Mathematisches Institut der Universität Basel
Vorlesung Infinitesimalrechnung I (WS 99/00)

PD Dr. Jörg Winkelmann

Aufgabenblatt 9

Abgabetermin: 7. Januar 2000

1. Sei $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ Bestimme $\lim a_n$.

2. Zeige: Es gibt Folgen a_n, b_n, A_n, B_n, α_n, β_n in $\mathbb{R}$ mit $\lim a_n = \lim A_n = \lim \alpha_n = +\infty$ und $\lim b_n = \lim B_n = \lim \beta_n = 0$, sodass
   - $\lim(a_n b_n) = +\infty$
   - $\lim(A_n B_n) = 42$
   - $\lim(\alpha_n \beta_n) = 23$

3. Zeige:
   (a) Sei z_n eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$. Dann gilt $\lim \overline{z_n} = \bar{z}$.
   (b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.
   (c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|e^{ix}| = 1$.

4. Die Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right)$$

und

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(z) - \exp(-z)\right).$$

Zeige: Es gilt:

$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

und

$$(\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

5. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = |\phi(x + \frac{1}{2}) - x|$.

   Welche der Abbildungen ϕ und g sind stetig?

(∗) 6. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie in Aufgabe 5. Sei α eine irrationale reelle Zahl. Zeige:

   Jede Zahl im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ ist Häufungspunkt der Folge $a_n = n\alpha - \phi(n\alpha)$

(∗) 7. Sei K ein endlicher Körper.

   Zeige:

$$(1+1) \cdot \left(\sum_{x \in K} x \right) = 0$$

W1. Zeige: Für $x \geq 0$, $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2$$

W2. Zeige: Für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

W3. Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\frac{n}{3} \right)^n \leq \frac{1}{3} n!$$

W4. Zeige: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

W5 Für $k, n \in \mathbb{N}$ leite man eine Formel her, die angibt, wieviele injektive Abbildungen von einer Menge mit k Elementen in eine Menge mit n Elementen existieren.

Die Aufgaben W1-W5 sind "Weihnachts-" oder "Wiederholungsaufgaben". Sie werden wie (∗)-Aufgaben gewertet, sind aber einfacher. Dadurch soll es ermöglicht werden, eventuelle Punkterückstande aufzuarbeiten. Mindestpunktzahl für dieses Aufgabenblatt ist also $10 = \frac{2}{3}(3 \cdot 5)$.