerkung: *Ein symmetrischer Raum mit nicht-positiver Krümmung ($K \leq 0$, K nicht identisch 0) wird ein symmetrischer Raum nicht-kompakten Typs genannt.*
In dieser Arbeit werden nur symmetrische Räume nicht-kompakten Typs betrachtet.

1.1.6 Definition

Sei $\mathfrak{U}$ ein Unterraum des Tangentialraums $T_p\mathfrak{X}$ mit Krümmung 0 an einem beliebigen Punkt $p \in \mathfrak{X}$. So ist der *Rang von* $\mathfrak{X}$ die maximale Dimension eines solchen Unterraums über allen $p \in \mathfrak{X}$.

Bemerkung:

- *In dieser Arbeit werden symmetrische Räume nicht-kompakten Typs mit Rang 1 betrachtet. Diese Räume sind homogene Räume, was bedeutet, dass die Isometriegruppe $Iso(\mathfrak{X})$ transitiv ist. Mit Hilfe von Lie-Gruppen kann man alle diese Räume bestimmen. Dies sind:* $\mathbb{R}H^n$, $\mathbb{C}H^n$, $\mathbb{H}H^n$ *und* $\mathbb{O}H^2$*.[Hel][Ebe]*

- *Der symmetrische Raum $\mathfrak{X}$ lässt sich darstellen als $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. Dabei ist $\mathfrak{G}$ eine halbeinfache Liegruppe (reel, zusammenhängend, nicht-kompakt,* *mit endlichem Zentrum) und $\mathfrak{K}$ ist eine maximal kompakte Untergruppe. Zum Beispiel gilt $\mathfrak{G} = Iso_0(\mathfrak{X})$, mit $Iso_0(\mathfrak{X})$ die Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{X}$, die die Identität enthält, und $\mathfrak{K} = \{g \in \mathfrak{G} : gp = p\}$ für ein fixiertes $p \in \mathfrak{X}$.[Ebe]*

1.2 Überlagerungstheorie

Sei Γ im Folgenden eine diskrete Untergruppe der Isometriegruppe von $\mathfrak{X}$, $\Gamma \subset Iso(\mathfrak{X})$. Es werden nun einige Ergebnisse aus der Überlagerungstheorie wiederholt.

1.2.1 Definition

Eine diskrete Gruppe Γ operiert *eigentlich* auf $\mathfrak{X}$, falls für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{X}$ die Menge

$$\Gamma_{\mathfrak{K}} = \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K} \neq \varnothing\}$$

endlich ist. Man sagt auch: Γ wirkt *eigentlich diskontinuierlich* auf $\mathfrak{X}$.
Die Wirkung der Gruppe Γ heisst *fixpunktfrei* oder *frei*, falls für alle $x \in \mathfrak{X}$ die Isotropiegruppe $\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma x = x\}$ trivial ist, also $\Gamma_x = \{e\}$.

Bemerkung:

- *Die Gruppe Γ induziert eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{X}$ durch die Relation*

  $$x \sim y :\Leftrightarrow y = \gamma x, \qquad \gamma \in \Gamma$$

  Mit $\mathfrak{X}/\Gamma = \{[x] = \Gamma(x) \,|\, x \in \mathfrak{X}\}$ wird die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet und

  $$\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}/\Gamma$$

  sei die kanonische Projektion.
  Wählt man auf $\mathfrak{X}/\Gamma$ die Quotiententopologie, d.h. sei $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{X}/\Gamma$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(\mathfrak{O})$ offen in $\mathfrak{X}$, so ist π eine Überlagerungsabbildung.

- *Da $\mathfrak{X}$ ein symmetrischer Raum mit nicht-positiver Krümmung ist und solche symmetrischen Räume homogene Räume sind, wirkt Γ fixpunktfrei auf $\mathfrak{X}$, da die Isometriegruppe homogener Räume transitiv ist.*

1.2.2 Lemma

Sei Γ eine eigentlich, diskontinuierlich und fixpunktfrei auf $\mathfrak{X}$ wirkende Gruppe.
Dann existiert auf $\mathfrak{X}/\Gamma$ genau eine differenzierbare Struktur, so dass die Projektion $\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}/\Gamma$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

1.2.3 Definition

Γ wirkt *kompakt* auf $\mathfrak{X}$, wenn $\mathfrak{X}/\Gamma$ kompakt ist.
Sei Γ nun eine eigentlich, diskontinuierlich und kompakt auf $\mathfrak{X}$ wirkende Untergruppe von $Iso(\mathfrak{X})$.
$\mathfrak{M} := \mathfrak{X}/\Gamma$ ist eine kompakte Mannigfaltigkeit.

1.2.4 Definition

Eine abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{X}$ heisst eine *zu* Γ *korrespondierende Fundamentalmenge*, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathfrak{X} = \bigcup\{\gamma(\mathfrak{F})\} \mid \gamma \in \Gamma\}$
2. Wenn $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ das Innere von $\mathfrak{F}$ bezeichnet, so gilt: die Mengen $\gamma(\overset{\circ}{\mathfrak{F}})$ sind paarweise disjunkt.
3. Sei $\partial\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \backslash \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ der Rand von $\mathfrak{F}$, so gilt: $vol(\partial\mathfrak{F}) = 0$

Bemerkung:

- *Es gilt* $x \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ *und* $\gamma x \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, *so folgt:* $\gamma = e$
- *Die Fundamentalmenge* $\mathfrak{F}$ *ist nicht eindeutig.*

Als nächstes soll die Darstellung von Γ mit Hilfe der Konjugationsklassen vereinfacht werden.

1.2.5 Definition

$[\gamma] = \{\gamma' \in \Gamma \,|\, \eta\gamma\eta^{-1} = \gamma',\ \eta \in \Gamma\}$ bezeichne die *Konjugationsklasse von γ in* Γ.
Π sei die Teilmenge von Γ, welche die nichtrivialen Konjugationsklassen von Γ repräsentiere und $\Gamma_\gamma := \{\eta \in \Gamma \,|\, \eta\gamma = \gamma\eta\}$ bezeichne den *Zentralisator von γ aus* Γ.

1.2.6 Satz

Sei $\Gamma \subset Iso(\mathfrak{X})$ eine eigentlich, diskontinuierlich und kompakt auf $\mathfrak{X}$ wirkende Gruppe, so dass $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}/\Gamma$ eine kompakte Mannigfaltigkeit negativer Krümmung ist.
Dann hat Γ folgende Eigenschaften:

1. Für alle $\gamma \in \Gamma$ existiert ein $x_0 \in \mathfrak{X}$, so dass gilt:
$$d(x_0, \gamma x_0) = \inf_{x \in \mathfrak{X}} d(x, \gamma x)$$
Der Wert $d(x_0, \gamma x_0)$ wird *die Länge $l(\gamma)$ von γ* genannt.

2. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ die Geodäte, welche x_0 mit γx_0 verbindet, so dass $c(0) = x_0$ und $c(l(\gamma)) = \gamma x_0$. So gilt :
$$\gamma c(t) = c(t + l(\gamma))$$
Die Geodäte c, welche die eindeutige γ-invariante Geodäte ist, wird die *Achse von γ* genannt.
Die Projektion $\pi(c) : [0, l(\gamma)] \to \mathfrak{M}$ ist eine geschlossene Geodäte in $\mathfrak{M}$ mit der Länge $l(\gamma)$.

3. Die Konjugationsklassen in Γ stehen in 1-1 Korrespondenz zu den geschlossenen Geodäten in $\mathfrak{M}$.

4. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ die Achse eines $\gamma \in \Gamma$ und $A_c = \{\eta \in \Gamma \,|\, \eta(c) = c\}$ die Untergruppe der Elemente, welche c fixieren. ($c = c(\mathbb{R})$)
Dann existiert ein eindeutiges primitives Element γ_0 mit $\gamma = \gamma_0^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt:
$$A_c =< \gamma_0 >:= \{\gamma_0^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ein Element $\gamma_0 \in \Gamma$ heisst *primitiv*, wenn es nicht Vielfaches eines anderen primitiven Elementes $\eta \in \Gamma$ ist.
Primitive Elemente korrespondieren mit den einfach geschlossenen Geodäten in $\mathfrak{M}$.

5. Γ_γ ist erzeugt von γ_0, also $\Gamma_\gamma =< \gamma_0 >$.

Beweis:

1. Dies folgt aus der Kompaktheit von $\mathfrak{M}$

2. Sei $\tilde{c} = \gamma \circ c$ die Geodäte mit $\tilde{c}(0) = \gamma(p_0)$ und $\tilde{c}(l(\gamma)) = \gamma^2(p_0)$
Wenn $\dot{\tilde{c}}(0) \neq \dot{c}(l)$, so gilt für $t \in (0, l)$:
$$d(c(t), \gamma(c(t))) < d(c(t), \gamma(p_0)) + d(\gamma(p_0), \gamma(c(t)))$$
$$= l(\gamma) - t + t = l(\gamma)$$
Dies widerspricht der Definition von $l(\gamma)$.
Gäbe es zwei γ-invariante Geodäten $c, \tilde{c}$, so wird ein Punkt auf der einen Mittels einer Geodäten h mit einem Punkt auf der anderen verbunden. γ ist eine Isometrie, somit bilden die Geodäten c, $\tilde{c}$, h und $\gamma(h)$ ein Geodätisches Viereck mit Winkelsumme 2π. Nach dem flachen Streifensatz ist dies für Rang 1 Räume ein Widerspruch.

3. γ_2 ist konjugiert zu γ_1, wenn es ein Element $\eta \in \Gamma$ gibt, so dass
$$\gamma_2 = \eta\gamma_1\eta^{-1}.$$
Daher gilt: wenn c eine Achse von γ_1 ist, so ist $\eta(c)$ eine Achse von γ_2 und die Projektion erzeugt die selbe Geodäte auf $\mathfrak{M}$.
Andersherum gibt es zu jeder geschlossenen Geodäten auf $\mathfrak{M}$ einen Lift auf eine Achse für ein $\gamma \in \Gamma$. Ein anderer Lift würde auf die Achse eines Elementes konjugiert zu γ abbilden.

4. Für jedes $\gamma \in A_c$ gibt es ein $\theta(\gamma) \in \mathbb{R}$, so dass $\gamma c(t) = c(t + \theta(\gamma))$. Es gilt:
$$c(\theta(\gamma_1\gamma_2)) = \gamma_1\gamma_2(c(0)) = \gamma_1(c(\theta(\gamma_2))) = c(\theta(\gamma_1) + \theta(\gamma_2))$$

d.h. die Abbildung

$$\theta : A_c \to (\mathbb{R}, +)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Da Γ diskret und fixpunktfrei wirkt, ist θ injektiv und A_c isomorph zu $\mathbb{Z}$. Damit folgt die Behauptung.

5. Wenn $\gamma\eta = \eta\gamma$ und c eine Achse von γ, so gilt $\gamma\eta c = \eta\gamma c = \eta c$, womit ηc auch eine Achse von γ ist. Wegen der Eindeutigkeit der Achse jedoch gilt $\eta c = c$ und zusammen mit 1.2.6(4) folgt: $\eta, \gamma \in < \gamma_0 >$

$\square$

Bemerkung: Γ *sei wie im vorigen Lemma und* $\mathfrak{F}$ *eine Fundamentalmenge. So gilt:*

$$\bigcup_{\eta \in \Gamma/\Gamma_\gamma} \eta(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{X}/\Gamma_\gamma) = \mathfrak{F}(\mathfrak{X}/ < \gamma_0 >)$$

1.3 Differentialoperatoren

Man kann die Selberg-Spurformel mit Hilfe von Eigenfunktionen des Laplace-Operators herleiten. Deshalb soll in diesem Abschnitt der Laplace-Operator (machmal auch Laplace-Beltrami-Operator genannt) für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten eingeführt werden. Die Definition benutzt den Gradienten einer Funktion und die Divergenz eines Vektorfeldes.

1.3.1 Definition

Der Gradient einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{X})$ in einem Punkt $p \in \mathfrak{X}$ ist die Abbildung $grad : \mathcal{C}^1(\mathfrak{X}) \to \Gamma(T\mathfrak{X})$ implizit definiert durch:

$$\mathsf{g}(grad\, f(p), X(p)) = X(f)(p).$$

Dies gilt für alle Vektorfelder $X \in \Gamma(T\mathfrak{X})$.

1.3.2 Definition

Die Divergenz eines Vektorfeldes $X \in \Gamma(T\mathfrak{X})$ ist die Abbildung $div : \Gamma(T\mathfrak{X}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{X})$ definiert durch:

$$divX(p) := tr\nabla X(p) := \sum_i \langle e_i, \nabla_{e_i} X(p) \rangle$$

Dabei bezeichnet $\{e_i\}_i$ eine ON-Basis von $T_p\mathfrak{X}$.

Für das Rechnen mit diesen Operatoren sind folgende Regeln bekannt:

1.3.3 Lemma

- für den Gradienten:
  1. Linearität: für $a \in \mathbb{C}$ und $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{X})$ gilt:
  $$grad(f_1 + af_2) = grad\, f_1 + a\, grad\, f_2$$
  2. Produktregel: Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{X})$:
  $$grad(f_1 f_2) = f_1\, grad\, f_2 + f_2\, grad\, f_1$$
  3. Kettenregel: Sei $f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C})$ und $f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$, dann gilt:
  $$grad(f_1 \circ f_2) = f_1'\, grad\, f_2$$
- für die Divergenz:
  1. Linearität: für $a \in \mathbb{C}$ und $X, Y \in \Gamma(T\mathfrak{X})$ gilt:
  $$div(X + aY) = div(X) + a\, div(Y)$$
  2. Produktregel: Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{X})$ und $X \in \Gamma(T\mathfrak{X})$, dann gilt:
  $$div(fX) = f\, div(X) + \langle grad\, f, X \rangle$$

1.3.4 Definition

Der Laplaceoperator Δ ist der $\mathbb{C}$-lineare Differentialoperator
definiert durch:

$$\begin{aligned} \Delta &: \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty \\ \Delta & f = -div\, grad\, f \end{aligned}$$

1.3.5 Definition

Für einen Punkt $p \in \mathfrak{X}$ und $r \in \mathbb{R}$ wird die Menge

$$S_r(p) := \{x \in \mathfrak{X} \,|\, x = c_v(r)\ \forall v \in T_p\mathfrak{X}\}$$

die *geodätische Sphäre* um p mit dem Radius r genannt.

Bemerkung:

- *In einem symmetrischen Raum nicht-kompakten Typs mit Rang 1 ist die mittlere Krümmung der geodätischen Sphäre um* $p \in \mathfrak{X}$ *mit Radius* r $m_{S_r(p)} := \varrho'(r)/\varrho(r)$, *wobei* $\varrho(r)$ *die Dichte dieser Sphäre ist.*
- *Der Laplace-Operator auf* $S_r(p)$ *als Untermannigfaltigkeit von* $\mathfrak{X}$ *wird mit* $\Delta_{S_r(p)}$ *bezeichnet.*

1.3.6 Lemma

Sei $v \in S_p\mathfrak{X}$. In Polarkoordinaten hat der Laplaceoperator die Darstellung

$$\Delta(f)(c_v(r)) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(c_v(r)) - m_{S_r(p)}(c_v(r)) \frac{\partial}{\partial r} f(c_v(r)) + \Delta_{S_r(p)}(f)(c_v(r))$$

Beweis: Für $x = c_v(r)$ definieren wir $e_n := e_r := \dot{c}_v(d(p,x))$. e_r kann nun um x herum fortgesetzt werden.
Man ergänze e_r zu einer Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_r\}$ des $T_p\mathfrak{X}$.

Nun rechnet man :

$$
\begin{aligned}
\Delta f = & -div\,grad\,f \\
= & -\langle e_r, \nabla_{e_r} grad\,f\rangle - \sum_{i=0}^{n-1}\langle e_i, \nabla_{e_i} grad\,f\rangle \\
= & -\langle e_r, \nabla_{e_r} grad\,f\rangle - \sum_{i=0}^{n-1}\langle e_i, \nabla_{e_i}(\langle grad\,f, e_r\rangle e_r + \langle grad\,f, e_i\rangle e_i)\rangle \\
= & -e_r\langle e_r, grad\,f\rangle \\
& -\sum_{i=0}^{n-1}\langle e_i, \nabla_{e_i}\langle grad\,f, e_r\rangle e_r\rangle - \sum_{i=0}^{n-1}\langle e_i, \nabla_{e_i}\langle grad\,f, e_i\rangle e_i\rangle \\
= & -e_r(e_r f) - \sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\langle e_i, e_i\langle grad\,f, e_r\rangle e_r\rangle}_{=0} \\
& -\sum_{i=0}^{n-1}\langle e_i, \langle grad\,f, e_r\rangle \nabla_{e_i} e_r\rangle - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\langle e_i, \nabla_{e_i}\langle grad\,f, e_i\rangle e_i}_{=-div_{S_r(p)} grad\,f =: \Delta_{S_r(p)} f} \\
= & -e_r(e_r f) - m_{S_r(p)}(x) e_r f + \Delta_{S_r(p)} f
\end{aligned}
$$

□

Zur Berechnung der Spurformel ebenfalls hilfreich ist der Mittelwert-Operator:

1.3.7 Definition

Zu einer Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{X})$ ist der *Mittelwert-Operator* wie folgt definiert:

$$
\mathcal{M}_r(f)(p) := \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_p \mathfrak{X}} f(c_v(r)) d\theta
$$

1.4 Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Eine besondere Klasse von Untermannigfaltigkeiten von $\mathfrak{X}$, die *Horosphären*, werden später benutzt, um die Spurformel zu vereinfachen. An dieser Stelle soll die Geometrie von Untermannigfaltigkeiten betrachtet werden.

Die Krümmung einer Untermannigfaltigkeit wird generell durch die *zweite Fundamentalform* oder die *Weingartenabbildung* bestimmt.

1.4.1 Definition

Sei $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ eine Untermannigfaltigkeit ($\mathfrak{X}$ eine beliebige riemannsche Mannigfaltigkeit). $T\mathfrak{Y}$ bezeichnet das Tangentialbündel an $\mathfrak{Y}$ und $T\mathfrak{Y}^\perp$ bezeichnet den Teil des Tangentialbündels an $\mathfrak{X}$, der senkrecht auf $T\mathfrak{Y}$ steht.
$(T_p\mathfrak{Y}^\perp := \{w \in T_p\mathfrak{X} \,|\, \langle w, v\rangle = 0 \ \forall v \in T_p\mathfrak{Y}\})$
Für ein $z \in \mathfrak{Y}$ und $X, Y \in T\mathfrak{Y}$ wird die Abbildung

$$\beta : \Gamma(T\mathfrak{Y}) \times \Gamma(T\mathfrak{Y}) \to \Gamma(T\mathfrak{Y}^\perp)$$

mit

$$\beta(X,Y)(z) := \nabla_X^{\mathfrak{X}} Y(z)^\perp$$

die *zweite Fundamentalform* von $\mathfrak{Y}$ genannt.

1.4.2 Bemerkung:

Für jedes $z \in \mathfrak{Y}$ definiert β eine symmetrische Biliniearform

$$\beta_z(X,Y) := \beta(X,Y)(z)$$

1.4.3 Definition

Seien $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ wie oben und $\omega \in T_z\mathfrak{Y}^\perp$ ein Normalenvektor von $z \in \mathfrak{Y}$. Der symmetrische Endomorphismus

$$\mathcal{A}_\omega : T_z\mathfrak{Y} \to T_z\mathfrak{Y}$$

mit

$$\langle A_\omega(v), w\rangle := \langle \beta_z(v,w), \omega\rangle$$

heisst *Weingartenabbildung der Untermannigfaltigkeit* $\mathfrak{Y}$.

Mit Hilfe der Weingartenabbildung kann man die Geometrie, genauer die mittlere Krümmung einer Untermannigfaltigkeit bestimmen.

1.4.4 Definition

Es sei weiterhin $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ und $z \in \mathfrak{Y}$ und ω ein Normalenvektor in z. $\{e_i\}_i$ sei eine ON-Basis der Untermannigfaltigkeit. Dann heisst

$$m_{\mathfrak{Y}}(z) := -tr\mathcal{A}_\omega = -\sum_i \langle \mathcal{A}_\omega(e_i), e_i\rangle$$

die *mittlere Krümmung der Untermannigfaltigkeit* $\mathfrak{Y}$.

Im nun folgenden Kapitel wird dies angewendet um die mittlere Krümmung von Horosphären zu berechnen.

1.5 Busemannfunktionen

In diesem Kapitel werden die Busemannfunktionen definiert.
Auf symmetrischen Räumen mit negativer Krümmung und Rang 1 kann man mit diesen Eigenfunktionen für den Laplace-Operator konstruieren.

1.5.1 Lemma

Sei $\mathfrak{X}$ eine Hadamardmannigfaltigkeit und $c : \mathbb{R} \to \mathfrak{X}$ eine den Punkt $\xi \in \mathfrak{X}(\infty)$ repräsentierende Geodäte mit $c(0) = y$, so existiert der Grenzwert

$$b_y(x,\xi) := \lim_{t\to\infty} d(x, c(t)) - t$$

$b_y(x,\xi)$ ist eine $\mathcal{C}^2$-Funktion.

Beweis: Sei $t_2 > t_1$, so folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(x,c(t_2)) - t_2 - d(x,c(t_1)) - t_1 &= d(x,c(t_2)) - d(x,c(t_1)) - (t_2 - t_1) \\ &\leq d(x,c(t_2)) - d(x;x(t_2)) = 0 \end{aligned}$$

Die Folge ist monoton fallend und wegen

$$d(x,c(t)) - t \geq -d(x,y)$$

nach unten beschränkt.

$b_y(x,\xi)$ ist $\mathcal{C}^2$-Funktion (als Funktion von x, denn $x \mapsto d(x,c(t)) - t$ ist $\mathcal{C}^2$ Funktion für alle t. Ausserdem konvergiert die Funktionenfolge $f_n(x) := d(x,c(t_n)) - t_n$ für $t_n \to \infty$ gleichmässig gegen b_y, wie auch die Folge ihrer Gradienten gegen $grad\, b_y$.
Die genaue Beweisführung findet man in [HiH].

□

1.5.2 Definition

Der Grenzwert $b_y(x,\xi)$ wird *Busemannfunktion* genannt.

1.5.3 Definition

Die Niveaumengen einer Busemannfunktion werden *Horosphären an* $\xi \in \mathfrak{X}(\infty)$ *durch* $x \in \mathfrak{X}$ genannt und werden mit $\mathfrak{H}_t(x,\xi)$ bezeichnet.
Sei $v \in S\mathfrak{X}$, so wird mit $\mathfrak{H}_t(v) = \mathfrak{H}_t(c_v(0), c_v(\infty))$ die Horosphäre an $c_v(\infty) \in \mathfrak{X}(\infty)$ durch $c_v(0)$ bezeichnet.

Bemerkung: *Der Wechsel des Basispunktes $c(0) = y$ ändert die Busemannfunktion nur um einen konstanten Summanden.*

1.5.4 Lemma

Für das Gradientenfeld der Busemannfunktionen gilt:

$$||grad\, b_y|| = 1$$

Beweis: Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_t(x) := d(x, c(t)) - t$$

durch deren Grenzwert die Busemannfunktionen definiert sind. Es gilt:

$$||grad\, f_t(x)|| = ||grad(d(x, c(t)) - t)|| = ||\dot{c}_{x,c(t)}(d(c, c(t))|| = 1$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz der Funktionenfolge f_t ergibt sich die Behauptung.

$\square$

1.6 Ebene Wellen

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenfunktionen des Laplace-Operators eine Rolle spielen. Daher werden in diesem Unterkapitel Funktionen definiert, sogenannte *ebene Wellen*, die sich in dem hier vorliegenden Fall, dass $(\mathfrak{X}, g)$ ein symmetrischer Raum mit negativer Krümmung und Rang 1 ist, als Eigenfunktionen des Laplace-Operators herausstellen werden.

1.6.1 Definition

Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x \mapsto b_y(x, \xi)$ eine Busemannfunktion gegeben.
So definieren wir eine *ebene Welle* als die Funktion:

$$f_{\alpha,\xi}(x) := e^{-\alpha b_y(x,\xi)}$$

Bemerkung: *Aus der Definition der Busemannfunktionen erkennt man, dass die Horosphären wiederum die Niveaus der ebenen Wellen sind.*

1.6.2 Lemma

$$\Delta f_{\alpha,\xi}(x) = (\alpha\, \mathfrak{h}(x, \xi) - \alpha^2) f_{\alpha,\xi}(x)$$

Beweis: Man betrachte zuerst den Gradienten von $f_{\alpha,\xi}$:

$$grad\, f_{\alpha,\xi}(x) = -\alpha\, e^{-\alpha\, b_y(x,\xi)} grad\, b_y(x,\xi)$$

Davon bilden wir nun die Divergenz,also:

$$\begin{aligned}
\Delta f_{\alpha,\xi}(x) &= -div\, grad\, f_{\alpha,\xi}(x) \\
&= -div(-\alpha\, e^{-\alpha\, b_y(x,\xi)} grad\, b_y(x,\xi)) \\
&= \alpha\, e^{-\alpha\, b_y(x,\xi)} div\, grad\, b_y(x,\xi) \\
&\quad -\alpha^2 e^{-\alpha\, b_y(x,\xi)} \langle grad\, b_y(x,\xi), grad\, b_y(x,\xi)\rangle \\
&= (-\alpha^2 + \alpha\, \mathfrak{h}(x,\xi)) e^{-\alpha\, b_y(x,\xi)}
\end{aligned}$$

□

1.6.3 Lemma

$\mathfrak{h}(x,\xi) = div\, grad\, b_y(x,\xi)$ ist das Negative der mittleren Krümmung der Horosphäre durch x an ξ.

Beweis: Mit Hilfe der Weingartenabbildung $\mathcal{A}_w$ soll dies nun verifiziert werden.
w liegt im Einheitsnormalenfeld der Horosphäre. v sei der eindeutig bestimmte Einheitstangentialvektor in x an die Horosphäre. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
m_{\mathfrak{H}(x,\xi)}(x) = -tr\mathcal{A}_w &= -\langle \mathcal{A}_w(v), v\rangle \\
&= -\langle \nabla_v w, v\rangle \\
&= -\langle \nabla_v grad\, b_y(x,\xi), v\rangle \\
&= -\, tr \nabla grad\, b_y(x,\xi) \\
&= -\, div\, grad\, b_y(x,\xi) = -\mathfrak{h}(x,\xi)
\end{aligned}$$

□

Wie in Lemma 1.6.2 zu erkennen, sind die ebenen Wellen Eigenfunktionen des Laplace-Operators, wenn $\mathfrak{h}(x,\xi)$ unabhängig von x sind. Dazu das folgende Lemma:

1.6.4 Lemma

Sei $(\mathfrak{X}, g)$ ein symmetrischer Raum nicht-kompakten Typs mit Rang 1.
So gilt $\mathfrak{h}(x, \xi) = \mathfrak{h}(\xi)$, $\mathfrak{h}$ ist also unabhängig von x.

Bemerkung:

- *Hier ist $\mathfrak{h}(\xi)$ sogar konstant.*
- *Für den n-dimensionalen hyperbolischen Raum $\mathbb{R}H^n$ mit konstanter Krümmung -1 ist $\mathfrak{h}$ konstant $n-1$*

1.6.5 Folgerung

Da $\mathfrak{h}$ unabhängig von x ist, folgt:

$$\Delta f_{\alpha,\xi}(x) = (\alpha\,\mathfrak{h}(\xi) - \alpha^2) f_{\alpha,\xi}(x)$$

Speziell gilt: zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ und jedem $\xi \in \mathfrak{X}(\infty)$ existiert

$$\alpha = \frac{\mathfrak{h}(\xi)}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{h}^2}{4} - \lambda}$$

Somit ist die ebene Welle $f_{\alpha,\xi}$ eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert λ.
Für den weiteren Verlauf sei $r = \sqrt{\lambda - \frac{\mathfrak{h}(\xi)^2}{4}}$. Daraus folgt $\alpha = \frac{\mathfrak{h}(\xi)}{2} \pm ir$ und die ebene Wellen

$$e^{-(\frac{\mathfrak{h}(\xi)}{2} \pm ir) b_y(x,\xi)}$$

sind Eigenfunktionen des Laplace-Operators zum Eigenwert λ.

Bemerkung: *Auch wenn hier keine Hilbertraumstruktur im eigentlichen Sinne vorliegt, sollen die ebenen Wellen Eigenfunktionen genannt werden.*

2 Die Selberg-Spurformel

Im weiteren Verlauf der Arbeit sei $\mathfrak{X}$ ein symmetrischer Raum nicht-kompakten Typs mit Rang 1.
$\Gamma \subseteq Iso(\mathfrak{X})$ (genauer: Γ ist die Gruppe der Decktransformationen) sei eine eigentlich, diskontinuierlich und kompakt auf $\mathfrak{X}$ wirkende Gruppe. Somit ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}/\Gamma$ eine kompakte Mannigfaltigkeit.

2.1 Spuren von Integraloperatoren

Zuerst werden die Operatoren eingeführt, deren Spuren letztendlich betrachtet werden sollen. Dazu benötigt man Integralkerne, die gewisse Konvergenzeigenschaften erfüllen. Diese werden nun definiert:

2.1.1 Definition

Seien $x, y \in \mathfrak{X}$ und $\mathcal{K} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger.
So definieren wir folgenden symmetrischen Integralkern:

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, y) = \mathcal{K}(d(x, y))$$

Bemerkung: *Sei $\gamma \in Iso(\mathfrak{X})$ ein Element der Isometriegruppe von $\mathfrak{X}$, so gilt offensichtlich:*

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(\gamma x, \gamma y) = \mathcal{K}(d(\gamma x, \gamma y)) = \mathcal{K}(d(x, y)) = \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, y)$$

2.1.2 Definition

$\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ induziert einen Integralkern auf $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{K}_{\mathfrak{M}}(x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, \gamma y)$$

Dabei sind $x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ und $x, y \in \mathfrak{X}$ solche Elemente, so dass $[x] = x_{\mathfrak{M}}$ bzw. $[y] = y_{\mathfrak{M}}$ in $\mathfrak{X}/\Gamma = \mathfrak{M}$.

Bemerkung: *Die Summe existiert, da man $\mathcal{K}$ als Funktion mit kompaktem Träger annimmt.*

2.1.3 Lemma

Für $x, y \in \mathfrak{X}$, $x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ mit $[x] = x_{\mathfrak{M}}$ und $[y] = y_{\mathfrak{M}}$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ gilt offensichtlich:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(\gamma_1 x, \gamma\gamma_2 y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, \gamma y)$$

Damit ist $\mathcal{K}_{\mathfrak{M}}$ eine auf $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ wohldefinierte Funktion.

Beweis: Wegen der Invarianz des Integralkerns $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ unter Wirkung eines Elementes $\gamma \in Iso(\mathfrak{X})$ und der Existenz eines Inversen Elementes γ^{-1} gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathfrak{M}}(x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}}) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(\gamma_1 x, \gamma\gamma_2 y) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(\gamma_1^{-1}\gamma_1 x, \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_2 y) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_2 y) \\
&= \sum_{\gamma' \in \Gamma} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, \gamma' y) = \qquad \mathcal{K}_{\mathfrak{M}}(x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}})
\end{aligned}$$

Dabei bewirkt der Austausch von γ durch γ' nur eine Umstellung der einzelnen Summanden des Integralkerns.

$\square$

2.1.4 Definition

Die Integralkerne $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ und $\mathcal{K}_{\mathfrak{M}}$ definieren symmetrische Integraloperatoren für Funktionen $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{X})$ bzw. $f \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{M})$.

$$I_{\mathfrak{X}} : \mathcal{L}^2(\mathfrak{X}) \to \mathcal{L}^2(\mathfrak{X}), \qquad I_{\mathfrak{X}}(\tilde{f})(x) := \int_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, y)\tilde{f}(y)dv(y)$$

$$I_{\mathfrak{M}} : \mathcal{L}^2(\mathfrak{M}) \to \mathcal{L}^2(\mathfrak{M}), \qquad I_{\mathfrak{M}}(f)(x_{\mathfrak{M}}) := \int_{\mathfrak{M}} \mathcal{K}_{\mathfrak{M}}(x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}})f(y_{\mathfrak{M}})dv(y_{\mathfrak{M}})$$

2.1.5 Korollar

Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{M})$ und $\tilde{f} := f \circ \pi$ der korrespondierende Γ-periodische Lift.
$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ sei eine Fundamentalmenge. so gilt:

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{M}}(f)(x_{\mathfrak{M}}) &= \int_{\mathfrak{M}} \mathcal{K}_{\mathfrak{M}}(x_{\mathfrak{M}}, y_{\mathfrak{M}}) f(y_{\mathfrak{M}}) dv(y_{\mathfrak{M}}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathfrak{F}} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, \gamma y) \tilde{f}(y) dv(y) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(x, y) \tilde{f}(y) dv(y) = I_{\mathfrak{X}}(\tilde{f})(x) \end{aligned}$$

Dies soll nun der Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen sein.
Um die Selberg-Spurformel zu entwickeln, wird zunächst der linke Teil, also die Spur des Operators $I_{\mathfrak{M}}$ ausgerechnet und vereinfacht. Danach wird der rechte Teil, die Spur des Operators $I_{\mathfrak{X}}$ für Eigenfunktionen des Laplaceoperators entwickelt.

2.2 Die Spur von $I_{\mathfrak{M}}$

$I_{\mathfrak{M}}$ ist ein Spurklassenoperator. Die Spur des Operators $I_{\mathfrak{M}} : \mathcal{L}^2(\mathfrak{M}) \to \mathcal{L}^2(\mathfrak{M})$ gegeben durch

$$tr I_{\mathfrak{M}} = \int_{\mathfrak{M}} \mathcal{K}_{\mathfrak{M}}(x_{\mathfrak{M}}, x_{\mathfrak{M}}) dv(x_{\mathfrak{M}}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathfrak{F}} \mathcal{K}(d(x, \gamma x)) dv(x)$$

existiert.

$I_{\mathfrak{M}}$ soll nun mit Hilfe von Konjugationsklassen vereinfacht werden.
Wie im vorigen Kapitel bereits definiert, repräsentiere $\Pi \subset \Gamma$ die nicht trivialen Konjugationsklassen von Γ.
$[\gamma]$ bezeichne die zu $\gamma \in \Gamma$ assoziierte Konjugationsklasse und Γ_γ den Zentralisator von γ in Γ.

2.2.1 Korollar

Mit den oben genannten Definitionen eingesetzt in $trI_{\mathfrak{M}}$, wobei der Teil der Summe mit den trivialen Konjugationklassen extra betrachtet wird, folgt:

$$\begin{aligned}
trI_{\mathfrak{M}} &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\mathfrak{F}}\mathcal{K}(d(x,\gamma x))dv(x) \\
&= \int\limits_{\mathfrak{M}}\mathcal{K}(x,x)dv(x) + \sum_{\gamma\in\Pi}\sum_{\tau\in[\gamma]}\int_{\mathfrak{F}}\mathcal{K}(d(x,\tau x))dv(x) \\
&= vol(\mathfrak{M})\mathcal{K}(0) + \sum_{\gamma\in\Pi}\sum_{\eta\in\Gamma/\Gamma_\gamma}\int_{\mathfrak{F}}\mathcal{K}(d(x,\eta^{-1}\gamma\eta x))dv(x)
\end{aligned}$$

2.2.2 Definition

Der Einfachheit halber und um später darauf zurück zu kommen folgende Definition:

$$R(\gamma) := \sum_{\eta\in\Gamma/\Gamma_\gamma}\int_{\mathfrak{F}}\mathcal{K}(d(x,\eta^{-1}\gamma\eta x))dv(x)$$

2.2.3 Folgerung

Da $\Gamma_\gamma =< \gamma_0 >:= \{\gamma_0^k \,|\, k\in\mathbb{Z}\}$ und $\bigcup_{\eta\in\Gamma/\Gamma_\gamma}\eta(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{X}/\Gamma_\gamma) = \mathfrak{F}(\mathfrak{X}/ < \gamma_0 >)$ gilt folgt:

$$\begin{aligned}
R(\gamma) &= \sum_{\eta\in\Gamma/\Gamma_\gamma}\int_{\eta(\mathfrak{F})}\mathcal{K}(d(x,\gamma x))dv(x) \\
&= \int_{\mathfrak{F}(\mathfrak{X}/<\gamma_0>)}\mathcal{K}(d(x,\gamma x))dv(x)
\end{aligned}$$

2.3 Eigenschaften von $I_{\mathfrak{X}}$ und Folgerungen daraus

Im ersten Kapitel wurde bereits der Mittelwert-Operator definiert. Dieser kommutiert mit dem Laplace-Operator:

2.3.1 Satz

Für $f \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{X}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\Delta_y(\mathcal{M}_{d(x,y)}(f))(x) = \mathcal{M}_{d(x,y)}(\Delta f)(x)$$

Beweis: Wir erinnern an die Darstellung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten:

$$\Delta(f)(c_v(r)) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(c_v(r)) + m_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial r} f(c_v(r)) + \Delta_{S_r(x)}(f)(c_v(r))$$

wobei $\Delta_{S_r(x)}$ der Laplaceoperator der geodätischen Sphäre vom Radius r um x ist und c_v die Geodäte mit den Startbedingungen $v \in S_x\mathfrak{X}$, sowie $m_{S_r(x)}$ die mittlere Krümmung der geodätischen Sphäre um x mit Radius r.
Nun gilt aber für alle $y = c_v(r)$:

$$\Delta(\mathcal{M}_{d(x,y)} f)(c_v(r)) = \frac{\partial^2}{\partial^2} \mathcal{M}_r(f)(x) + m_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{M}_r(f)(x) + 0$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{d(x,y)}(\Delta f)(x) &= \mathcal{M}_r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(c_v(r)) + m_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial r} f(c_v(r)) + \Delta_{S_r(x)}(f)(c_v(r))\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{M}_r(f)(x) + m_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{M}_r(f)(x)
\end{aligned}$$

□

2.3.2 Korollar

Sei $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{X}, \mathbb{R})$ eine Eigenfunktion des Laplaceoperators zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\mathcal{M}_r(\varphi_\lambda)(x) = v_\lambda(r) \cdot \varphi_\lambda(x)$$

Dabei ist $v_\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $v_\lambda''(r) + m_{S_r(x)} v_\lambda' + \lambda v_\lambda(r) = 0$ mit den Anfangsbedingungen $v_\lambda(0) = 1$ und $v_\lambda'(0) = 0$.

2.3.3 Korollar

$I_{\mathfrak{X}}$ ist eine Funktion des Laplace-Operators.
Genauer: Sei $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{X}, \mathbb{R})$ eine Eigenfunktion von Δ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. So gilt:

$$I_{\mathfrak{X}}(\varphi_\lambda)(x) = \Lambda(\lambda)\varphi_\lambda(x)$$

Hierbei ist $\Lambda(\lambda) = \omega_{n-1} \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(r)\rho(r)v_\lambda(r)dr$ und $\varrho(r)$ die Dichte der Geodätischen Sphäre.

Beweis: Mit Hilfe der Polarkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{X}}(\varphi_\lambda)(x) &= \int\limits_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}(d(x,y))\varphi_\lambda(y)dv(y) \\ &= \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(r)\omega_{n-1}\rho(r)\mathcal{M}_r(\varphi_\lambda)(x)dr \\ &= \omega_{n-1}\int\limits_0^\infty \mathcal{K}(r)\rho(r)v_\lambda(r)dr \cdot \varphi_\lambda(x) \end{aligned}$$

□

Die Funktion $\Lambda(\lambda)$ kann mit Hilfe der ebenen Wellen vereinfacht werden.
Wie bereits festgestellt wurde, ist im vorliegenden Fall die ebene Welle
$y \mapsto e^{-(\frac{\mathfrak{h}}{2}+ir)b_x(y,\xi)}$ Eigenfunktion des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda = r^2 + \frac{\mathfrak{h}^2}{4}$.

2.3.4 Folgerung

Es gilt nun: $I_{\mathfrak{X}}(e^{-(\frac{\mathfrak{h}}{2}+ir)b_x(y,\xi)})(z) = \Lambda(r^2 + \frac{\mathfrak{h}^2}{4})e^{-(\frac{\mathfrak{h}}{2}+ir)b_x(z,\xi)}$.
Mit $z = x$ folgt: $e^{-(\frac{\mathfrak{h}}{2}+ir)b_x(x,\xi)} = 1$ also:

$$\begin{aligned} \Lambda(r^2 + \frac{\mathfrak{h}^2}{4}) &= I_{\mathfrak{X}}(e^{-(\frac{\mathfrak{h}}{2}+ir)b_x(y,\xi)})(x) \\ &= \int_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}(d(x,y))e^{-(\frac{\mathfrak{h}}{2}+ir)b_x(y,\xi)}dv(y) \end{aligned}$$

Statt der Polarkoordinaten ist es sinnvoller nun Horosphärische Koordinaten zu benutzen:

2.3.5 Folgerung

Seien $\mathfrak{H}_t := b_{x_0}(\cdot,\xi)^{-1}(t)$ die Horosphären, welche als die Niveaus der Busemannfunktionen $b_{x_0}(y,\xi)$ gegeben sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Lambda(r^2+\frac{\mathfrak{h}^2}{4}) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathfrak{H}_t}\mathcal{K}(d(x_0,y))e^{-\frac{\mathfrak{h}}{2}t}e^{-irt}d\mathfrak{H}_t(y)dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathfrak{H}_0}\mathcal{K}(d(x_0,c_x(t)))e^{\frac{\mathfrak{h}}{2}t}d\mathfrak{H}_0(x)e^{-irt}dt\end{aligned}$$

Dabei ist c_x die Geodäte mit $c_x(0)=x$ und $c_x(-\infty)=\xi$.
Benutzt wurde, dass für die Abbildung $\varphi^t:\mathfrak{H}_0\to\mathfrak{H}_t$ mit $\varphi^t(x)=c_x(t)$ die Jacobideterminante $e^{\mathfrak{h}t}$ ist.

2.3.6 Definition und Folgerung

Für den weiteren Verlauf sei definiert:

$$g(t) := \int\limits_{\mathfrak{H}_0}\mathcal{K}(d(x_0,c_x(t)))e^{\frac{\mathfrak{h}}{2}t}d\mathfrak{H}_0(x)$$

Nun folgt direkt, dass die Spektralfunktion die Fourier-Transformierte von $g(t)$ ist, also:

$$\hat{g}(r) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-irt}dt = \Lambda(r^2+\frac{h^2}{4})$$

2.3.7 Bemerkung:

- *Im nächsten Abschnitt wird versucht eine Beziehung zwischen $R(\gamma)$ in der Spurformel und g herzustellen.*

- *Da $\mathfrak{X}$ ein symmetrischer Raum mit negativer Krümmung ist, gibt es eine Isometrie α, so dass die Achse von $q = \alpha\gamma\alpha^{-1}$ gegeben ist durch c_{x_0}, wobei x_0 der oben gewählte Referenzpunkt ist.*

2.3.8 Folgerung

Sei $A = \{y \in \mathfrak{H}_t | 0 \leq t \leq l(\gamma_0)\}$ eine Fundamentalmenge von $q_0 = \alpha\gamma_0\alpha^{-1}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= \int_A \mathcal{K}(d(y, qy))dv(y) \\ &= \int_0^{l(\gamma_0)} \int_{\mathfrak{H}_t} \mathcal{K}(d(x, qx))d\mathfrak{H}_t(x)dt \end{aligned}$$

Da für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine mit q kommutierende Isometrie α_t existiert, so dass $\alpha_t(c_{x_0}(s)) = c_{x_0}(s+t)$, gilt $\alpha_t(\mathfrak{H}_0) = \mathfrak{H}_t$. Deshalb gilt:

$$R(\gamma) = l(\gamma_0) \int_{\mathfrak{H}_0} \mathcal{K}(d(x, qx))d\mathfrak{H}_0(x)$$

2.4 Horosphären als Bahnen von Untergruppen

In diesem Unterkapitel soll der direkte Zusammenhang zwischen

$$R(\gamma) = l(\gamma_0) \int_{\mathfrak{H}_0} \mathcal{K}(d(x, qx))d\mathfrak{H}_0(x)$$

und

$$g(l(\gamma)) := \int_{\mathfrak{H}_0} \mathcal{K}(d(x_0, c_x(l(\gamma))))d\mathfrak{H}_0(x)e^{\frac{\mathfrak{h}}{2}l(\gamma)}$$

herausgestellt werden. Dabei ist es möglich die Horosphären als Bahnen von Untergruppen der Isometriegruppe zu betrachten.

$\mathfrak{X}$ läßt sich darstellen als $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ (siehe Kapitel 1.1), wobei $\mathfrak{G}$ eine Liegruppe ist. Die *Iwasawa-Zerlegung* ist die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{KAN}$. Die Wirkung der

Gruppe $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$ beschreibt die Bahnen der Horosphären von $\mathfrak{X}$. Sei $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G} = Iso_e(\mathfrak{X})$ eine nilpotente Lie-Untergruppe der Zusammenhangskomponente von $Iso(\mathfrak{X})$, welche die Identität enthält.
So lässt sich $\mathfrak{H}_0$ darstellen als $\mathfrak{N}x_0 = \mathfrak{H}_0$.
$d\mathfrak{N}$ sei ein Haar-Maß auf $\mathfrak{N}$.

2.4.1 Korollar

Das Integral in $R(\gamma)$ läßt sich mit Hilfe von $\mathfrak{N}$ umformulieren zu:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathfrak{H}_0} \mathcal{K}(d(x,qx))d\mathfrak{H}_0(x) &= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(nx_0,qnx_0))d\mathfrak{N} \\ &= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0,n^{-1}qnx_0))d\mathfrak{N}\end{aligned}$$

2.4.2 Korollar

Ebenso läßt sich das Integral $g(l(\gamma))$ mit Hilfe von $\mathfrak{N}$ umformulieren zu:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathfrak{H}_0} \mathcal{K}(d(x_0,c_x(l(\gamma))))d\mathfrak{H}_0(x) &= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0,c_{nx_0}(l(\gamma))))d\mathfrak{N} \\ &= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0,nc_{x_0}(l(\gamma))))d\mathfrak{N} \\ &= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0,nq(x_0)))d\mathfrak{N}\end{aligned}$$

2.4.3 Korollar

Mit Hilfe der Substitution $\mathcal{F}_q : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ definiert durch
$\mathcal{F}_q(n) := n^{-1}qnq^{-1}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0, nq(x_0)))d\mathfrak{N} &= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0, \mathcal{F}_q(n)q(x_0)))|det\, \mathcal{F}_q(n)|d\mathfrak{N} \\
&= \int\limits_{\mathfrak{N}} \mathcal{K}(d(x_0, n^{-1}qnx_0))|det\, \mathcal{F}_q(n)|d\mathfrak{N}
\end{aligned}$$

Nun wird der Faktor $|det\mathcal{F}_\gamma(n)|$ betrachtet:

2.4.4 Lemma

$$det\, \mathcal{F}_\gamma(n) = det\, \mathcal{F}\gamma(e)$$

Bemerkung: *Es seien $R_n : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ mit $R_n(n') = n'n$ und $L_n : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ mit $L_n(n') = nn'$ die Rechts- bzw. Linksmultiplikation eines Elementes $n \in \mathfrak{N}$ an ein Element $n' \in \mathfrak{N}$. $Int_n : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ sei $Int_n(n') = nn'n^{-1}$.*

Beweis Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\gamma(n'n) &= (n'n)^{-1}\gamma n'n\gamma^{-1} = n^{-1}n'^{-1}\gamma n'n\gamma^{-1} \\
&= n^{-1}\mathcal{F}_\gamma(n')\gamma n\gamma^{-1} = n^{-1}\mathcal{F}_\gamma(n')n\mathcal{F}_\gamma(n)
\end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\gamma(R_n(n')) &= \mathcal{F}_\gamma(n'n) = n^{-1}n'^{-1}\gamma n'n\gamma^{-1} \\
&= n^{-1}n'^{-1}\gamma n'(\gamma\gamma^{-1})n\gamma^{-1} = n^{-1}n'^{-1}\gamma n'\gamma(nn^{-1})\gamma^{-1}n\gamma^{-1} \\
&= n^{-1}n'^{-1}\gamma n'(\gamma\gamma^{-1})n\gamma^{-1} = (n^{-1}(n'^{-1}\gamma n'\gamma)n)(n^{-1}\gamma^{-1}n\gamma^{-1}) \\
&= R_{\mathcal{F}_\gamma(n)}(Int_{n^{-1}}(F_\gamma(n')))
\end{aligned}$$

Sei $n' = e$ die Identität. Damit ist dies ein Diffeomorphismus:

$$n' = e \Leftrightarrow n^{-1}e\gamma e\gamma^{-1}nn^{-1}\gamma n\gamma_{-1} = n^{-1}\gamma n\gamma^{-1} = \mathcal{F}_\gamma(n)$$

Damit folgt dann:

$$D\mathcal{F}_\gamma(n) = DR_{\mathcal{F}_\gamma(n)} DInt_{n^{-1}} D\mathcal{F}_\gamma(e)$$

$$\Leftrightarrow det F_\gamma(n) = det \mathcal{F}_\gamma(e)$$

$\square$

2.4.5 Lemma

$$det\, \mathcal{F}(n) = det\, \mathcal{F}(e) = det(Ad(q) - id)$$

Beweis Sei $\xi \in T_e \mathfrak{N}$. So gilt:

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(e)(\xi) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{F}(exp(t\xi)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp(-t\xi) q\, exp(t\xi) q^{-1} = -\xi + Ad(q)(\xi) \end{aligned}$$

$\square$

2.4.6 Korollar

Somit besteht zwischen $R(\gamma)$ und $g(l(\gamma))$ folgende Beziehung:

$$R(\gamma) = l(\gamma_0) \cdot \frac{e^{-\frac{\mathfrak{h}}{2} l(\gamma)}}{det(Ad(q) - id)} g(l(\gamma))$$

2.5 Poincare-Abbildung von q

Sei $v_0 = \dot{c}_{x_0}(0)$ der Tangentialvektor der Achse q zum Zeitpunkt 0.
$W^u(v_0) := \{grad\, b_y(x, \eta) | x \in \mathfrak{H}_{-v}\}$ ist die unstabile Mannifaltigkeit durch v_0.
$W^s(-v_0) := \{-grad\, b_y(x, \xi) | x \in \mathfrak{H}_v\}$ ist die stabile Mannigfaltigkeit durch $-v_0$.
$\xi, \eta \in \mathfrak{X}$ sind dabei $\xi = c_v(+\infty)$ und $\eta = c_v(-\infty) = c_{-v}(\infty)$.
Beide Mannigfaltigkeiten können als N-Spur dargestellt werden, wobei N auf das Einheitstangentialbündel von $\mathfrak{X}$ wirkt.

Man betrachte jeweils die auf die unstabile bzw. die stabile Mannigfaltigkeit beschränkten Abbildungen

$$P^u : W^u(v_0) \to W^u(v_0) \qquad \text{gegeben durch} \qquad P^u(v) = q^{-1} \circ \varphi^l(v)$$

und

$$P^s : W^s(-v_0) \to W^s(-v_0) \qquad \text{gegeben durch} \qquad P^s(v) = q \circ \varphi^l(v)$$

Beide Abbildungen sind konjugiert zu den inneren Automorphismen von q^{-1} bzw. q eingeschränkt auf N.
Genauer:

2.5.1 Lemma

$T^u : \mathfrak{N} \to W^u(v_0)$ und $T^s : \mathfrak{N} \to W^s(-v_0)$ seien die $\mathfrak{N}$-Bahnen von v_0 bzw. $-v_0$.
Dann gilt:

$$P^u = T^u Int_{q^{-1}} T^{u-1} \qquad \text{und} \qquad P^s = T^s Int_q T^{s-1}$$

mit dem inneren Automorphismus

$$Int_q : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N} \qquad \text{gegeben durch} \qquad Int_q = qnq^{-1}$$

Beweis Wenn $T^u(v) = n$ so folgt wegen der Definition $nv_0 = v$. Da der geodätische Fluss ϕ^t mit der Wirkung von $\mathfrak{N}$ kommutiert gilt:

$$\begin{aligned} T^u Int_{q^{-1}} T^{u-1} &= T^u(q^{-1}nq) = q^{-1}nq(v_0) = q^{-1}n\phi^l(v_0) \\ &= q^{-1}\phi^l(n(v_0)) = q^{-1}\phi^l(v) \end{aligned}$$

bzw:

$$\begin{aligned} T^s Int_q T^{s-1} &= T^s(qnq^{-1}) = qnq^{-1}(v_0) = qn\phi^l(v_0) \\ &= q\phi^l(n(v_0)) = q\phi^l(v) \end{aligned}$$

□

Die linearisierte Poincare-Abbildung $P^u(v_0) : E^u(v_0) \to E^u(v_0)$ eingeschränkt auf den Tangentialraum
$E^u(v_0) = T_{v_0}(W^u(v_0) := \{(w, \nabla_w grad\, b_y(\pi(v_0), \eta))|w \perp v_0\}$ der unstabilen Mannigfaltigkeit $W^u(v_0)$ an v_0 ist konjugiert zu $Ad(q^{-1})$.
Genauso ist die linearisierte Poincare-Abbildung
$P^s(-v_0) : E^s(-v_0) \to E^u(-v_0)$ eingeschränkt auf den Tangentialraum
$E^s(-v_0) = T_{-v_0}(W^s(-v_0) := \{(w, - \nabla_w\, grad\, b_y(\pi(-v_0), \xi))|w \perp v_0\}$ der stabilen Mannigfaltigkeit $W^s(-v_0)$ an $-v_0$ ist konjugiert zu $Ad(q)$.

2.5.2 Korollar

Angenommen $\gamma \in \Gamma$ ist konjugiert zu q. c sei die Achse zu γ mit $\dot{c}(0) = v$ und die linearisierte Poincare-Abbildung zu γ sei

$$P_\gamma : E^s(v) \oplus E^u(v) \to E^s(v) \oplus E^u(v)$$

Dann gilt:

$$|det(id - P_\gamma)| = det(Ad(q) - id)^2 e^{\mathfrak{h}l}$$

Beweis Da γ konjugiert zu q gilt: $det(id - P_\gamma) = det(id - P_q)$.
Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} |det(id - P_q)| &= |det(id - P_q^u)||det(id - P_q^s)| \\ &= |det(Ad(q^{-1}) - id)det(Ad(q) - id)| \\ &= det(Ad(q^{-1}))det(Ad(q) - id)^2 \\ &= e^{\mathfrak{h}l} det(Ad(q) - id)^2 \end{aligned}$$

□

2.6 Die Selberg-Spurformel

Zusammenfassend kann man die Selberg-Spurformel wie folgt formulieren:

2.6.1 Satz

Sei $\mathfrak{X}$ ein symmetrischer Raum mit negativer Krümmung.
$\Gamma \subseteq Iso(\mathfrak{X})$ sei eine eigentlich, diskontinuierlich und kompakt auf $\mathfrak{X}$ wirkende Gruppe, so daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}/\Gamma$ kompakt ist.
$\mathcal{K} : [0, \infty)$ sei eine Funktion mit kompaktem Träger und geeignetem Konvergenzverhalten.
$I_{\mathfrak{M}} : \mathcal{L}^2(\mathfrak{M}) \to \mathcal{L}^2(\mathfrak{M})$ sei der assoziierte Integraloperator.
Wenn $spec(\Delta) = \{0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots\}$ das Spektrum des Laplace-Operators bezeichnet und $r_i = \sqrt{\lambda_i - \frac{\mathfrak{h}^2}{4}}$, so gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}(r_i) = tr I_{\mathfrak{M}} = vol(\mathfrak{M})\mathcal{K}(0) + \sum_{\gamma \in \Pi} \frac{l(\gamma_0)}{\sqrt{|det(id - P_\gamma)|}} g(l(\gamma))$$

Dabei ist $g(t) = \int\limits_{\mathfrak{H}_0} \mathcal{K}(d(x_0, c_x(t)) e^{\frac{\mathfrak{h}}{2}t} d\mathfrak{H}_0(x)$, $\mathfrak{h}$ die mittlere Krümmung der Horosphäre und $\hat{g}$ die Fouriertransformierte von g.

3 Anwendung der Spurformel

Mit Hilfe der Spurformel kann man Aussagen über das Längenspektrum $\{l_i\}_{i\geq 0}$ von $\mathfrak{M}$ machen. Dies soll nun mit Hilfe des Wärmeleitoperators $e^{-t\Delta_{\mathfrak{M}}}$ getan werden.
Die Spurformel wurde für Integraloperatoren mit kompaktem Träger hergeleitet. Sie gilt jedoch auch für Kerne mit genügend starkem Abfall. Der Wärmeleitoperator erfüllt diese Bedingung. Im vorliegenden Fall ist der Wärmeleitkern nur von der Distanz zwischen zwei Punkten abhängig.
Für die Spur des Wärmeleitoperators gilt:

$$tr\, e^{-t\Delta_{\mathfrak{M}}} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-t\lambda_j}$$

mit λ_j Eigenwert des Laplace-Operators.
h_t bezeichne den Wärmeleitkern, den man für $\mathcal{K}$ in $g(\tau)$ bzw. $\hat{g}(r)$ einsetzt. Man erhält: $g_{h_t}(\tau) = \int_{\mathfrak{H}_0} h_t(d(x_0, c_x(\tau)))e^{\frac{\mathfrak{h}}{2}\tau} d\mathfrak{H}_0$ und für die Fouriertranformierte $\hat{g}_{h_t}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{h_t}(\tau)e^{-ir\tau}d\tau$, welche in diesem Kapitel berechnet werden sollen.

Zunächst sein $\mathfrak{X}$ weiterhin ein symmetrischer Raum mit negativer Krümmung und Rang 1. Später werden im speziellen die reellhyperbolischen Räume $\mathbb{R}H^n$ und besonders $\mathbb{R}H^2$ und $\mathbb{R}H^3$ betrachtet.

3.1 Berechnung von g_{h_t}

3.1.1 Definition

Sei Δ der Laplace-Operator auf $\mathfrak{X}$. Sei $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta_x u(x,t)$ die *Wärmeleitgleichung.*
Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ ist eine Lösung gegeben durch:

$$u(x,t) = e^{-t\Delta} f(x) = \int_{\mathfrak{M}} h_t(x,y)f(y)dv(y)$$

Dabei bezeichnet $h_t(x,y) =: h_t(r)$ den Wärmeleitkern mit $r = d(x,y)$.

3.1.2 Korollar

Wie in 2.3.6 definiert gilt:

$$\hat{g}_{h_t}(r) = \Lambda_{h_t}(\lambda) = e^{-t\lambda}$$

wobei $\lambda = r^2 + \frac{\mathfrak{h}^2}{4}$ Eigenwert ist. Somit ist $r = (\lambda - \frac{\mathfrak{h}^2}{4})^{\frac{1}{2}}$ und $r^2 = \lambda - \frac{\mathfrak{h}^2}{4}$. Damit folgt:

$$\hat{g}_{h_t}(r) = e^{-t\lambda} = e^{-tr^2} e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}$$

3.1.3 Satz

Mit Hilfe der inversen *Fourier-Tranformation* lässt sich g_{h_t} berechnen und es gilt:

$$g_{h_t}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_{h_t}(s) e^{is\tau} ds = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

Beweis Es gilt:

$$g_{h_t}(\tau) \quad = \quad \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts^2} e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}} e^{is\tau} ds = \frac{1}{4\pi} e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts^2} e^{is\tau} ds$$

Da h_t nur für $t \in (0, \infty)$ existiert, kann oBdA $t > 0$ angenommen werden. Man betrachte die Ableitung von $g_{h_t}(\tau)$ nach der Variablen τ:

$$\frac{dg_{h_t}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{4\pi} e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} is\, e^{-ts^2} e^{is\tau} ds$$

Nun wird die Funktion unter dem Integral nach der Variablen s abgeleitet und man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} e^{-ts^2+i\tau s} &= (-2ts + i\tau) e^{-ts^2+i\tau s} = 2it \cdot (is + \frac{\tau}{2t}) e^{-ts^2+i\tau s} \\ \Leftrightarrow \; is\, e^{-ts^2+i\tau s} &= \frac{1}{2it} \cdot \frac{d}{ds} e^{-ts^2+i\tau s} - \frac{\tau}{2t} e^{-ts^2+i\tau s} \end{aligned}$$

Setzt man dies nun ein in $\frac{dg_{h_t}(\tau)}{d\tau}$, erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{dg_{h_t}(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2it}\cdot\frac{d}{ds}e^{-ts^2+i\tau s}-\frac{\tau}{2t}e^{-ts^2+i\tau s}\right)ds \\
&= \frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2it}\cdot\frac{d}{ds}e^{-ts^2+i\tau s}ds-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau}{2t}e^{-ts^2+i\tau s}ds\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\underbrace{\left[\frac{1}{2it}\cdot e^{-ts^2+i\tau s}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0}-\frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\frac{\tau}{2t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ts^2+i\tau s}ds \\
&= -\frac{\tau}{2t}\cdot\frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ts^2+i\tau s}=-\frac{\tau}{2t}\,g_{h_t}(\tau)
\end{aligned}$$

Nun trennt man die Gleichung nach den Variablen und integriert:

$$\Rightarrow \frac{dg_{h_t}(\tau)}{g_{h_t}(\tau)}=-\frac{\tau}{2t}d\tau \;\Rightarrow\; \log(g_{h_t}(\tau))=-\frac{\tau^2}{4t}+k$$

Diese Gleichung löst man nach $g_{h_t}(\tau)$ auf.

$$g_{h_t}(\tau)=e^{\log(g_{h_t}(\tau))}=e^k\cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}}=C\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

Dabei ist k eine Konstante. Es gilt nun aber:
$C=g_{h_t}(\tau=0)=\frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ts^2}ds=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot\frac{1}{4\pi}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}$
und somit folgt:

$$g_{h_t}(\tau)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

□

3.1.4 Korollar

Unter Verwendung des Wärmeleitkerns h_t erhält man die Spurformel:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\hat{g}_{h_t}(r_i)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{-t\lambda_i}=vol(\mathfrak{M})h_t(0)+\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-t\frac{\mathfrak{h}^2}{4}}\sum_{\gamma\in\Pi}\frac{l(\gamma_0)}{\sqrt{|det(id-P_\gamma)|}}e^{-\frac{l(\gamma)^2}{4t}}$$

3.2 Berechnung des Längenspektrums von $\mathfrak{M}$

3.2.1 Definition

In jeder freien Homotopieklasse c_i von geschlossenen Kurven in $\mathfrak{M}$ gibt es eine einfach-geschlossene Geodäte, deren Länge minimal ist unter den Kurven in dieser Homotopieklasse. Diese Länge wird mit $l(c_i) =: l_i$ bezeichnet. Die Folge $\{l_i\}_{i\geq 1}$ wird das *Längenspektrum von* $\mathfrak{M}$ genannt. Dabei seien die einzelnen Längen in aufsteigender Reihenfolge sortiert, also es gilt $l_1 < l_2 < l_3 \ldots$.

3.2.2 Satz

Sei $\mathfrak{X}$ ein symmetrischer Raum mit negativer Krümmung und Rang 1.
$\mathfrak{M} = \mathfrak{X}/\Gamma$ sei eine kompakte Manigfaltigkeit.
Das Laplace-Spektrum bestimmt das Längenspektrum $\{l_i\}_{i\geq 1}$ von $\mathfrak{M}$.

Beweis Aus der Selberg-Spurformel kennen wir die Funktion

$$f_1(t) := \sum_{c\in\mathcal{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(c)}{\sqrt{|det(id - P_{\gamma_{nc}})|}} \, e^{-\frac{n^2 l(c)^2}{4t}},$$

wobei $\mathcal{P}$ die Menge der einfach-geschlossenen Geodäten in $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Sei nun $l_1 = l(c_1)$ die Länge der kürzesten periodischen Geodäten in $\mathfrak{M}$. Dann gilt:

$$\lim_{t\to 0} f_1(t) \cdot e^{\frac{a^2}{4t}} = \begin{cases} \infty & a > l(c_1) \\ m(l(c_1)) \frac{l(c_1)}{\sqrt{|det(id - P_{\gamma_{c_1}})|}} & a = l(c_1) \end{cases}$$

Hier bezeichnet $m(l(c_1))$ die Multiplizität von $l(c_1)$, also die Anzahl der periodischen Bahnen mit der Länge $l(c_1)$. Man nähert sich also der Länge der Geodäten sukzessive von unten an. Man definiere nun:

$$f_2(t) := f_1(t) - \sum_{n=1}^{\infty} m(l(c_1)) \frac{l(c_1)}{\sqrt{|det(id - P_{\gamma_{nc_1}})|}} \cdot e^{-\frac{n^2 l(c_1)^2}{4t}}$$

Wendet man obigen Algorithmus auf f_2 an, so erhält man die Länge der zweitkürzesten Geodäten. Durch wiederholtes Anwenden erhält man das Längenspektrum $\{l_i\}_{i\geq 1}$ von $\mathfrak{M}$.

□

3.3 Der Wärmeleitkern auf $\mathbb{R}H^n$

Als Beispiel betrachten wir nun den n-dimensionalen reellen hyperbolischen Raum $\mathbb{R}H^n$.

3.3.1 Satz

Der Wärmeleitkern $h_t(r)$ auf dem hyperbolischen Raum $\mathbb{R}H^n$ ist gegeben durch:

- Für n ungerade ($n = 2m+1$, $m \geq 1$):

  $$h_t(r) = k_u t^{-\frac{1}{2}} e^{-(\frac{n-1}{2})^2 t} (-\frac{1}{\sinh r}\frac{\partial}{\partial r})^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

  mit $k_u = 2^{-\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}$.

- Für n gerade ($n = 2m$, $m \geq 1$):

  $$h_t(r) = k_g t^{-\frac{1}{2}} e^{-(\frac{n-1}{2})^2 t} \int_r^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} (-\frac{1}{\partial s})(-\frac{1}{\sinh s}\frac{\partial}{\partial s})^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s^2}{4t}}$$

  mit $k_g = 2^{-\frac{n+1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}}$.

Bemerkung *Für einen Beweis sei auf [GrN] verwiesen.*

3.3.2 Korollar

Für $n = 2$ und $n = 3$ ergeben sich somit folgende Wärmeleitkerne:

- $n = 2 : h_t(r) = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{t}{4}}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_r^{+\infty} \frac{s e^{-\frac{s^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}} ds$

- $n = 3 : h_t(r) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{r}{\sinh r} e^{-t-\frac{r^2}{4t}}$

3.3.3 Die Spurformeln für $\mathbb{R}H^2$ und $\mathbb{R}H^3$

- Sei $\mathfrak{X} = \mathbb{R}H^2$ die Poincare-Scheibe mit konstanter Krümmung -1. Damit gilt für die Horosphären $\mathfrak{h} = 1$. Der Wärmeleitkern an der Stelle $r = 0$ lautet:

$$h_t(0) = \frac{\sqrt{2}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{1}{4}t} \int_0^\infty \frac{s e^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s - \cosh 0)^{\frac{1}{2}}} ds$$

  Die Spurformel für diesen Fall lautet:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}_{h_t}(r_i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} = vol(\mathfrak{M}) \frac{\sqrt{2}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{1}{4}t} \int_0^\infty \frac{s e^{-\frac{s^2}{4t}}}{(\cosh s - \cosh 0)^{\frac{1}{2}}} ds$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} e^{-t\frac{1}{4}} \sum_{\gamma \in \Pi} \frac{l(\gamma_0)}{\sqrt{|det(id - P_\gamma)|}} e^{-\frac{l(\gamma)^2}{4t}}$$

- Sei $\mathfrak{X} = \mathbb{R}H^3$ mit konstanter Krümmung -1. Damit gilt für die Horosphären $\mathfrak{h} = 2$. Der Wärmeleitkern an der Stelle $r = 0$ lautet:

$$h_t(1) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-t-\frac{1}{4t}}$$

  Die Spurformel für diesen Fall lautet:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}_{h_t}(r_i) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i} = vol(\mathfrak{M}) \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-t-\frac{1}{4t}}$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} e^{-t} \sum_{\gamma \in \Pi} \frac{l(\gamma_0)}{\sqrt{|det(id - P_\gamma)|}} e^{-\frac{l(\gamma)^2}{4t}}$$

Literatur

[AnO] J.-P. Anker und P. Ostellari, *The Heat Kernel on Noncompact Symmetric Spaces*, www.univ-orleans.fr/SCIENCES/MAPMO/publications/ mapmo2003/mapmo0302.ps .

[Bus] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Progress in Mathematics, Volume 106, Birkhäuser, LNM 548.

[Cha] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press 1984.

[Ebe] P. B. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics.

[EON] P. B. Eberlein und B. O'Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific Journal of Mathematics 46, 1973, 45-109.

[GrN] A. Grigor'yan und M. Noguchi, *The Heat Kernel on Hyperbolic Space*, Bulletin of the London Mathematical Society 1998 30(6), 643-650.

[Hej] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for* $PSL(2,\mathbb{R})$*, Volume 1*, Springer-Verlag, LNM 548

[Hel] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press

[HiH] E. Heintze und H.-C. im Hof, *Geometry of Horospheres*, Journal of Differential Geometry, Vol 12 (1977), 481-491.

[Kni] G. Knieper, *Trace Formula and Eigenfunctions*, preprint.

[KnP] G. Knieper und N. Peyerimhoff, *The Selberg Trace Formula*, preprint.

[Usz] G. Uszczapowski, *Fourier-Transformation, Fourier-Integral*, Demmig-Verlag (1985)

Urheberschaftserklärung:

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und außer den oben angegebenen Quellen keine weiteren benutzt habe. Ich versichere ferner, alle Zitate als solche kenntlich gemacht zu haben.