Differenzengleichungen, Z - Transformation

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Transformation, die *Z-Transformation* behandeln. Mit Hilfe der Z-Transformation können lineare Differenzengleichungen (DFG) gelöst werden.

Differenzengleichungen (DFG)

Motivation

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$y' = y \quad , \quad y(0) = 1 \; .$

Die (eindeutige) Lösung dieser AWA lautet: $y(t) = \mathrm{e}^t$.

Diskretisierung

Wir führen für diese AWA eine *Diskretisierung* durch, dh.: Ausgehend vom Startpunkt $t_0 = 0$ betrachten wir die Lösungsfunktion $y(t)$ dieser AWA an den Zeitpunkten $t_n = nh$ (hierbei ist h die Schrittweite). Es gilt $t_{n+1} = t_n + h$. Für $y(t_n)$ schreiben wir kurz $y_n = y(t_n)$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten der *Diskretisierung*:

1. Möglichkeit

Ersetzen wir die Ableitung $y'(t_n)$ durch den Differenzenquotienten $y'(t_n) \approx \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$, so erhalten wir (nach Multiplikation mit h) anstelle der AWA die folgende Differenzengleichung (DFG)

$y_{n+1} - y_n = hy_n \quad , \quad y_0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_{n+1} - (1+h)y_n = 0 \quad , \quad y_0 = 1 \; .$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf $\lambda^{n+1} - (1+h)\lambda^n = 0$

$\Rightarrow \qquad \lambda^n(\lambda - (1+h)) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 1 + h$

$\Rightarrow \qquad y_n = c(1+h)^n \quad , \; (c \in \mathbb{R})$, ist die allgemeine Lösung der DFG.

Mit der Anfangsbedingung $y_0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = c(1+h)^0 = c = 1$. Also gilt

$y_n = (1+h)^n \quad , \; (n \geq 0)$, ist die (eindeutige) Lösung der gegebenen DFG.

Es gilt für $t = nh$

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}(1+h)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{t/h} = \big(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\big)^t = \big(\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\big)^t = \mathrm{e}^t$$

$\Rightarrow \qquad \lim\limits_{h\to 0} y_n = y(t) \; .$

2. Möglichkeit

Integrieren wir die gegebene DGL $y' = y$ von t_n bis t_{n+1} , so erhalten wir

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\ dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)\ dt \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)\ dt\ .$$

Nähern wir das Integral auf der rechten Seite mit Hilfe der *Trapez-Formel* an, so erhalten wir die folgende DFG

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1})\ ,\ y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad (1-h/2)y_{n+1} - (1+h/2)y_n = 0\ ,\ y_0 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+1} - \frac{1+h/2}{1-h/2}\, y_n = 0\ ,\ y_0 = 1\ .$$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf $\lambda^{n+1} - \dfrac{1+h/2}{1-h/2}\,\lambda^n = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n(\lambda - \frac{1+h/2}{1-h/2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1+h/2}{1-h/2}$$

$\Rightarrow \quad y_n = c\Big(\dfrac{1+h/2}{1-h/2}\Big)^n\ ,\ (c \in I\!R)$, ist die allgemeine Lösung der DFG.

Mit der Anfangsbedingung $y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = c = 1 \quad \Rightarrow \quad y_n = \Big(\dfrac{1+h/2}{1-h/2}\Big)^n$ ist die (eindeutige) Lösung der gegebenen DFG.

Auch hier gilt für $t = nh$

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\Big(\frac{1+h/2}{1-h/2}\Big)^n = \Big(\lim_{h\to 0}\Big(\frac{1+h/2}{1-h/2}\Big)^{1/h}\Big)^t = \mathrm{e}^t = y(t)\ .$$

Wir behandeln nun lineare Differenzengleichungen.

Definition : *Lineare Differenzengleichung $k-$ter Ordnung*

$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n \quad ,\ (a_i\ ,\ f_n \in I\!R)$,
heißt *lineare Differenzengleichung $k-$ter Ordnung (DFG)*.
Ist $f_n = 0\ \ \forall n \in I\!N_0$, so heißt die DFG *homogen*, sonst *inhomogen*.

Wie bei linearen DGL gilt auch bei linearen DFG:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DFG setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DFG und einer partikulären Lösung der inhomogenen DFG.

Die allgemeine Lösung der homogenen DFG $k-$ter Ordnung ist eine Linearkombination aus k linear unabhängigen Lösungen der homogenen DFG.

Wir betrachten zunächst linear *homogene* DFG.

Linear homogene DFG 1. Ordnung

Gegeben: $y_{n+1} + a y_n = 0$.

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf $\lambda^{n+1} + a\lambda^n = \lambda^n(\lambda + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -a$. Also gilt

$y_n = c(-a)^n \;,\; (c \in I\!R)$, ist die allgemeine Lösung der gegebenen linear homogenen DFG 1. Ordnung.

Beispiel

$y_{n+1} - 3y_n = 0 \quad \Rightarrow \quad y_n = c\,3^n \;,\; (c \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung.

Linear homogene DFG 2. Ordnung

Gegeben: $y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0$.

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf $\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \quad \Rightarrow$
$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (charakteristisches Polynom).

1. Fall $p(\lambda)$ hat *2 verschiedene reelle Nullstellen* λ_1 und $\lambda_2 \quad \Rightarrow$

$y_n = c_1{\lambda_1}^n + c_2{\lambda_2}^n \;,\; (c_i \in I\!R)$, ist die allgemeine Lösung der gegebenen linear homogenen DFG 2. Ordnung.

2. Fall $p(\lambda)$ hat *2 komplexe Nullstellen* λ_1 und $\overline{\lambda}_1 \quad \Rightarrow$

$y_n = c_1{\lambda_1}^n + c_2{\overline{\lambda}_1}^n \;,\; (c_i \in I\!R)$, ist die allgemeine *komplexe* Lösung der gegebenen linear homogenen DFG 2. Ordnung. Da die DFG linear ist und die Koeffizienten reell sind, gilt hier (wie bei linearen DGL), daß mit einer *komplexen* Lösung sowohl Realteil als auch Imaginärteil *reelle* Lösungen sind.
Mit $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\varphi}$ gilt ${\lambda_1}^n = |\lambda_1|^n e^{in\varphi} \quad \Rightarrow$
$Re({\lambda_1}^n) = |\lambda_1|^n \cos(n\varphi) \;,\; Im({\lambda_1}^n) = |\lambda_1|^n \sin(n\varphi) \quad \Rightarrow$

$y_n = c_1|\lambda_1|^n \cos(n\varphi) + c_2|\lambda_1|^n \sin(n\varphi) \;,\; (c_i \in I\!R)$, ist die allgemeine *reelle* Lösung der gegebenen linear homogenen DFG 2. Ordnung.

3. Fall $p(\lambda)$ hat *eine doppelte reelle Nullstellen* $\lambda_1 \quad \Rightarrow$

$y_n = c_1{\lambda_1}^n + c_2 n{\lambda_1}^n \;,\; (c_i \in I\!R)$, ist die allgemeine Lösung der gegebenen linear homogenen DFG 2. Ordnung.

Denn: $y_n = n{\lambda_1}^n$ ist auch Lösung der homogenen DFG, falls λ_1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Beweis Da λ_1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, gilt $p(\lambda_1) = \lambda_1^2 + a\lambda_1 + b = 0 \;,\; p'(\lambda_1) = 2\lambda_1 + a = 0$. Setzen wir $y_n = n{\lambda_1}^n$ in die DFG ein, so erhalten wir

$(n+2)\lambda_1^{n+2} + a(n+1)\lambda_1^{n+1} + bn{\lambda_1}^n = {\lambda_1}^n(n(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + \lambda_1(2\lambda_1 + a))$
$= {\lambda_1}^n(np(\lambda_1) + \lambda_1 p'(\lambda_1)) = 0$.

Beispiele

1. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$

   Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow$

   $y_n = c_1 1^n + c_2 2^n \quad , \ (c_i \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung.

2. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$

   Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \quad \Rightarrow$

   $y_n = c_1 \sqrt{2}^{\,n} \cos(n\pi/4) + c_2 \sqrt{2}^{\,n} \sin(n\pi/4) \quad , \ (c_i \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung.

3. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$

   Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$
   $\Rightarrow \quad \lambda_1 = 2$ (doppelte Nullstelle) $\Rightarrow$

   $y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n \quad , \ (c_i \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung.

Allgemeine linear homogene Differenzengleichung $k-$ter Ordnung

$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad , \quad (a_i \in I\!R).$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf
$\lambda^n(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0) = \lambda^n p(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow$
$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ (charakteristisches Polynom).

Es gilt: Ist λ_1 eine $r-$fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind die folgenden Folgen linear unabhängige Lösungen der homogenen DFG:
${\lambda_1}^n$, $n\,{\lambda_1}^n$, $n^2{\lambda_1}^n$, ... , $n^{r-1}{\lambda_1}^n$.

Beweis per Induktion (Induktionsanfang siehe DFG 2. Ordnung, 3.Fall).

Damit erhält man auch im allgemeinen Fall einer DFG $k-$ter Ordnung mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms k linear unabhängige Lösungen der homogenen DFG. Die allgemeine Lösung ist dann Linearkombination aus diesen Fundamentallösungen.

Bestimmung einer partikulären Lösung einer inhomogenen DFG

Ist die rechte Seite von der Form $f_n = n^l d^n$, $(d \in \mathbb{C}\ ,\ l \in \mathbb{N}_0)$, so erhält man eine partikuläre Lösung mit Hilfe des folgenden Ansatzes

$$\boxed{y_n = n^r q_l(n) d^n}$$

Hierbei ist $q_l(n) = a_0 + a_1 n + \ldots + a_l n^l$ ein Polynom vom grad $= l$. Für r gilt:

$r = 0$, falls d keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (keine Resonanz),
$r > 0$, falls d $r-$fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ($r-$fache Resonanz).

Beispiele

1 $\quad y_{n+1} - 3y_n = n2^n$

Homogen: $p(\lambda) = \lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad y_n = c3^n$, $(c \in \mathbb{R})$, ist allgemeine Lösung der homogenen DFG.

Partikulär: Ansatz $y_n = (a + bn)2^n$, (keine Resonanz) $\Rightarrow$
$(a + b(n+1))2^{n+1} - 3(a + bn)2^n = 2^n(2a + 2bn + 2b - 3a - 3bn)$
$= 2^n((2b - a) + (-b)n) = n2^n \quad \Rightarrow \quad b = -1$, $a = 2b = -2 \quad \Rightarrow$
$y_n = -(2 + n)2^n$ ist partikuläre Lösung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen DFG
$y_n = c3^n - (2 + n)2^n$, $(c \in \mathbb{R})$.

Ist der Anfangswert y_0 gegeben, so erhält man $y_0 = c - 2 \quad \Rightarrow \quad c = y_0 + 2 \quad \Rightarrow$
$y_n = (y_0 + 2)3^n - (2 + n)2^n$, $(n \geq 0)$, ist die Lösung mit dem Anfangswert y_0 .

2 $\quad y_{n+1} - 2y_n = n2^n$

Homogen: $p(\lambda) = \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad y_n = c2^n$, $(c \in \mathbb{R})$, ist allgemeine Lösung der homogenen DFG.

Partikulär: Ansatz $y_n = n(a + bn)2^n$, (einfache Resonanz) $\Rightarrow$
$(a(n+1) + b(n+1)^2)2^{n+1} - 2(an + bn^2)2^n = 2^n(2an + 2a + 2bn^2 + 4bn + 2b - 2an - 2bn^2)$
$= 2^n((2a + 2b) + 4bn) = n2^n \quad \Rightarrow \quad b = 1/4$, $a = -b = -1/4 \quad \Rightarrow$
$y_n = (n^2 - n)2^{n-2}$ ist partikuläre Lösung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen DFG
$y_n = c2^n + (n^2 - n)2^{n-2}$, $(c \in \mathbb{R})$.

Ist der Anfangswert y_0 gegeben, so erhält man $y_0 = c \quad \Rightarrow \quad c = y_0 \quad \Rightarrow$
$y_n = y_0 2^n + (n^2 - n)2^{n-2}$, $(n \geq 0)$, ist die Lösung mit dem Anfangswert y_0 .

3. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^n$

Homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow$

$y_n = c_1 1^n + c_2 2^n$, $(c_i \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung der homogenen DFG.

Partikulär: Ansatz $y_n = an2^n$, (einfache Resonanz) $\Rightarrow$
$a(n+2)2^{n+2} - 3a(n+1)2^{n+1} + 2an2^n = 2^n(4an + 8a - 6an - 6a + 2an)$
$= 2^n(2a) = 2^n \quad \Rightarrow \quad a = 1/2 \quad \Rightarrow$
$y_n = n2^{n-1}$ ist partikuläre Lösung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen DFG
$y_n = c_1 + c_2 2^n + n2^{n-1}$, $(c_i \in I\!R)$.

Sind die Anfangswerte y_0 und y_1 gegeben, so erhält man
$y_0 = c_1 + c_2$, $y_1 = c_1 + 2c_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2y_0 - y_1 + 1$, $c_2 = y_1 - y_0 - 1 \quad \Rightarrow$
$y_n = (2y_0 - y_1 + 1) + (y_1 - y_0 - 1)2^n + n2^{n-1}$, $(n \geq 0)$, ist die Lösung mit den Anfangswerten y_0 und y_1 .

4. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 2^n$

Homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm i\pi/4} \quad \Rightarrow$

$y_n = c_1\sqrt{2}^{\,n}\cos(n\pi/4) + c_2\sqrt{2}^{\,n}\sin(n\pi/4)$, $(c_i \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung der homogenen DFG.

Partikulär: Ansatz $y_n = a2^n$, (keine Resonanz) $\Rightarrow$
$a2^{n+2} - 2a2^{n+1} + 2a2^n = 2^n(4a - 4a + 2a) = 2^n(2a) = 2^n \quad \Rightarrow \quad a = 1/2 \quad \Rightarrow$
$y_n = 2^{n-1}$ ist partikuläre Lösung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen DFG
$y_n = c_1\sqrt{2}^{\,n}\cos(n\pi/4) + c_2\sqrt{2}^{\,n}\sin(n\pi/4) + 2^{n-1}$, $(c_i \in I\!R)$.

Sind die Anfangswerte $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ gegeben, so erhält man
$y_0 = c_1 + 1/2 = 0$, $y_1 = c_1 + c_2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1/2$, $c_2 = -c_1 = 1/2 \quad \Rightarrow$
$y_n = \sqrt{2}^{\,n-2}(\sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/4)) + 2^{n-1}$, $(n \geq 0)$, ist die Lösung mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$.

5. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$

Homogen: $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$
$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 2$ (doppelte Nullstelle) $\Rightarrow$

$y_n = c_1 2^n + c_2 n2^n$, $(c_i \in I\!R)$, ist allgemeine Lösung der homogenen DFG.

Partikulär: Ansatz $y_n = an^2 2^n$, (doppelte Resonanz) $\Rightarrow$
$a(n+2)^2 2^{n+2} - 4a(n+1)^2 2^{n+1} + 4an^2 2^n$
$= 2^n(4an^2 + 16an + 16a - 8an^2 - 16an - 8a + 4an^2) = 2^n(8a) = 2^n \quad \Rightarrow \quad a = 1/8 \quad \Rightarrow$
$y_n = n^2 2^{n-3}$ ist partikuläre Lösung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen DFG
$y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n^2 2^{n-3}$, $(c_i \in \mathbb{R})$.

Sind die Anfangswerte $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ gegeben, so erhält man
$y_0 = c_1 = 0$, $y_1 = 2c_1 + 2c_2 + 1/4 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$, $c_2 = 3/8 \quad \Rightarrow$
$y_n = (3n + n^2)2^{n-3}$, $(n \geq 0)$, ist die Lösung mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$.

Eine andere Möglichkeit, lineare DFG zu lösen, bietet die *Z-Transformation*, die wir im folgenden Abschnitt behandeln werden.

Definition : *Z-Transformation*
Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$\boxed{F(f_n)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}}$$

die *Z-Transformation* der Folge (f_n).

$F(f_n)(z)$ ist für die $z \in \mathbb{C}$ definiert, für die die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ konvergent ist.

Bei der *Z-Transformation* wird einer komplexen Folge (f_n) eine komplexe Funktion $F(f_n)(z)$ zugeordnet.
Die Z-Transformation ist im Gegensatz zu der bisher behandelten Laplace-Transformation (Integral-Transformation) eine *diskrete Transformation.*

Wir wollen zunächst die Konvergenz der unendlichen Reihe der Z-Transformation untersuchen:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n}$ ist eine *Laurent-Reihe* (vgl. später) um $z_0 = 0$.
Ersetzen wir $w = z^{-1}$, so erhalten wir $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n w^n$.
Dies ist bzg. w eine Potenzreihe um $w_0 = 0$. Diese Potenzreihe habe den Konvergenzradius $\tilde{R} > 0$, also die Potenzreihe konvergiere für $|w| < \tilde{R}$. Dann konvergiert die Z-Transformationsreihe für $|z| > (1/\tilde{R}) = R$, also außerhalb des Kreises um 0 mit Radius $R = (1/\tilde{R})$.

Den Radius R kann man häufig mit Hilfe des Quotientenkriteriums folgendermaßen berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1} z^{-(n+1)}}{f_n z^{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{R}{|z|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > R \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}}{fn}\right| = R.$$

Beispiele

1. $f_0 = 1 \ , \ f_n = 0 \quad \forall n \in I\!N \ .$

$$F(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = f_0 = 1 \ , \ \text{ also}$$

$$\boxed{F((1,0,0,0,\ldots))(z) = 1}$$

2. $f_n = a^n \quad , \quad n \in I\!N_0 \quad , \quad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ fest.

$$F(a^n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \quad , \ \text{falls } |\frac{a}{z}| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |z| > |a| \ , \text{ also}$$

$$\boxed{F(a^n)(z) = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| > |a|}$$

Auch bei der Z-Transformation spielt die Faltung eine wichtige Rolle. Wir definieren deshalb:

Definition : *Faltung*

Seien $(f_n)_{n\in I\!N_0}$ und $(g_n)_{n\in I\!N_0}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$. Dann heißt die Folge $(h_n)_{n\in I\!N_0}$

$$\boxed{(h_n) = (f_n) * (g_n) \quad \text{mit} \quad h_n = \sum_{l=0}^{n} f_l g_{n-l} \quad , \quad n \in I\!N_0}$$

die *Faltung* von (f_n) mit (g_n).

Im folgenden Satz fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der Z-Transformation zusammen:

Satz : *Eigenschaften der Z-Transformation*

Seien $(f_n)_{n\in I\!N_0}$ und $(g_n)_{n\in I\!N_0}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$ und sei $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

a) $F(f_n + g_n) = F(f_n) + F(g_n) \quad , \quad F(cf_n) = cF(f_n)$ *(Linearität).*

b) $F(f_{n-k})(z) = z^{-k}F(f_n)(z) \quad , \quad k \in I\!N \ , \ (\text{mit } \ f_n = 0 \text{ für } n < 0) \ ,$

c) $F(f_{n+k})(z) = z^k\Big(F(f_n)(z) - \sum_{l=0}^{k-1} f_l z^{-l}\Big) \quad , \quad k \in I\!N \ .$

Insbesondere gilt

$$F(f_{n+1})(z) = z\big(F(f_n)(z) - f_0\big) \ ,$$
$$F(f_{n+2})(z) = z^2\big(F(f_n)(z) - f_0 - f_1 z^{-1}\big) \ .$$

d) $F(\alpha^n f_n)(z) = F(f_n)(\frac{z}{\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *(Dämpfungseigenschaft).*

e) $F(nf_n)(z) = -z\frac{d}{dz}F(f_n)(z)$ *(Differentiationseigenschaft).*

f) $F(f_n * g_n)(z) = F(f_n)(z) \cdot F(g_n)(z)$ *(Faltungseigenschaft).*

Beweis :

a) Die Linearität folgt aus der Linearität der unendlichen Summe, falls die Reihen jeweils konvergent sind.

b) $F(f_{n-k})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n z^{-(n+k)} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$

(da $f_n = 0$ für $n < 0$).

c) $F(f_{n+k})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} f_n z^{-(n-k)} = z^k \sum_{n=k}^{\infty} f_n z^{-n}$

$= z^k \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \Big) = z^k \Big(F(f_n)(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \Big)$.

d) $F(\alpha^n f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\frac{z}{\alpha})^{-n} = F(f_n)(\frac{z}{\alpha})$.

e) $F(f_n)'(z) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) f_n z^{-n-1} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} n f_n z^{-n} = -\frac{1}{z} F(nf_n)(z)$

(Laurent-Reihe darf in ihrem Konvergenzring gliedweise differenziert werden).

f) $F(f_n)(z) \cdot F(g_n)(z) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{n} f_l z^{-l} g_{n-l} z^{-(n-l)} \Big)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{n} f_l g_{n-l} \Big) z^{-n} = F(f_n * g_n)(z)$. (Cauchy-Produkt)

Beispiele

1. *zu* a)

$F(\sin \omega n)(z) = F\Big(\frac{1}{2i} (e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}) \Big)(z) = \frac{1}{2i} \Big(F(e^{i\omega n})(z) - F(e^{-i\omega n})(z) \Big)$

$= \frac{1}{2i} \Big(\frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \Big) = \frac{1}{2i} \Big(\frac{z(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1} \Big)$

$= \frac{1}{2i} \Big(\frac{z \cdot 2i \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \Big)$.

Also gilt (2. Gleichung analog) :

$$\boxed{F(\sin \omega n)(z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \quad , \quad F(\cos \omega n)(z) = \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}}$$

2. *zu* b) $F(a^n)(z) = \dfrac{z}{z-a}$ (nach Beispiel 2, S.8) $\Rightarrow$

$$F((a^{n-1})_{n\geq 1})(z) = \frac{F(a^n)(z)}{z} = \frac{1}{z-a}$$ (mit $f_0 = 0$ für $n = 0$), also gilt

$$\boxed{F((a^{n-1})_{n\geq 1})(z) = \frac{1}{z-a}}$$

3. *zu* c)

$$F(a^{n+1})(z) = z\Big(F(a^n)(z) - a^0\Big) = z\Big(\frac{z}{z-a} - 1\Big) = \frac{az}{z-a}\ .$$

4. *zu* d)

$$F(a^n \sin\omega n)(z) = F(\sin\omega n)(\frac{z}{a}) = \frac{\frac{z}{a}\sin\omega}{(\frac{z}{a})^2 - 2(\frac{z}{a})\cos\omega + 1} = \frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}\ .$$

Also gilt (2. Gleichung analog) :

$$\boxed{F(a^n \sin\omega n)(z) = \frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}\ ,\ F(a^n \cos\omega n)(z) = \frac{z^2 - az\cos\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}}$$

5. *zu* e)

$$F(na^n)(z) = -z\frac{d}{dz}F(a^n)(z) = -z\Big(\frac{z}{z-a}\Big)' = -z\,\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$. Also gilt

$$\boxed{F(na^n)(z) = \frac{az}{(z-a)^2}}$$

6. *zu* e)

$$F(n^2a^n)(z) = -z\Big(\frac{az}{(z-a)^2}\Big)' = -az\,\frac{(z-a)-2z}{(z-a)^3} = -az\,\frac{-z-a}{(z-a)^3} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}\ .$$

Also gilt

$$\boxed{F(n^2a^n)(z) = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}}$$

Aus den beiden letzten Beispielen folgt

$$\boxed{F((n^2-n)a^n)(z) = \frac{2a^2z}{(z-a)^3}}$$

7. *zu* f)

Es gilt $(f_n) * (1^n) = \Big(\sum_{l=0}^{n} f_l\Big)$. Also gilt

$$F\Big(\sum_{l=0}^{n} f_l\Big)(z) = F(f_n * 1^n)(z) = F(f_n)(z) \cdot F(1^n)(z) = \frac{z}{z-1} F(f_n)(z) \ .$$

Insbesondere gilt für $f_n = n$

$$F\Big(\sum_{l=0}^{n} l\Big)(z) = \frac{z}{z-1} F(n)(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

(da $F(n)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ (nach Beispiel 5. für $a = 1$).

Inverse Z-Transformation

Um die *inverse Z-Transformation* für rationale Funktionen zu berechnen, muß eine Partialbruchzerlegung durchgeführt und dann obige Beispiele für die Rücktransformation benutzt werden. Wie werden später (siehe Komplexe Funktionentheorie) die inverse Z-Transformation für rationale Funktionen auch mit anderen Hilfsmitteln (Residuensatz) berechnen können. Im Folgenden eine kleine Tabelle für einige inverse Z-Transformationen, die sich alle aus den obigen Beispielen ergeben:

$$F^{-1}\Big(1\Big) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 0 \\ 0 & \text{, falls } n \geq 1 \end{cases}$$

$$F^{-1}\Big(\frac{1}{z-a}\Big) = a^{n-1} \quad , \quad (n \geq 1 \ , \ 0 \text{ für } n = 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{z}{z-a}\Big) = a^{n} \quad , \quad (n \geq 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{1}{(z-a)^2}\Big) = (n-1)a^{n-2} \quad , \quad (n \geq 1 \ , \ 0 \text{ für } n = 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{z}{(z-a)^2}\Big) = na^{n-1} \quad , \quad (n \geq 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{1}{(z-a)^3}\Big) = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)a^{n-3} \quad , \quad (n \geq 1 \ , \ 0 \text{ für } n = 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{z}{(z-a)^3}\Big) = \frac{1}{2}(n^2 - n)a^{n-2} \quad , \quad (n \geq 1 \ , \ 0 \text{ für } n = 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{1}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}\Big) = \frac{1}{\sin\omega} a^{n-2} \sin(n-1)\omega \quad , \quad (n \geq 1 \ , \ 0 \text{ für } n = 0)$$

$$F^{-1}\Big(\frac{z}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}\Big) = \frac{1}{\sin\omega} a^{n-1} \sin n\omega \quad , \quad (n \geq 0)$$

Anwendung der Z-Transformation auf lineare Differenzengleichungen

Wendet man die *Z-Transformation* auf *lineare Differenzengleichungen* an, so erhält man eine Gleichung für $F(y_n)$. Durch Rücktransformation erhält man dann die Lösung der gegebenen DFG.

Beispiele

1 $\quad y_{n+1} - 3y_n = n2^n$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z(F(y_n) - y_0) - 3F(y_n) = F(n2^n) = \frac{2z}{(z-2)^2} \quad \Rightarrow$$
$$F(y_n) = \frac{y_0 z}{z-3} + \frac{2z}{(z-3)(z-2)^2}$$
$$= \frac{y_0 z}{z-3} + \frac{6}{z-3} - \frac{6}{z-2} - \frac{4}{(z-2)^2} \quad \text{(Partialbruchzerlegung)} \quad \Rightarrow$$
$$y_n = y_0 F^{-1}\Big(\frac{z}{z-3}\Big) + 6F^{-1}\Big(\frac{1}{z-3}\Big) - 6F^{-1}\Big(\frac{1}{z-2}\Big) - 4F^{-1}\Big(\frac{1}{(z-2)^2}\Big) \quad \Rightarrow$$
$$y_n = y_0 3^n + 6 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot (n-1)2^{n-2} \quad , \quad (n \geq 1) \quad \Rightarrow$$
$$y_n = (y_0 + 2)3^n - (3 + n - 1)2^n \quad , \quad (n \geq 1) \ .$$

Damit lautet die Lösung der gegebenen DFG mit dem Anfangswert y_0

$$y_n = (y_0 + 2)3^n - (2 + n)2^n \quad , \ (n \geq 0) \ .$$

2 $\quad y_{n+1} - 2y_n = n2^n$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z(F(y_n) - y_0) - 2F(y_n) = F(n2^n) = \frac{2z}{(z-2)^2} \quad \Rightarrow$$
$$F(y_n) = \frac{y_0 z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^3} \quad \Rightarrow$$
$$y_n = y_0 F^{-1}\Big(\frac{z}{z-2}\Big) + 2F^{-1}\Big(\frac{z}{(z-2)^3}\Big) = y_0 2^n + 2 \cdot \frac{1}{2}(n^2 - n)2^{n-2} \quad , \ (n \geq 1)$$

Damit lautet die Lösung der gegebenen DFG mit dem Anfangswert y_0

$$y_n = y_0 2^n + (n^2 - n)2^{n-2} \quad , \ (n \geq 0) \ .$$

3. $\quad y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^n$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z^2(F(y_n) - y_0 - y_1 z^{-1}) - 3z(F(y_n) - y_0) + 2F(y_n) = F(2^n) = \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow$$
$$(z^2 - 3z + 2)F(y_n) = y_0(z^2 - 3z) + y_1 z + \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow$$
$$F(y_n) = \frac{y_0(z^2 - 3z)}{z^2 - 3z + 2} + \frac{y_1 z}{z^2 - 3z + 2} + \frac{z}{(z-2)(z^2 - 3z + 2)} \quad \Rightarrow$$
$$F(y_n) = \frac{y_0(z^2 - 3z + 2)}{z^2 - 3z + 2} + \frac{y_1 z - 2y_0}{(z-1)(z-2)} + \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} \quad \Rightarrow$$
$$y_n = y_0 F^{-1}\Big(1\Big) + (2y_0 - y_1)F^{-1}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) + (2y_1 - 2y_0)F^{-1}\Big(\frac{1}{z-2}\Big)$$
$$+F^{-1}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) - F^{-1}\Big(\frac{1}{z-2}\Big) + 2F^{-1}\Big(\frac{1}{(z-2)^2}\Big) \quad (\mathit{Partialbruchzerlegung}) \quad \Rightarrow$$
$$y_n = (2y_0 - y_1)1^{n-1} + (2y_1 - 2y_0)2^{n-1} + 1^{n-1} - 2^{n-1} + 2(n-1)2^{n-2} \quad , \ (n \geq 1) \ .$$

Denn es gilt $F^{-1}(1) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 0 \\ 0 & \text{, falls } n \geq 1 \end{cases}$.

Also folgt

$y_n = (2y_0 - y_1) + (y_1 - y_0)2^n + 1 - 2^n + n2^{n-1}$, $(n \geq 1)$.

Damit lautet die Lösung der gegebenen DFG mit den Anfangswerten y_0 und y_1

$y_n = (2y_0 - y_1 + 1) + (y_1 - y_0 - 1)2^n + n2^{n-1}$, $(n \geq 0)$.

4. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 2^n$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z^2(F(y_n) - y_0 - y_1 z^{-1}) - 2z(F(y_n) - y_0) + 2F(y_n) = F(2^n) = \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow$$

$$(z^2 - 2z + 2)F(y_n) = z + \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow$$

$$F(y_n) = \frac{z}{z^2 - 2z + 2} + \frac{z}{(z-2)(z^2 - 2z + 2)} = \frac{z^2 - z}{(z-2)(z^2 - 2z + 2)} \quad \Rightarrow$$

$$F(y_n) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z^2 - 2z + 2} \quad \text{(Partialbruchzerlegung)} \quad \Rightarrow$$

$$y_n = 2^{n-1} + \frac{1}{\sin(\pi/4)}\sqrt{2}^{\,n-2} \sin(n-1)\pi/4$$

(da $a^2 = 2$, $a\cos\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$, $\omega = \pi/4$).

Also gilt

$y_n = 2^{n-1} + \sqrt{2}^{\,n-1}(\sin(n\pi/4)\cos(\pi/4) - \cos(n\pi/4)\sin(\pi/4))$, $(n \geq 1)$.

Damit lautet die Lösung der gegebenen DFG mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$: $\quad y_n = 2^{n-1} + \sqrt{2}^{\,n-2}(\sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/4))$, $(n \geq 0)$.

5. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z^2(F(y_n) - y_0 - y_1 z^{-1}) - 4z(F(y_n) - y_0) + 4F(y_n) = F(2^n) = \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow$$

$$(z^2 - 4z + 4)F(y_n) = z + \frac{z}{z-2} \quad \Rightarrow$$

$$F(y_n) = \frac{z}{(z-2)^2} + \frac{z}{(z-2)^3} \quad \Rightarrow$$

$y_n = n2^{n-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n)2^{n-2}$, $(n \geq 1)$.

Damit lautet die Lösung der gegebenen DFG mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$: $\quad y_n = (3n + n^2)2^{n-3}$, $(n \geq 0)$.

Aufgaben

1.a) Zeigen Sie, daß folgende Z-Transformationen bzw. inverse Z-Transformationen gelten

α) $F\Big(n^3a^n\Big)(z) = \dfrac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4} \quad , \quad (|z|>|a|)$

β) $F\Big((2n^3-3n^2+n)a^n\Big)(z) = \dfrac{6a^2z(z+a)}{(z-a)^4} \quad , \quad (|z|>|a|)$

γ) $F^{-1}\Big(\dfrac{z(z+a)}{(z-a)^4}\Big) = \dfrac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)a^{n-2} \quad , \quad (n\geq 0)$.

b) Lösen Sie die folgende Differenzengleichung mit dem Anfangswert y_0

$$y_{n+1}-4y_n = n^2 4^n$$

α) mit Hilfe von Ansätzen,
β) mit Hilfe der Z-Transformation.

2. Lösen Sie die folgenden Differenzengleichungen mit den Anfangswerten $y_0 = 1$, $y_1 = 0$

a) $y_{n+2}+y_n = n3^n$

b) $y_{n+2}-6y_{n+1}+9y_n = 3^n$

α) mit Hilfe von Ansätzen,
β) mit Hilfe der Z-Transformation.