

VIII Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

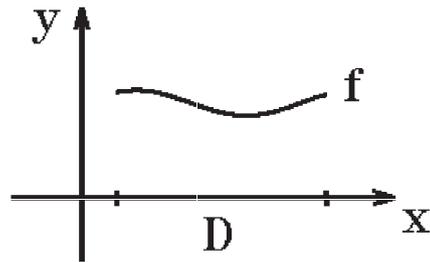
Wir wollen im folgenden Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten und Eigenschaften dieser Funktionen, wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Extrema usw., untersuchen. Solche Funktionen treten in der Anwendung sehr häufig auf: z.B.: die Temperaturverteilung im Raum ist eine Funktion der drei Ortskoordinaten und der Zeit (also $n = 4$).

Geometrische Deutung

$$\underline{n = 1}: f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$C_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in D(f), y = f(x) \right\}$$

ist der Graph von $f \hat{=} \text{Kurve in } \mathbb{R}^2$.



$$\underline{n = 2}: f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

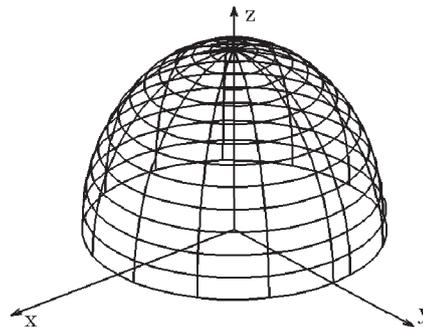
$$S_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(f), z = f(x, y) \right\}$$

die durch f gegebene Punktmenge $\hat{=} \text{Fläche in } \mathbb{R}^3$.

Beispiel 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

obere Halbkugel



Darstellungshilfen

1. Höhenlinien

$$H_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : f(x, y) = c \right\}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

$\hat{=} \text{Kurve auf } S_f \text{ mit gleicher Höhe } c$.

Beispiel

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

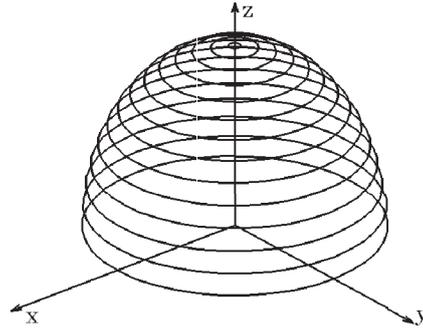
$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = c$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 = c^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - c^2$$

\Rightarrow Höhenlinien sind Kreise

um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius $\sqrt{1 - c^2}$



2. (x, y) -Koordinatenlinien

$$y_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = f(x, y_0)$$

Kurve in \mathbb{R}^3

$$x_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = f(x_0, y)$$

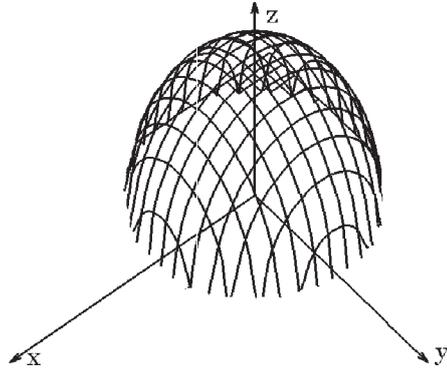
Kurve in \mathbb{R}^3

Beispiel

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$y_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = \sqrt{1 - y_0^2 - x^2}$$

$$x_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = \sqrt{1 - x_0^2 - y^2}$$



3. (r, φ) -Koordinatenlinien

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = f(r_0 \cos \varphi, r_0 \sin \varphi)$$

Kurve in \mathbb{R}^3

$$\varphi_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = f(r \cos \varphi_0, r \sin \varphi_0)$$

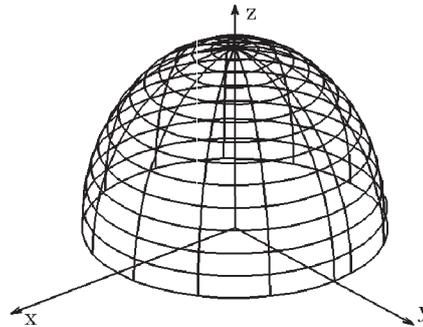
Kurve in \mathbb{R}^3

Beispiel

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$r_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = \sqrt{1 - r_0^2}$$

$$\varphi_0 \text{ konstant} \Rightarrow z = \sqrt{1 - r^2}$$



4. Schnitt mit der (x, y) - oder (y, z) - oder (x, z) -Ebene

$$\text{z.B.: } x = 0 \Rightarrow z = f(0, y) \text{ Kurve in } (y, z)\text{-Ebene}$$

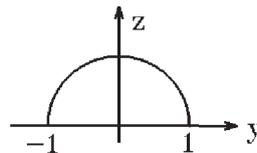
Beispiel

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

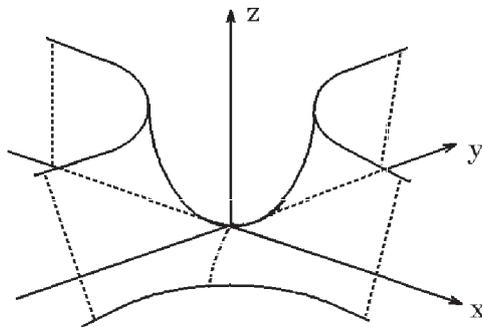
Halbkreis in (y, z) -Ebene



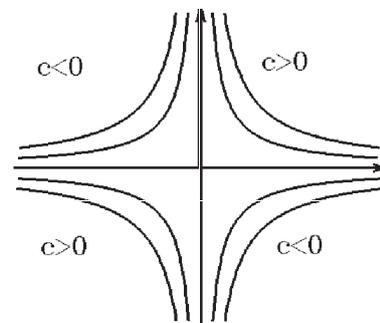
Beispiel 2. $f(x, y) = xy$

1. Höhenlinien: $xy = c \Rightarrow y = \frac{c}{x}$, falls $c \neq 0$ (Hyperbel)

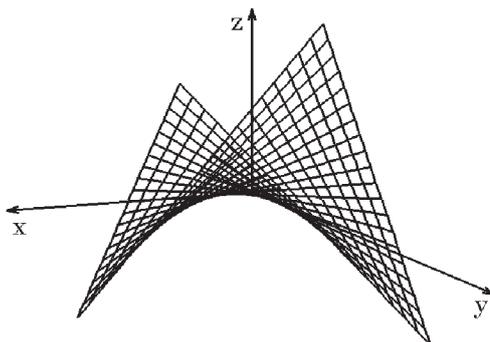
$c = 0 \Rightarrow x = 0$ (y - Achse) oder $y = 0$ (x - Achse)



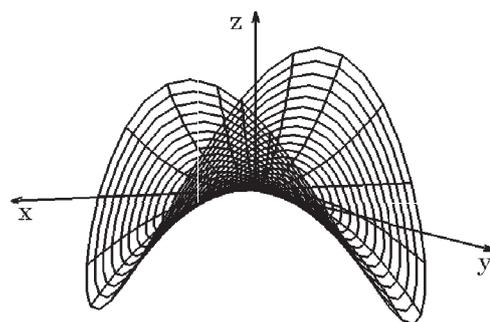
$f(x, y) = xy$



Höhenlinien



(x, y) - Koordinatenlinien



(r, φ) - Koordinatenlinien

Schnitt mit der (y, z) - bzw. (x, z) - Ebene:

$x = 0 \Rightarrow z = 0$ (y - Achse) ; $y = 0 \Rightarrow z = 0$ (x - Achse).

Für $n \geq 2$ kann man nicht mehr in so einfacher Weise veranschaulichen.

Um eine einheitliche und präzise Darstellung zu ermöglichen, müssen wir zunächst einige Eigenschaften über den \mathbb{R}^n wiederholen (vgl. Kap.II, S.26 ff).

Eigenschaften des \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

ist mit den Operationen $+$ und $\lambda \cdot$ ein n -dimensionaler Vektorraum.

Mit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\vec{x} + \vec{y}, \lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Basis: Als Basis betrachten wir normalerweise die Einheitsvektoren $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ mit 1 an der i -ten Stelle.

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ sind linear unabhängig und für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i .$$

Skalarprodukt: Mit dem *Skalarprodukt (inneres Produkt)*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

wird der \mathbb{R}^n zum *unitären Raum*.

8.1: Für das *Skalarprodukt* gelten folgende Eigenschaften

- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $\langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$
- $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

b),c) bedeuten: das Skalarprodukt ist *linear*.

Euklidische Norm: Mit der *Euklidischen Norm*

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\hat{=} \text{Länge des Vektors } \vec{x})$$

wird der \mathbb{R}^n zum *normierten Vektorraum*.

8.2: Für die *Norm* gelten folgende Eigenschaften

- $|\vec{x}| \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$
- $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (Dreiecksungleichung).

Zusätzlich gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}| .$$

Euklidische Metrik: Der Abstand zwischen zwei Vektoren \vec{x} und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ wird gemessen durch

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Hierdurch wird der \mathbb{R}^n zum *metrischen Raum*.

8.3: Für die *Metrik* gelten folgende Eigenschaften

- a) $|\vec{x} - \vec{y}| \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
- b) $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{y} - \vec{x}|$
- c) $|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x} - \vec{z}| + |\vec{z} - \vec{y}| \quad \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n.$

Die Eigenschaften (8.1), (8.2), bzw. (8.3) sind genau die Eigenschaften, die in einem Vektorraum ein Skalarprodukt (inneres Produkt), eine Norm, bzw. eine Metrik definieren.

Die meisten Eigenschaften des eindimensionalen Zahlenraums \mathbb{R} übertragen sich auf den \mathbb{R}^n für beliebiges n , da wir auch in \mathbb{R}^n den "Abstand" zwischen zwei Elementen messen können. Unterschiede ergeben sich dadurch, daß in \mathbb{R}^n

- a) die Division fehlt,
- b) keine Ordnungsrelation vorhanden ist, dh. die Elemente können nicht untereinander durch \leq angeordnet werden,
- c) die uneigentlichen Punkte $+\infty$, $-\infty$ nicht in Betracht gezogen werden.

Zunächst führen wir auch in \mathbb{R}^n Intervalle ein:

Definition 8.4 : Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

mit $-\infty < a_i < b_i < \infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$. Dann heißt

$$\text{a) } [\vec{a}, \vec{b}] := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ein *abgeschlossenes Intervall* des \mathbb{R}^n .

Gilt $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$, so heißt

$$\text{b) } (\vec{a}, \vec{b}) := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ein *offenes Intervall* des \mathbb{R}^n .

Für $n = 1$ erhalten wir Intervalle im bisherigen Sinn,

für $n = 2$ erhalten wir Rechtecke,

für $n = 3$ erhalten wir Quader.

- c) Als ϵ -Umgebung eines Punktes $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir $U_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{x}_0| < \epsilon\}$.

Für $n = 1$ erhalten wir Intervalle $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$,
für $n = 2$ erhalten wir Kreisscheiben um \vec{x}_0 mit Radius ϵ ,
für $n = 3$ erhalten wir Kugeln um \vec{x}_0 mit Radius ϵ .

Deshalb nennt man die ϵ -Umgebungen in \mathbb{R}^n allgemein *Kugelumgebungen*.

Definition 8.5 : Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $M \subset I$.

Definition 8.6 : Ist $I = [\vec{a}, \vec{b}]$ ein abgeschlossenes oder $I = (\vec{a}, \vec{b})$ ein beschränktes offenes Intervall, so heißt $\delta(I) := |\vec{b} - \vec{a}|$ der *Durchmesser* von I .

Definition 8.7 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des \mathbb{R}^n .

- a) $\vec{x}_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M , wenn es eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(\vec{x}_0)$ gibt mit $U_\epsilon(\vec{x}_0) \subset M$.
b) M heißt *offen*, wenn alle Punkte von M innere Punkte sind.
c) M heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin M\}$ offen ist.

Mit dieser Definition sieht man sofort, daß die abgeschlossenen Intervalle abgeschlossen und die offenen Intervalle und die ϵ -Umgebungen offen sind.

Folgen in \mathbb{R}^n

Sei $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^n mit $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$.

Definition 8.8 : $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Grenzwert* der Folge (\vec{x}_k)
 $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_k - \vec{a}| = 0$.

In diesem Fall heißt die Folge (\vec{x}_k) *konvergent gegen \vec{a}* .

Schreibweise: $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ oder $\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}$ für $k \rightarrow \infty$.

Die folgenden Eigenschaften haben wir bereits gezeigt (vgl. S.99)

Satz 8.9 :

$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
(koordinatenweise Konvergenz).

Satz 8.10 : Seien (\vec{x}_k) und (\vec{y}_k) zwei Folgen des \mathbb{R}^n mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{b}$, sei (λ_k) eine Folge in \mathbb{R} mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

- a) $\lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}_k \pm \vec{y}_k) = \vec{a} \pm \vec{b}$
- b) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \vec{x}_k = \lambda \vec{a}$
- c) $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_k, \vec{y}_k \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
- d) $\lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_k| = |\vec{a}|$.

Beweis :

Durch Übergang auf die einzelnen Koordinaten folgen sofort a) und b).

$$c) \langle \vec{x}_k, \vec{y}_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_{ki} y_{ki} \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$d) |\vec{x}_k| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ki}^2} \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = |\vec{a}|.$$

Analog zum Fall $n = 1$ zeigt man

Satz 8.11 :

- a) Jede Folge (\vec{x}_k) aus \mathbb{R}^n besitzt *höchstens einen Grenzwert*.
- b) Jede *konvergente* Folge (\vec{x}_k) ist *beschränkt*, dh. die Folge $(|\vec{x}_k|)$ ist beschränkt.

Auch in \mathbb{R}^n gibt es den Begriff der Cauchy-Konvergenz:

Definition 8.12 : Eine Folge (\vec{x}_k) des \mathbb{R}^n heißt *Cauchy-konvergent*

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{R} \text{ mit } |\vec{x}_k - \vec{x}_l| < \epsilon \quad \forall k, l > N(\epsilon).$$

Jede konvergente Folge (\vec{x}_k) ist auch Cauchy-konvergent (vgl. [S.100](#)).

In \mathbb{R}^n gilt auch die Umkehrung dieser Aussage:

Satz 8.13 : Der \mathbb{R}^n ist *vollständig*, dh.: jede Cauchy-konvergente Folge des \mathbb{R}^n ist konvergent in \mathbb{R}^n .

Beweis : (vgl. [S.100](#)).

Also ist der \mathbb{R}^n ein

vollständiger normierter Vektorraum = Banachraum,

vollständiger unitärer Vektorraum = Hilbertraum.

Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D(f) = M$ eine reellwertige Funktion von mehreren Variablen.

Definition 8.14 :

- a) f heißt *stetig* in $\vec{x}_0 \in M$
 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ mit $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \epsilon \quad \forall |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \quad (\vec{x} \in M)$.
- b) f heißt *stetig* in $M \Leftrightarrow f$ ist stetig in allen $\vec{x}_0 \in M$.

Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1$,
 f ist stetig in \mathbb{R}^2 , denn sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0 \Rightarrow$
 $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| = |x_1 - x_{01}| \leq |\vec{x} - \vec{x}_0| < \epsilon \quad \forall |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta = \epsilon$.

Oft kann die Stetigkeit einfacher mit Hilfe von Folgen nachgewiesen werden. Es gilt

Satz 8.15 : $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $\vec{x} \in M$

\Leftrightarrow Für alle Folgen (\vec{x}_k) aus M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{x})$.

Beweis :

" \Rightarrow ": Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| < \epsilon \quad \forall |\vec{y} - \vec{x}| < \delta$, sei (\vec{x}_k) eine Folge in M mit $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}$, dann existiert zu δ ein N mit $|\vec{x}_k - \vec{x}| < \delta \quad \forall k > N \Rightarrow$
 $|f(\vec{x}_k) - f(\vec{x})| < \epsilon \quad \forall k > N \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{x})$.

" \Leftarrow ": *Annahme:* f nicht stetig in $\vec{x} \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \exists \vec{y} \in M$ mit $|\vec{y} - \vec{x}| < \delta$ und $|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \geq \epsilon$.

Wähle $\delta = \frac{1}{k} \Rightarrow \exists \vec{y}_k$ mit $|\vec{y}_k - \vec{x}| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und $|f(\vec{y}_k) - f(\vec{x})| \geq \epsilon$.

Also ist (\vec{y}_k) ein Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{x}$ aber $f(\vec{y}_k) \not\rightarrow f(\vec{x}) \Rightarrow$ Widerspruch.

Satz 8.16 :

- a) Summe, Differenz, Produkt und Quotient von in \vec{x} stetigen Funktionen ist stetig in \vec{x} ; beim Quotient darf die Nennerfunktion in \vec{x} keine Nullstelle haben.
- b) Ist g stetig in \vec{x} und f stetig in $g(\vec{x}) \Rightarrow f \circ g$ ist stetig in \vec{x} .

Beweis : Analog zum eindimensionalen Fall.

Beispiele

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$ (vgl. Beispiel 2, **S.253**)
 f ist stetig in \mathbb{R}^2 , denn $f = f_1 \cdot f_2$ mit $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y$,
 f_1, f_2 sind stetig in \mathbb{R}^2 (vgl. Beispiel **S.258**)
 $\Rightarrow f$ ist stetig in \mathbb{R}^2 .

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f Polynom in \mathbb{R}^n , dh.:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^k \dots \sum_{i_n=0}^k a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

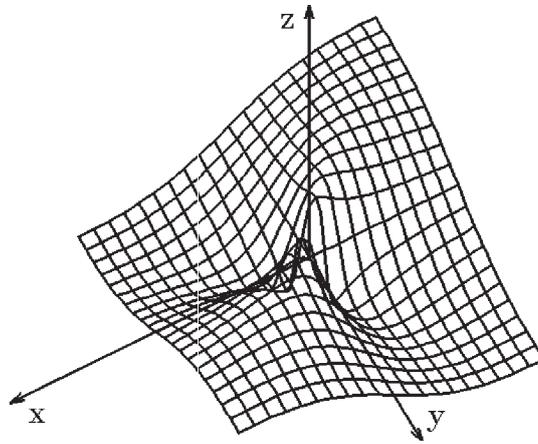
⇒ f ist stetig in \mathbb{R}^n , da Produkt und Summe von stetigen Funktionen.

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

f ist stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ (als Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$), aber f ist *nicht* stetig in $\vec{0}$, denn:

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 1/k \end{pmatrix} \rightarrow \vec{0} \text{ f\u00fcr } k \rightarrow \infty, \text{ aber } f(1/k, 1/k) = \frac{1}{2} \not\rightarrow f(\vec{0}) = 0.$$



Bemerkung : *partielle Stetigkeit*

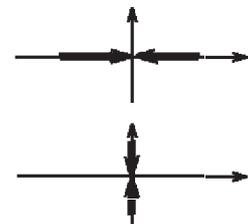
Betrachten wir nur die speziellen Folgen $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $x_{k1} \rightarrow 0$, dh.: man n\u00e4hert

sich der Stelle $\vec{0}$ nur aus der Richtung der 1. Variablen, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = 0 = f(\vec{0}).$$

Analog gilt f\u00fcr alle Folgen $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{k2} \end{pmatrix}$ mit $x_{k2} \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = 0 = f(\vec{0}).$$



In diesem Fall spricht man von *partieller Stetigkeit* in $\vec{x} = \vec{0}$ (dh.: stetig bzg. der einzelnen Variablen bei Festhalten der anderen Variablen).

Man sieht an diesem Beispiel, da\u00df i.A. aus partieller Stetigkeit *nicht* die Stetigkeit folgt.

Richtungsableitung, partielle Ableitung

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{x}_0 \in M$ innerer Punkt, sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor mit

$$|\vec{a}| = 1$$

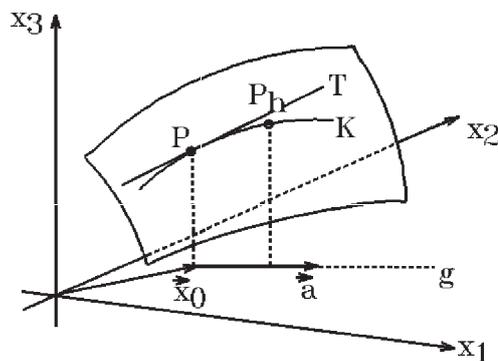
Definition 8.17 : f heißt in \vec{x}_0 differenzierbar in Richtung \vec{a} , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

existiert.

Diesen Grenzwert nennen wir *Richtungsableitung* von f an der Stelle \vec{x}_0 in Richtung \vec{a} und schreiben $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0)$.

Geometrische Deutung im Fall $n = 2$



$g = \{\vec{x} = \vec{x}_0 + h\vec{a} : h \in \mathbb{R}\}$ Gerade durch \vec{x}_0 in Richtung \vec{a}

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(\vec{x}) \end{pmatrix} : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \right\}$ ist eine Fläche in \mathbb{R}^3

$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(\vec{x}) \end{pmatrix} : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in g \right\}$ ist eine Kurve auf der Fläche F

$P = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ f(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, \quad P_h = \begin{pmatrix} x_{01} + ha_1 \\ x_{02} + ha_2 \\ f(\vec{x}_0 + h\vec{a}) \end{pmatrix}$

P liegt auf K , P_h ist ein weiterer Punkt auf K . Also ist $\frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{h}$ die Steigung der Sekante durch P und P_h . Existiert der Grenzwert $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0)$, so ist dieser Grenzwert die Steigung der Tangente T an die Kurve K im Punkt P .

Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + x \cos y$.

Gesucht: Richtungsableitung von f in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ in Richtung $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha_1, y_0 + ha_2) - f(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - x_0^2 - x_0 \cos y_0 \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{2}hx_0 + \frac{h^2}{2} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\left(y_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - \cos y_0}{\frac{h}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos y_0 \\ &= \sqrt{2}x_0 - \frac{x_0}{\sqrt{2}} \sin y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos y_0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Für die Anwendung besonders wichtig sind die Richtungsableitungen in die Richtungen der natürlichen Basisvektoren $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$, ($1 \leq i \leq n$).

Definition 8.17(2) : Existiert in \vec{x}_0 die Richtungsableitung in Richtung \vec{e}_i , so heißt f in \vec{x}_0 *partiell differenzierbar* nach der i -ten Variablen x_i , und man schreibt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(\vec{x}_0) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) =: f_{x_i}(\vec{x}_0).$$

Dies ist die *partielle Ableitung* von f nach x_i (an der Stelle \vec{x}_0).

Bemerkung : Da $\vec{x} + h\vec{e}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)^T$, wird bei der Bildung der partiellen Ableitung nach x_i nur die i -te Variable variiert, alle anderen Variablen bleiben konstant. Also erhält man die partielle Ableitung nach x_i folgendermaßen: Die Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ bleiben konstant, und nach der i -ten Variablen x_i wird differenziert.

Beispiele

1. $f(x, y) = x^2 + x \cos y$
 $f_x = 2x + \cos y$, $f_y = -x \sin y$.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(vgl. Beispiel 3, S.259)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

\Rightarrow Die partiellen Ableitungen existieren in jedem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Diese Funktion ist aber in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht stetig (vgl. S.259).

Bemerkung : Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen folgt i.A. *nicht* die Stetigkeit einer Funktion. Sind aber die partiellen Ableitungen beschränkt, so gilt:

Satz 8.18 : Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in M$.

Existieren in einer Umgebung $U_r(\vec{x}_0) \subset M$ alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ und sind diese dort beschränkt, so gilt: f ist stetig in \vec{x}_0 .

Beweis :

Sei $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{v}| < r$, also $\vec{x}_0 + \vec{v} \in U_r(\vec{x}_0)$.

Setze $\vec{y}_0 = \vec{0}$, $\vec{y}_i = (v_1, \dots, v_i, 0, \dots, 0)^T$, ($1 \leq i \leq n$)

$\Rightarrow |\vec{y}_i| \leq |\vec{v}| < r$ und $\vec{x}_0 + \vec{y}_i \in U_r(\vec{x}_0)$.

Dann gilt

$$f(\vec{x}_0 + \vec{v}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n (f(\vec{x}_0 + \vec{y}_i) - f(\vec{x}_0 + \vec{y}_{i-1})) = \sum_{i=1}^n v_i f_{x_i}(\vec{\xi}_i)$$

mit $\vec{\xi}_i$ auf der Strecke zwischen $\vec{x}_0 + \vec{y}_i$ und $\vec{x}_0 + \vec{y}_{i-1}$ (nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für 1 Variable).

Da f_{x_i} beschränkt in $U_r(\vec{x}_0)$, folgt

$$|f(\vec{x}_0 + \vec{v}) - f(\vec{x}_0)| \leq \sum_{i=1}^n |v_i| M_i \leq K |\vec{v}|$$

$\Rightarrow \lim_{\vec{v} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}_0 + \vec{v}) = f(\vec{x}_0) \Rightarrow f$ ist stetig in \vec{x}_0 .

Definition 8.19 : Ist $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0 \in M$ partiell differenzierbar nach allen Variablen x_i , ($1 \leq i \leq n$), so heißt der Vektor

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)^T$$

der *Gradient* von f in \vec{x}_0 .

Der Differentialoperator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ mit $\nabla f(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0)$

heißt *Nabla-Operator*.

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + x \cos y$$
$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + \cos y \\ -x \sin y \end{pmatrix}.$$

Die Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n ist nicht die Existenz aller partiellen Ableitungen, da hieraus ja i.A. nicht die Stetigkeit folgt, sondern:

Definition 8.20 : Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in M$ innerer Punkt.

f heißt *differenzierbar* in \vec{x}_0 , wenn ein $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und eine Umgebung $U(\vec{x}_0) \subset M$ existieren mit

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \vec{c}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0 \quad , \quad (\vec{x} \in U(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\})$$

Man sagt auch: f ist *total differenzierbar*.

Im folgenden Satz wird gezeigt, daß aus der Differenzierbarkeit in \vec{x}_0 die Existenz aller partiellen Ableitungen folgt mit $\vec{c} = \text{grad } f(\vec{x}_0)$:

Satz 8.21 : Ist $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \in M$ mit $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, so existieren alle Richtungsableitungen und damit alle partiellen Ableitungen, und es gilt:

$$\text{a) } \vec{c} = \text{grad } f(\vec{x}_0)$$

$$\text{b) } \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \langle \text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{a} \rangle \quad , \quad (|\vec{a}| = 1)$$

Beweis :

Wir setzen $\vec{x} = \vec{x}_0 + h\vec{a}$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\Rightarrow |\vec{x} - \vec{x}_0| = |h||\vec{a}| = |h|$

Da $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{a}) - f(\vec{x}_0) - \langle \vec{c}, h\vec{a} \rangle}{h} = 0$, folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{a}) - f(\vec{x}_0)}{h} = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle .$$

Mit $\vec{a} = \vec{e}_i$ folgt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \langle \vec{c}, \vec{e}_i \rangle = c_i \Rightarrow \text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{c}$ und

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{a} \rangle .$$

Damit haben wir im Falle der Differenzierbarkeit eine einfache Methode gefunden, die Richtungsableitung zu berechnen:

Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + x \cos y$$

f ist differenzierbar in \mathbb{R}^2 (wird noch gezeigt)

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + \cos y \\ -x \sin y \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x + \cos y - x \sin y) \quad (\text{vgl. S.261}).$$

Geometrische Deutung des Gradienten für $n = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \langle \text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{a} \rangle = |\text{grad } f(\vec{x}_0)| |\vec{a}| \cos \alpha = |\text{grad } f(\vec{x}_0)| \cos \alpha \quad (|\vec{a}| = 1);$$

α ist der Winkel zwischen

$\text{grad } f(\vec{x}_0)$ und \vec{a} .

Die Richtungsableitung wird am größten,

wenn $\alpha = 0$, also wenn \vec{a} in die

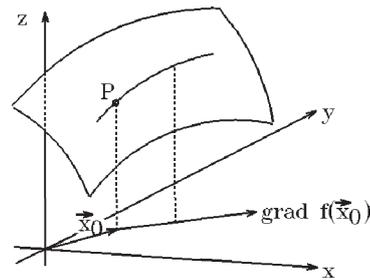
Richtung des Gradienten zeigt.

Also zeigt $\text{grad } f(\vec{x}_0)$

an der Stelle \vec{x}_0

in die Richtung des stärksten Anstiegs

der Fläche, die durch f dargestellt wird.



Wie in \mathbb{R}^1 folgt aus der (totalen) Differenzierbarkeit die Stetigkeit in \vec{x}_0 , wie im folgenden Satz gezeigt wird:

Satz 8.22 : Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in \vec{x}_0 differenzierbar

$\Rightarrow f$ ist stetig in \vec{x}_0 .

Beweis :

Für $\vec{x} \neq \vec{x}_0$ gilt

$$\frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \vec{c}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \frac{\langle \vec{c}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}.$$

Da f in \vec{x}_0 differenzierbar, existiert $U(\vec{x}_0) \subset M$ und $K_1 > 0$ mit

$$\frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \leq K_1 + \frac{|\vec{c}| |\vec{x} - \vec{x}_0|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = K_1 + |\vec{c}| = K > 0 \quad \forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}$$

(Schwarzsche Ungleichung)

$$\Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq K |\vec{x} - \vec{x}_0| \quad \forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Bemerkung : Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen an der Stelle \vec{x}_0 folgt *nicht* die Differenzierbarkeit in \vec{x}_0 , da ja noch nicht einmal die Stetigkeit folgt (vgl. Beispiel 2., S.261). Es gilt aber:

Satz 8.23 : Existieren für $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung $U_r(\vec{x}_0) \subset M$ von

$\vec{x}_0 \in M$ alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ und sind diese stetig in \vec{x}_0 , so

ist f in \vec{x}_0 differenzierbar.

Beweis :

Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis zu Satz 8.18, S.262 .

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}_0 + \vec{v}) - f(\vec{x}_0) - \langle \text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle &= \sum_{i=1}^n v_i f_{x_i}(\vec{\xi}_i) - \sum_{i=1}^n v_i f_{x_i}(\vec{x}_0) \\
 \Rightarrow \frac{|f(\vec{x}_0 + \vec{v}) - f(\vec{x}_0) - \langle \text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle|}{|\vec{v}|} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|v_i|}{|\vec{v}|} |f_{x_i}(\vec{\xi}_i) - f_{x_i}(\vec{x}_0)| \leq \sum_{i=1}^n |f_{x_i}(\vec{\xi}_i) - f_{x_i}(\vec{x}_0)| .
 \end{aligned}$$

Für $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$ gilt $\vec{\xi}_i \rightarrow \vec{x}_0$ und wegen der Stetigkeit von f_{x_i} gilt

$$f_{x_i}(\vec{\xi}_i) \rightarrow f_{x_i}(\vec{x}_0) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Also konvergiert die rechte Seite gegen 0 und damit auch die linke Seite.

Beispiele

1. $f(x, y) = x^2 + x \cos y$

$$f_x(x, y) = 2x + \cos y \quad , \quad f_y(x, y) = -x \sin y$$

$\Rightarrow f_x, f_y$ sind stetig in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ ist differenzierbar in \mathbb{R}^2 .

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

f ist stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$, da f Quotient von in \mathbb{R}^2 stetigen Funktionen und der Nenner $\neq 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

f ist auch stetig in $\vec{0}$, denn:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \rightarrow 0 \quad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ ist stetig in \mathbb{R}^2 .

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \text{grad } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

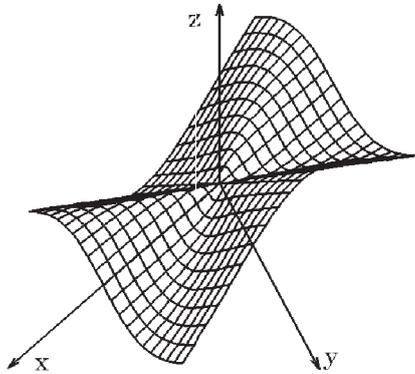
$$\lim_{h \rightarrow 0} f_x(0, h) = 0 \neq 1 \Rightarrow f_x \text{ ist nicht stetig in } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

f ist nicht differenzierbar in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn

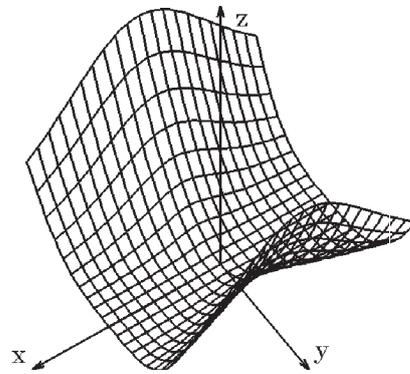
Annahme: f sei differenzierbar in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \langle \text{grad } f(0, 0), \vec{x} - \vec{0} \rangle}{|\vec{x} - \vec{0}|} = 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

z.B.: $(x, y) = (h, h)$ mit $h > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2} - h}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h/2}{\sqrt{2}h} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$, Wid.



$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$



$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_x(x, y) = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_x$ ist stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| \leq 2|x| \left| \frac{x^4 + 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 2|x| \rightarrow 0 \quad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_x$ ist auch stetig in $\vec{0} \Rightarrow f_x$ ist stetig in \mathbb{R}^2 .

Analog: f_y ist stetig in \mathbb{R}^2

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar in \mathbb{R}^2 (mit $\text{grad } f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Anwendung: **Differentiation von parameterabhängigen Integralen**

Satz 8.24 :

a) Sei $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d \right\}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in I , $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_c^d f(x, t) dt. \quad \text{Dann gilt:}$$

$\alpha)$ F ist *stetig* in $[a, b]$.

$\beta)$ Existiert zusätzlich f_x in I und ist f_x *stetig* in I , so ist F in $[a, b]$ *differenzierbar* mit

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, t) dt$$

b) Sei $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq t < \infty \right\}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in I , $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_c^\infty f(x, t) dt. \text{ Dann gilt:}$$

$\alpha)$ Ist das Integral $\int_c^\infty f(x, t) dt$ *gleichmäßig konvergent* in $[a, b]$, so ist F *stetig* in $[a, b]$ mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^\infty f(x, t) dt = \int_c^\infty \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) dt = \int_c^\infty f(x_0, t) dt$$

(Grenzwert und Integral dürfen vertauscht werden).

$\beta)$ Existiert zusätzlich f_x in I und ist f_x *stetig* in I und das Integral $\int_c^\infty f_x(x, t) dt$ *gleichmäßig konvergent* in $[a, b]$, so ist F in $[a, b]$ *differenzierbar* mit

$$F'(x) = \int_c^\infty f_x(x, t) dt$$

Diese Aussage gilt analog, falls die uneigentliche Stelle an der unteren Grenze des Integrals ist.

Zusatz: Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Gilt $|f(x, t)| \leq g(t) \quad \forall x \in [a, b], t \geq c$ und konvergiert $\int_c^\infty g(t) dt$, so ist das Integral $\int_c^\infty f(x, t) dt$ *gleichmäßig konvergent* in $[a, b]$.

Beweis zu Satz 8.24:

a) $\alpha)$ Sei $x_0 \in [a, b]$, $\epsilon > 0 \Rightarrow |F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \int_c^d |f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)| dt$
 $\leq \max_{t \in [c, d]} |f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)|(d - c) < \epsilon(d - c) \quad \forall |h| < \delta$, da f stetig in I

(I abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig in I).

$\beta)$ $\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_c^d f_x(x_0, t) dt \right|$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_c^d \left(\frac{f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)}{h} - f_x(x_0, t) \right) dt \right| \\
&= \left| \int_c^d (f_x(x_0 + \varrho h, t) - f_x(x_0, t)) dt \right| < \epsilon(d - c) \quad \forall |h| < \delta, \text{ da } f_x \text{ stetig in } I \\
&\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \int_c^d f_x(x_0, t) dt.
\end{aligned}$$

b) folgt sofort aus a) mit Hilfe von Satz 5.19, S.148, und Satz 5.32, S.158.

Beispiele

1. $F(x) = \int_0^1 \sin(x - t) \cos t dt$, Integrand stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \sin(x - t) \cos t dt = \int_0^1 \cos(x - t) \cos t dt.$$

2. $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt) dt$

$$|f(x, t)| = |e^{-t^2} \cos(xt)| \leq e^{-t^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \text{ und}$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ konvergent (vgl. S.220),}$$

$$|f_x(x, t)| = |-te^{-t^2} \sin(xt)| \leq te^{-t^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \text{ und}$$

$$\int_0^\infty te^{-t^2} dt = \left. \frac{-1}{2} e^{-t^2} \right|_0^\infty = \frac{1}{2} \text{ konvergent } \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f(x, t) dt \text{ und } \int_0^\infty f_x(x, t) dt \text{ sind gleichm\u00e4\u00dfig konvergent in } \mathbb{R},$$

da auch f und f_x stetig in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$F'(x) = \int_0^\infty -te^{-t^2} \sin(xt) dt, \quad \text{partielle Integration ergibt:}$$

$$F'(x) = \left. \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_{t=0}^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2} x \cos(xt) dt = -\frac{x}{2} F(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{x}{2} F(x) \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{x}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{F} dF = -\int \frac{x}{2} dx$$

$$\Rightarrow \ln |F| = -\frac{x^2}{4} + c_1 \Rightarrow F(x) = c e^{-x^2/4}.$$

$$\text{Da } F(0) = c = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt) dt = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow$$

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$3. F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \quad , \quad x \in (0, \infty).$$

Da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow$ Integrand $f(x, t)$ ist stetig in \mathbb{R}^2 .

Da $|\frac{\sin t}{t}| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow |e^{-xt} \frac{\sin t}{t}| \leq e^{-\alpha t} \quad \forall x \geq \alpha > 0, t \geq 0,$
 $(\alpha > 0 \text{ fest}).$

Da $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt$ konvergent für $\alpha > 0 \Rightarrow$

$\int_0^{\infty} f(x, t) dt$ ist gleichmäßig konvergent in (α, ∞) ,

$|f_x(x, t)| = |-e^{-xt} \sin t| \leq e^{-\alpha t} \quad \forall x \geq \alpha > 0, t \geq 0 \Rightarrow$

$\int_0^{\infty} f_x(x, t) dt$ ist gleichmäßig konvergent in (α, ∞)

$$\Rightarrow F'(x) = \int_0^{\infty} -e^{-xt} \sin t dt = -\left. \frac{-x \sin t - \cos t}{x^2 + 1} e^{-xt} \right]_{t=0}^{\infty} = -\frac{1}{x^2 + 1} \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow F(x) = -\arctan x + c.$$

$$\text{Da } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = c - \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} \quad , \quad \forall x > 0$$

Wir werden später zeigen, daß $F(x)$ die Laplace-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \text{ ist.}$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert in einer Teilmenge $D \subset M$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf D . Ist diese Funktion in einem inneren Punkt $\vec{x}_0 \in D$ partiell differenzierbar nach x_j , so schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\vec{x}_0) = f_{x_i x_j} (\vec{x}_0).$$

Existiert $f_{x_i x_j}$ auf einer Teilmenge $\tilde{D} \subset D$, und existiert die partielle Ableitung nach x_k , so schreiben wir $f_{x_i x_j x_k}$. Diesen Prozeß können wir fortsetzen, und wir erhalten allgemein partielle Ableitungen l -ter Ordnung.

Definition 8.25 :

a) Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert in einem inneren Punkt $\vec{x}_0 \in D(f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{l-1}}})$

für ein i_l mit $l > 1$ die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_{i_l}} (f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{l-1}}}) (\vec{x}_0)$, so heißt diese die *partielle Ableitung l -ter Ordnung* von f in \vec{x}_0 nach $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}$ und wird mit

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}} (\vec{x}_0) = \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}} (\vec{x}_0) \text{ bezeichnet.}$$

b) Existieren für f in M alle partiellen Ableitungen bis zur l -ten Ordnung und sind diese in M stetig, so heißt f in M l -mal stetig (partiell) differenzierbar, und wir schreiben

$$f \in C^l(M)$$

Beispiele

1. $f(x, y, z) = 4xyz - x^2 + y^2$

$$f_x = 4yz - 2x \quad , \quad f_y = 4xz + 2y \quad , \quad f_z = 4xy$$

$$f_{xx} = -2 \quad , \quad f_{xy} = 4z \quad , \quad f_{xz} = 4y$$

$$f_{yx} = 4z \quad , \quad f_{yy} = 2 \quad , \quad f_{yz} = 4x$$

$$f_{zx} = 4y \quad , \quad f_{zy} = 4x \quad , \quad f_{zz} = 0$$

$$\Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \text{es gilt sogar } f \in C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Die partiellen Ableitungen der Ordnung $l \geq 4$ sind alle gleich 0.

In diesem Beispiel gilt: $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{yz} = f_{zy}$, dh.: die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist vertauschbar. Daß dies nicht immer gilt, zeigt folgendes Beispiel:

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Es gilt: $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$, denn:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 .$$

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$f_x(x, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_x(x, y) = \begin{cases} y \cdot \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Analog erhält man

$$f_y(x, y) = \begin{cases} x \cdot \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & , \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

In diesem Fall sind f_{xy} und f_{yx} in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht stetig. Es gilt aber:

Satz 8.26 : Ist $f \in C^l(M)$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $l \geq 2$ (dh.: die *partiellen Ableitungen* l -ter Ordnung sind *stetig* in M), so ist jede partielle Ableitung l -ter Ordnung *unabhängig von der Reihenfolge* der x_i , dh. es gilt:

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}} = f_{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_l}}$$

wenn (j_1, j_2, \dots, j_l) eine Permutation von (i_1, i_2, \dots, i_l) ist.

Spezialfall $l = 2$

$$f \in C^2(M) \Rightarrow f_{xy} = f_{yx} \text{ in } M.$$

Beweis (Spezialfall)

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in M$, $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir setzen $\varphi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$, $\psi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$
 \Rightarrow (nach dem Mittelwertsatz mit $0 < \delta_1 < 1$)

$$\begin{aligned} \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) &= k\varphi'(y_0 + \delta_1 k) = k[f_y(x_0 + h, y_0 + \delta_1 k) - f_y(x_0, y_0 + \delta_1 k)] \\ &= khf_{yx}(x_0 + \delta_2 h, y_0 + \delta_1 k) \quad (\text{wieder Mittelwertsatz mit } 0 < \delta_2 < 1). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi(x_0 + h) - \psi(x_0) &= h\psi'(x_0 + \delta_3 h) = h[f_x(x_0 + \delta_3 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \delta_3 h, y_0)] \\ &= hkf_{xy}(x_0 + \delta_3 h, y_0 + \delta_4 k) \quad (\text{mit } 0 < \delta_3, \delta_4 < 1). \end{aligned}$$

Da $\psi(x_0 + h) - \psi(x_0) = \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0)$, folgt nach Division durch hk

$$f_{xy}(x_0 + \delta_3 h, y_0 + \delta_4 k) = f_{yx}(x_0 + \delta_2 h, y_0 + \delta_1 k).$$

Da f_{xy} und f_{yx} stetig in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, folgt für $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Bemerkung : Für $\frac{\partial^l f}{\partial x_i \partial x_i \dots \partial x_i}$ schreiben wir $\frac{\partial^l f}{\partial x_i^l}$.

Bisher haben wir nur reellwertige Funktionen betrachtet, also Funktionen, deren Funktionswerte reelle Zahlen sind. In der Anwendung kommen aber auch Funktionen vor, deren Funktionswerte Vektoren sind, also aus \mathbb{R}^m (Vektorfelder). Wir wollen nun also allgemein Funktionen $\vec{f}: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ behandeln, also

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit}$$

$f_i: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die i -te *Koordinatenfunktion* von f .

Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m

Sei $\vec{f} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$ und $f_i : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die i -te

Koordinatenfunktion von \vec{f} , also $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$.

Beispiel

$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_1(x, y) = 2x + y$, $f_2(x, y) = 3x^2 + y^2$, $f_3(x, y) = xy$.

Wie bei den reellwertigen Funktionen definieren wir Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

Definition 8.27 : Sei $\vec{f} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\vec{x}_0 \in M$.

a) \vec{f} heißt *stetig* in \vec{x}_0

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ mit $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)| < \epsilon \quad \forall |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \quad (\vec{x} \in M)$.

b) \vec{f} heißt *differenzierbar* in \vec{x}_0 (\vec{x}_0 innerer Punkt von M)

\Leftrightarrow Es existiert eine (m, n) - Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ und eine Umgebung $U(\vec{x}_0) \subset M$ mit

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = \vec{0} \quad , \quad (\vec{x} \in U(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\})$$

Da eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{R}^m genau dann konvergiert, wenn die einzelnen Koordinaten konvergieren, folgt sofort:

Satz 8.28 : Sei $\vec{f} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ und \vec{x}_0 innerer Punkt von M . Dann gilt:

\vec{f} ist *stetig* in \vec{x}_0

\Leftrightarrow Alle Koordinatenfunktionen f_i sind *stetig* in \vec{x}_0 .

\vec{f} ist *differenzierbar* in \vec{x}_0

\Leftrightarrow Alle Koordinatenfunktionen f_i sind *differenzierbar* in \vec{x}_0 .

In diesem Fall gilt für die Matrix $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \quad , \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Da die Matrix A in der Anwendung häufig auftritt, definieren wir:

Definition 8.29 : Sei $\vec{f}: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ und \vec{x}_0 innerer Punkt von M .

a) Existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, so heißt

$$A(\vec{x}_0) = \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

die *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* von \vec{f} an der Stelle \vec{x}_0 .

Wir schreiben auch

$$A(\vec{x}_0) = \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\vec{x}_0).$$

b) Ist $m = n$, so ist $A(\vec{x}_0)$ eine quadratische Matrix, deren Determinante als *Funktionaldeterminante* oder *Jacobi-Determinante* bezeichnet wird. Wir schreiben hierfür $\det\left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)\right) = \det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\vec{x}_0)\right)$.

c) Ist $m = n$, so heißt die *Spur* der quadratischen Funktionalmatrix: *Divergenz* von \vec{f} in \vec{x}_0

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_0)$$

Bemerkung : Ist $m = 1$, also f reellwertig, so gilt

$$A(\vec{x}_0) = \frac{df}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0))^T.$$

Beispiele

$$1. \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y)}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \varphi)}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\det\left(\frac{d\vec{f}}{d(r, \varphi)}(r, \varphi)\right) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$\operatorname{div} \vec{f}(r, \varphi) = \cos \varphi + r \cos \varphi = (1 + r) \cos \varphi.$$

Analog zum eindimensionalen Fall gilt auch für Abbildungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kettenregel:

Satz 8.30 : Kettenregel

Sei $\vec{f}: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{g}: \tilde{M} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit $\vec{f}(M) \subset \tilde{M}$ und $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit

$$\vec{h}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$$

Sei $\vec{x}_0 \in M$ innerer Punkt und $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0) \in \tilde{M}$ innerer Punkt, \vec{f} differenzierbar in \vec{x}_0 und \vec{g} differenzierbar in $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$, dann gilt:

$\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ ist differenzierbar in \vec{x}_0 mit

$$\frac{d\vec{h}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)$$

(Produkt der Funktionalmatrizen).

Beweis :

Mit $B = \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}(\vec{y}_0)$ setzen wir für $\vec{y} \in \tilde{M}$

$$\vec{g}^*(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}_0) - B(\vec{y} - \vec{y}_0)}{|\vec{y} - \vec{y}_0|} & , \text{ falls } \vec{y} \neq \vec{y}_0 \\ \vec{0} & , \text{ falls } \vec{y} = \vec{y}_0 . \end{cases}$$

Da \vec{g} differenzierbar in $\vec{y}_0 \Rightarrow \lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{y}_0} \vec{g}^*(\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}_0) = B(\vec{y} - \vec{y}_0) + |\vec{y} - \vec{y}_0| \vec{g}^*(\vec{y}) \quad \forall \vec{y} \in U(\vec{y}_0).$$

Setzen wir $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, so gilt:

$$\vec{h}(\vec{x}) - \vec{h}(\vec{x}_0) = B(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) + |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)| \vec{g}^*(\vec{f}(\vec{x})).$$

Mit $\vec{x} = \vec{x}_0 + k\vec{e}_i$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt hieraus

$$\frac{\vec{h}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i) - \vec{h}(\vec{x}_0)}{k} = B \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{k} + \frac{|\vec{f}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)|}{k} \vec{g}^*(\vec{f}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i)).$$

Für $k \rightarrow 0$ gilt $\vec{f}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i) \rightarrow \vec{f}(\vec{x}_0)$, (da \vec{f} stetig in \vec{x}_0), und $\vec{g}^*(\vec{f}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i)) \rightarrow \vec{0}$ und

$$\frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + k\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{k} \rightarrow \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Also gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{h}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0) = \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0).$$

Daß \vec{h} differenzierbar, siehe Literatur.

Bemerkung : Ist $n = l = 1$, also $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,
 $h = g \circ \vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$h(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, \vec{f} und g differenzierbar \Rightarrow

$$h'(x) = \frac{dh}{dx}(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(\vec{f}(x)), \frac{\partial g}{\partial y_2}(\vec{f}(x)), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(\vec{f}(x)) \right) \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx}(x) \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dx}(x) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$h'(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i}(\vec{f}(x)) \frac{df_i}{dx}(x) = \left\langle \text{grad } g(\vec{f}(x)), \frac{d\vec{f}}{dx}(x) \right\rangle$$

Beispiele

1. $n = l = 1$, $m = 2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g \in C^2(\mathbb{R}^2), \vec{f} \in C^2(\mathbb{R})$$

$$h(t) = g(\varphi(t), \psi(t)) \Rightarrow h'(t) = g_x \cdot \varphi'(t) + g_y \cdot \psi'(t)$$

$$\begin{aligned} h'' &= (g_{xx} \cdot \varphi' + g_{xy} \cdot \psi')\varphi' + g_x \cdot \varphi'' + (g_{yx} \cdot \varphi' + g_{yy} \cdot \psi')\psi' + g_y \cdot \psi'' \\ &= g_{xx} \cdot (\varphi')^2 + 2g_{xy} \cdot \varphi' \psi' + g_{yy} \cdot (\psi')^2 + g_x \cdot \varphi'' + g_y \cdot \psi''. \end{aligned}$$

2. $\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix}$, $\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

$$\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f} \quad \text{mit} \quad \vec{h}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ r \cos \varphi - r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h_1(r, \varphi) = r^2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad h_2(r, \varphi) = r(\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow (h_1)_r = 2r \cos \varphi \sin \varphi, \quad (h_1)_\varphi = r^2(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$(h_2)_r = \cos \varphi - \sin \varphi, \quad (h_2)_\varphi = -r(\sin \varphi + \cos \varphi)$$

oder mit Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(r, \varphi)} &= \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \sin \varphi & r \cos \varphi \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \cos \varphi \sin \varphi & r^2(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ \cos \varphi - \sin \varphi & -r(\sin \varphi + \cos \varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi = f_1(r, \varphi)$$

$$y = r \sin \varphi = f_2(r, \varphi)$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$h(r, \varphi) = g(x, y) = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, dann gilt:

$$h_r = g_x x_r + g_y y_r = g_x \cos \varphi + g_y \sin \varphi$$

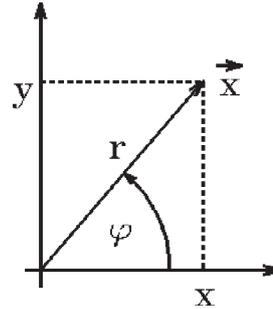
$$h_\varphi = g_x x_\varphi + g_y y_\varphi = g_x \cdot (-r \sin \varphi) + g_y \cdot (r \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} h_{rr} &= (g_{xx} x_r + g_{xy} y_r) x_r + g_x x_{rr} + (g_{yx} x_r + g_{yy} y_r) y_r + g_y y_{rr} \\ &= g_{xx} (x_r)^2 + 2g_{xy} x_r y_r + g_{yy} (y_r)^2 + g_x x_{rr} + g_y y_{rr} \\ &= g_{xx} \cos^2 \varphi + 2g_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + g_{yy} \sin^2 \varphi, \quad (\text{da } x_{rr} = 0 \text{ und } y_{rr} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\varphi\varphi} &= (g_{xx} x_\varphi + g_{xy} y_\varphi) x_\varphi + g_x x_{\varphi\varphi} + (g_{yx} x_\varphi + g_{yy} y_\varphi) y_\varphi + g_y y_{\varphi\varphi} \\ &= g_{xx} (x_\varphi)^2 + 2g_{xy} x_\varphi y_\varphi + g_{yy} (y_\varphi)^2 + g_x x_{\varphi\varphi} + g_y y_{\varphi\varphi} \\ &= g_{xx} (r^2 \sin^2 \varphi) + 2g_{xy} (-r^2 \sin \varphi \cos \varphi) + g_{yy} (r^2 \cos^2 \varphi) - r g_x \cos \varphi - r g_y \sin \varphi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = h_{rr} + \frac{1}{r^2} h_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} h_r$$

Laplace-Operator in Polarkoordinaten.



4. Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}$$

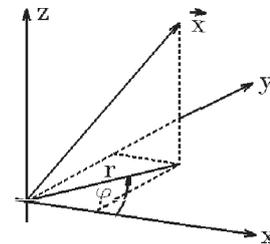
$$h(r, \varphi, z) = g(x, y, z) = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, dann gilt:

$$h_z = g_z, \quad h_{zz} = g_{zz} \Rightarrow$$

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r^2} h_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} h_r + h_{zz}$$

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten.



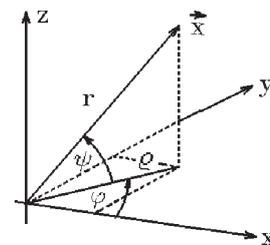
5. Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \cos \psi$$

$$y = r \sin \varphi \cos \psi$$

$$z = r \sin \psi$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$



$$h(r, \varphi, \psi) = g(x, y, z) = g(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi).$$

Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, dann gilt:

Setze zunächst: $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$ und

$$f(\varrho, \varphi, z) = g(x, y, z) = g(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z) \Rightarrow \text{(nach Beispiel 4.)}$$

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = f_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} f_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho} f_{\varphi} + f_{zz}.$$

Setzen wir nun: $\varrho = r \cos \psi$, $\varphi = \varphi$, $z = r \sin \psi$, so erhalten wir nach Beispiel 3. für

$$h(r, \varphi, \psi) = f(\varrho, \varphi, z) = f(r \cos \psi, \varphi, r \sin \psi) = g(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)$$

$$f_{\varrho\varrho} + f_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r^2} h_{\psi\psi} + \frac{1}{r} h_r, \quad f_{\varphi\varphi} = h_{\varphi\varphi}.$$

Also erhalten wir insgesamt:

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r^2} h_{\psi\psi} + \frac{1}{r} h_r + \frac{1}{\varrho^2} h_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho} f_{\varphi}.$$

Da $h_r = f_{\varrho} \varrho_r + f_z z_r = f_{\varrho} \cos \psi + f_z \sin \psi$

$$h_{\psi} = f_{\varrho} \varrho_{\psi} + f_z z_{\psi} = f_{\varrho} \cdot (-r \sin \psi) + f_z \cdot (r \cos \psi) \Rightarrow$$

$$\left((\cos \psi) \cdot 1.\text{te Zeile} - \frac{\sin \psi}{r} \cdot 2.\text{te Zeile} \right)$$

$$f_{\varrho} = (\cos \psi) h_r - \frac{\sin \psi}{r} h_{\psi} \Rightarrow \frac{1}{\varrho} f_{\varrho} = \frac{1}{r} h_r - \frac{\tan \psi}{r^2} h_{\psi}.$$

Also folgt insgesamt:

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r^2} h_{\psi\psi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \psi} h_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r} h_r - \frac{\tan \psi}{r^2} h_{\psi}$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten.

Bemerkung : In der Anwendung wird oft bei den Kugelkoordinaten anstelle des Winkels ψ (gemessen von der (x, y) -Ebene aus) der Winkel ϑ (gemessen von der positiven z -Achse aus) benutzt. Es gilt dann:

$$\psi + \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \psi = \cos \vartheta, \quad \cos \psi = \sin \vartheta$$

$$0 < \vartheta < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Also muß überall $\cos \psi$ durch $\sin \vartheta$

und umgekehrt

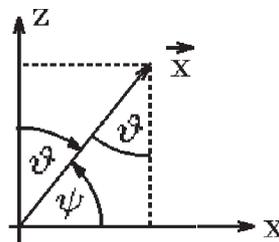
$\sin \psi$ durch $\cos \vartheta$ ersetzt werden.

Man erhält dann:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$z = r \cos \vartheta.$$



Der Laplace-Operator lautet dann:

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = h_{rr} + \frac{1}{r^2} h_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} h_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r} h_r + \frac{\cot \vartheta}{r^2} h_{\vartheta}.$$

Anwendungsbeispiel

Gesucht: $g \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\})$ mit $\Delta g = 0$, wobei g nur abhängig von r sein soll, dh.: $g(r)$. Schreiben wir den Laplace-Operator Δg in Kugelkoordinaten um und berücksichtigen, daß die Ableitungen nach den Winkeln = 0 sind (da g unabhängig von den Winkeln), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta g &= g_{rr} + \frac{2}{r}g_r = 0 \Rightarrow g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) = 0 \\ \Rightarrow \int \frac{1}{g'} dg' &= - \int \frac{2}{r} dr \Rightarrow \ln |g'| = -2 \ln r + c_1 \Rightarrow g'(r) = \frac{c_2}{r^2} \Rightarrow \\ g(r) &= \frac{c}{r} + d, \quad c, d \in \mathbb{R}, \text{ ist die allgemeine Lösung.} \end{aligned}$$

Anwendung: Differentiation eines parameterabhängigen Integrals

Satz 8.31 : Sei $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq t \leq \psi(x) \right\}$,

φ, ψ stetig differenzierbar in $[a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar in I (also f_x und f_t stetig in I).

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt$. Dann gilt:

F ist differenzierbar in $[a, b]$ mit

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, t) dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

Spezialfall: $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ (Stammfunktion von f).

Beweis : Wir benutzen die Substitution

$$t = \varphi(x) + s(\psi(x) - \varphi(x)), \quad dt = (\psi(x) - \varphi(x))ds,$$

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt = \int_0^1 f(x, \varphi(x) + s(\psi(x) - \varphi(x))) (\psi(x) - \varphi(x)) ds$$

$$= (\psi(x) - \varphi(x)) \int_0^1 g(x, s) ds \quad \text{mit } g(x, s) = f(x, \varphi(x) + s(\psi(x) - \varphi(x)))$$

$$\text{und } g_x(x, s) = f_x + f_t \cdot (\varphi' + s(\psi' - \varphi')),$$

$$g \text{ und } g_x \text{ sind stetig in } \tilde{I} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, 0 \leq s \leq 1 \right\}.$$

Nach Satz 8.24, S.266, gilt also

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi'(x) - \varphi'(x)) \int_0^1 g(x, s) ds + (\psi(x) - \varphi(x)) \int_0^1 g_x(x, s) ds \\ &= (\psi' - \varphi') \int_0^1 g(x, s) ds + (\psi - \varphi) \int_0^1 f_x(x, \varphi + s(\psi - \varphi)) ds + \varphi' \int_0^1 (\psi - \varphi) f_t ds \\ &\quad + (\psi' - \varphi') \int_0^1 (\psi - \varphi) f_t \cdot s ds. \end{aligned}$$

Da $g_s = (\psi - \varphi) f_t \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (\psi' - \varphi') \int_0^1 (g + s g_s) ds + \varphi' \int_0^1 g_s ds + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, t) dt \\
&= (\psi' - \varphi') \left[s g \right]_{s=0}^1 + \varphi' \left[s g_s \right]_{s=0}^1 + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, t) dt \\
&= (\psi' - \varphi') g(x, 1) + \varphi' g(x, 1) - \varphi' g(x, 0) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, t) dt \\
&= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, t) dt + g(x, 1) \psi'(x) - g(x, 0) \varphi'(x) \Rightarrow \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

Beispiele

- $F(x) = \int_0^x (x-t)^2 \sin t dt$ (Vor. erfüllt) \Rightarrow
 $F'(x) = \int_0^x 2(x-t) \sin t dt + (x-t)^2 \sin t \Big|_{t=x} \cdot 1 = \int_0^x 2(x-t) \sin t dt$
 $F''(x) = \int_0^x 2 \sin t dt + 2(x-t) \sin t \Big|_{t=x} \cdot 1 = -2 \cos t \Big|_{t=0}^x = 2(1 - \cos x).$
- $y(x) = \int_{x_0}^x u(x-t) f(t) dt$ mit $u(0) = 0$ (vgl. Satz 7.11, S.249)
 $\Rightarrow y'(x) = \int_{x_0}^x u'(x-t) f(t) dt + u(x-t) f(t) \Big|_{t=x} \cdot 1 = \int_{x_0}^x u'(x-t) f(t) dt$
 (da $u(0) = 0$).

Wir beweisen nun die Verallgemeinerungen des *Mittelwertsatzes* und des *Satzes von Taylor*:

Satz 8.32 : Mittelwertsatz

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M offen, $f \in C^1(M)$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$ und $\{\vec{x} = \vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) : t \in [0, 1]\} \subset M$
 (dh.: die Verbindungsstrecke zwischen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 liegt in M).

Dann existiert ein $0 < \delta < 1$ mit

$$f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) = \langle \text{grad } f(\vec{x}_1 + \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)), \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \rangle$$

Beweis :

Sei $F(t) = f(\vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1))$, also $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Rightarrow F$ ist stetig in $[0, 1]$, differenzierbar in $(0, 1)$
 $\Rightarrow \exists \delta$ mit $0 < \delta < 1$ und $F(1) - F(0) = F'(\delta)(1 - 0) = F'(\delta)$ (Mittelwertsatz).
 Da $F'(t) = \langle \text{grad } f(\vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)), \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \rangle$ (Kettenregel)
 \Rightarrow Behauptung.

Spezialfälle

$n = 1$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \delta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) \quad (\text{früherer Mittelwertsatz}).$$

$n = 2$:

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = hf_x(x + \delta h, y + \delta k) + kf_y(x + \delta h, y + \delta k)$$

$$\text{mit } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x + h \\ y + k \end{pmatrix}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Anwendung: Fehlerrechnung

$z = f(x, y)$, x und y werden gemessen mit einem Fehler Δx bzw. Δy .
Wie groß ist der Fehler Δz ?

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta x f_x + \Delta y f_y$$

$$\Rightarrow |\Delta z| \leq \max \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y|.$$

$$\text{z.B.: } R = R(U, I) = \frac{U}{I} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}, \quad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

$$\Rightarrow |\Delta R| \leq \max \frac{1}{|I|} |\Delta U| + \max \left| \frac{U}{I^2} \right| |\Delta I|$$

$$\Rightarrow |\Delta R| \approx \frac{1}{|I|} |\Delta U| + \left| \frac{U}{I^2} \right| |\Delta I|.$$

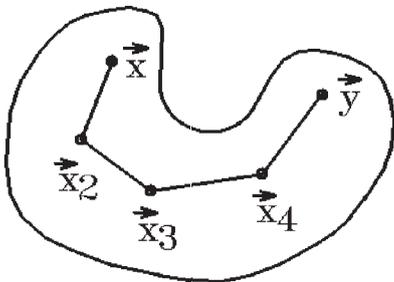
Für den nächsten Satz benötigen wir noch die folgenden Definitionen:

Definition 8.33 : $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*, wenn

G *offen* und *zusammenhängend*.

Definition 8.34 : $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in G$ Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \in G$ existieren mit $\vec{x} = \vec{x}_1$, $\vec{x}_m = \vec{y}$ und die Verbindungsstrecken $\{\vec{x}_i + t(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) : 0 \leq t \leq 1\}$ für alle $1 \leq i \leq m - 1$ ganz in G liegen.

Dh.: Je 2 Punkte lassen sich in G durch einen Polygonzug verbinden.



zusammenhängend



nicht zusammenhängend

Satz 8.35 : $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G Gebiet, $f \in C^1(G)$. Dann gilt:
 f ist konstant in $G \Leftrightarrow \text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in G$.

Beweis :

" \Rightarrow " klar

" \Leftarrow " Sei $\vec{x}, \vec{y} \in G \Rightarrow \exists \vec{x}_1 = \vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m = \vec{y}$ mit
 $\{\vec{x}_i + t(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) : 0 \leq t \leq 1\} \subset G$. Auf \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1} Mittelwertsatz anwenden
 $\Rightarrow f(\vec{x}_i) = f(\vec{x}_{i+1}) \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \quad \forall \vec{y} \in G$
 $\Rightarrow f$ konstant in G .

Beispiel

$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x > 0, y > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y}$$

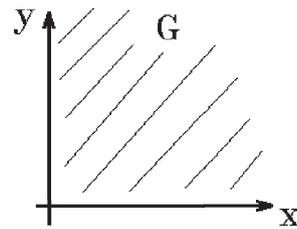
$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow \text{grad } f(x, y) = \vec{0}$ in $G \Rightarrow f$ konstant in G .

$$f(1, 1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x, y > 0$$



Definition 8.36 : *Polynom von mehreren Variablen*

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^N \dots \sum_{i_n=0}^N a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

mit $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \mathbb{R}$ heißt *Polynom von n Variablen*.

Die größte der Zahlen $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ mit $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \neq 0$ heißt Grad p .

Beispiel

$p(x, y, z) = 2x^2yz^3 + 3xy^2z - 6xz + 3$ ist ein Polynom vom Grad 6.

Für den Satz von Taylor benötigen wir den Differentialoperator ∇ oder grad :

$$\nabla = \text{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ mit } \nabla f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}).$$

$$\text{Mit } \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ sei } \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} .$$

Allgemein für $k \in \mathbb{N}$:

$$\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^k = \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} .$$

Spezialfall: $n = 2$, $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^2(M)$

$$\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^2 f = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h_1^2 f_{xx} + 2h_1 h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}$$

Ist $f \in C^3(M)$, so gilt:

$$\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^3 f = h_1^3 f_{xxx} + 3h_1^2 h_2 f_{xxy} + 3h_1 h_2^2 f_{xyy} + h_2^3 f_{yyy}$$

Satz 8.37 : *Satz von Taylor*

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M offen , $f \in C^{m+1}(M)$.

Seien $\vec{x}, \vec{x}_0 \in M$ mit $\{\vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset M$.

Dann läßt sich f darstellen durch

$$f(\vec{x}) = T_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}) + R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x})$$

wobei $T_{m, \vec{x}_0}(\vec{x})$ das *Taylorpolynom* vom Grad m

$$T_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \text{grad} \rangle^k f(\vec{x}_0)$$

und $R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x})$ das *Restglied*

$$R_{m, \vec{x}_0}(\vec{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, \text{grad} \rangle^{m+1} f(\vec{x}_0 + \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)) , \quad 0 < \delta < 1$$

Beweis :

Wir setzen $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ und $F(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) = \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$$

$$F''(t) = \sum_{i=1}^n h_i \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \right) = \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^2 f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$$

$$\vdots$$

$$F^{(k)}(t) = \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^k f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$$

$$\Rightarrow F^{(k)}(0) = \langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^k f(\vec{x}_0).$$

F erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Taylor für eine Variable $\Rightarrow \exists \delta$ mit $0 < \delta < 1$ und

$$F(1) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) \cdot 1^k + \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\delta) \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Hierbei ist $\langle \vec{h}, \text{grad} \rangle^0 f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0)$.

Bemerkung : Ist $m = 0 \Rightarrow$ Mittelwertsatz.

Beispiel $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + ((x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y)_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{2}((x - x_0)^2 f_{xx} + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy} + (y - y_0)^2 f_{yy})_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{6}((x - x_0)^3 f_{xxx} + 3(x - x_0)^2(y - y_0)f_{xxy} + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 f_{xyy} + (y - y_0)^3 f_{yyy})_{(x_0, y_0)} \\ &+ R \end{aligned}$$

(Approximation durch Polynom 3.Grades).

Beispiel hierzu

$f(x, y) = ye^x$ entwickeln um $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f_x &= ye^x, & f_y &= e^x \\ f_{xx} &= ye^x, & f_{xy} &= e^x, & f_{yy} &= 0 \\ f_{xxx} &= ye^x, & f_{xxy} &= e^x, & f_{xyy} &= 0, & f_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

Jeweils an der Stelle $(0, 0)$ auswerten:

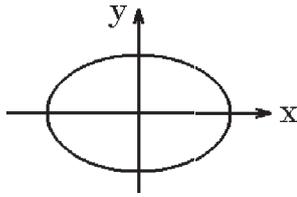
$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ f_x(0, 0) &= 0, & f_y(0, 0) &= 1 \\ f_{xx}(0, 0) &= 0, & f_{xy}(0, 0) &= 1, & f_{yy}(0, 0) &= 0 \\ f_{xxx}(0, 0) &= 0, & f_{xxy}(0, 0) &= 1, & f_{xyy}(0, 0) &= 0, & f_{yyy}(0, 0) &= 0 \Rightarrow \\ f(x, y) &= 0 + (x \cdot 0 + y \cdot 1) + \frac{1}{2}(x^2 \cdot 0 + 2xy \cdot 1 + y^2 \cdot 0) + \frac{1}{6}(x^3 \cdot 0 + 3x^2y \cdot 1 + 3xy^2 \cdot 0 + y^3 \cdot 0) + R \\ \Rightarrow f(x, y) &= ye^x = y + xy + \frac{1}{2}x^2y + R. \end{aligned}$$

Hier hätte man das Taylor-Polynom einfacher mit Hilfe der Potenzreihe von e^x folgendermaßen erhalten:

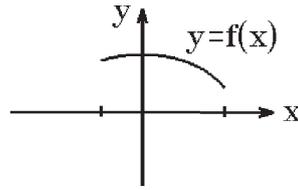
$$f(x, y) = ye^x = y(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y + R.$$

Implizite Funktionen

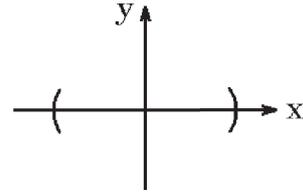
Oft sind Funktionen nur in impliziter Form gegeben, z.B.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipse). Die gesamte Ellipse ist nicht der Graph einer Funktion, aber "einzelne Abschnitte" der Ellipse können als Graph einer "impliziten Funktion" angesehen werden, z.B.:



Ellipse



Graph von $y = f(x)$



kein Graph einer Funktion

Die Frage lautet also: Wo kann man die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y auflösen ?

Wir wollen dieses Problem der "Auflösbarkeit von Gleichungen" in allgemeiner Form behandeln:

Gegeben: $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^m$, also $\vec{g}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Die Frage lautet: Existiert eine Funktion $\vec{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ und $\vec{g}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in U$?

Schon die Ellipsengleichung läßt nur eine lokale Auflösung zu, so daß wir i.A. eine Auflösung nur in gewissen Bereichen des \mathbb{R}^n (dh.: lokal) erwarten können, falls überhaupt eine Auflösung existiert.

Satz 8.38 : Implizite Funktionen

Sei $\vec{g}: M \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m)^T$ und sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ und U eine Umgebung von (\vec{x}_0, \vec{y}_0) mit $U \subset M$.

\vec{g} habe folgende Eigenschaften:

- a) $\vec{g} \in C^1(U)$ (dh.: $g_i \in C^1(U) \quad \forall i = 1, \dots, m$)
- b) $\vec{g}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$
- c) $\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right) \neq 0$.

Dann ist das Gleichungssystem $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ lokal nach \vec{y} auflösbar, dh.: es existiert eine Umgebung U_0 von \vec{x}_0 und eine Funktion $\vec{f}: U_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ und $\vec{g}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in U_0$.

Es ist $\vec{f} \in C^1(U_0)$ und es gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}) = - \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)$$

Spezialfall: $n = m = 1$:

Für diesen Spezialfall lautet der Satz:

$g : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1(U)$, U Umgebung von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

$g(x_0, y_0) = 0$, $g_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists f : U_0(x_0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0$ und $f \in C^1(U_0)$ mit

$$f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))} \quad \forall x \in U_0$$

oder anders geschrieben:

$$g_x(x, f(x)) + g_y(x, f(x))f'(x) = 0 \quad \forall x \in U_0 .$$

Beweis : (per Induktion über m)

Wir zeigen nur den Induktionsanfang für $m = 1$ (Induktionsschluß siehe Literatur).

$m = 1$: $g(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$ (o.B.d.A. > 0 , sonst Übergang zu $(-g)$)

$\Rightarrow g$ ist bzgl. y streng monoton wachsend.

Da $g(\vec{x}_0, y_0) = 0 \Rightarrow \exists \epsilon > 0$ mit $g(\vec{x}_0, y_0 - \epsilon) < 0$ und $g(\vec{x}_0, y_0 + \epsilon) > 0$.

Da g stetig in U , existiert ein $\delta > 0$ mit $g(\vec{x}, y_0 - \epsilon) < 0$ und $g(\vec{x}, y_0 + \epsilon) > 0 \quad \forall \vec{x}$ mit $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$. Durch evt. verkleinern von ϵ und δ können wir erreichen, daß

$\frac{\partial g}{\partial y}(\vec{x}, y) > 0 \quad \forall |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$ und $\forall |y - y_0| < \epsilon$, dh.: g ist streng monoton bzgl. y

für diese (\vec{x}, y) . Zu \vec{x} mit $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$ gibt es wegen der Stetigkeit von g und der strengen Monotonie bzgl. y genau ein y mit $|y - y_0| < \epsilon$ und $g(\vec{x}, y) = 0$. Setzen wir also $U_0 = \{\vec{x} : |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta\}$, so ist auf U_0 eine Funktion f definiert mit $y = f(\vec{x})$ und $g(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$.

Zu zeigen bleibt, daß $f \in C^1(U_0)$.

Nach Konstruktion ist $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| = |y - y_0| < \epsilon \quad \forall \vec{x} \in U_0 \Rightarrow f$ ist stetig in \vec{x}_0 (da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann). Für andere Punkte $\vec{x} \in U_0$ zeigt man die Stetigkeit, indem der Beweis noch einmal für $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ durchgeführt wird. $\Rightarrow f$ ist stetig in U_0 .

Sei $\vec{x} \in U_0$ und $h \neq 0$ genügend klein $\Rightarrow g(\vec{x} + h\vec{e}_i, f(\vec{x} + h\vec{e}_i)) = 0$.

Mit $k = f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x})$ gilt dann $g(\vec{x} + h\vec{e}_i, f(\vec{x}) + k) = 0$.

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $0 < \delta < 1$ mit

$$0 = g(\vec{x}, f(\vec{x})) + hg_{x_i}(\vec{x} + \delta h\vec{e}_i, f(\vec{x}) + \delta k) + kg_y(\vec{x} + \delta h\vec{e}_i, f(\vec{x}) + \delta k).$$

Da $g(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{k}{h} = \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h} = -\frac{g_{x_i}(\vec{x} + \delta h\vec{e}_i, f(\vec{x}) + \delta k)}{g_y(\vec{x} + \delta h\vec{e}_i, f(\vec{x}) + \delta k)} .$$

Mit $h \rightarrow 0$ geht auch $k \rightarrow 0$ (da f stetig). Da g_{x_i} und g_y stetig

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = -\frac{g_{x_i}(\vec{x}, f(\vec{x}))}{g_y(\vec{x}, f(\vec{x}))} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

f_{x_i} ist stetig, da g_{x_i} und g_y stetig und $g_y \neq 0 \Rightarrow$ Behauptung.

Merkregel: $g(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$, $\forall x \in U_0$, nach x_i differenzieren \Rightarrow
 $g_{x_i} + g_y \cdot f_{x_i} = 0$ (Kettenregel) \Rightarrow

$$f_{x_i} = -\frac{g_{x_i}}{g_y}$$

Höhere Ableitungen

Ist $g \in C^l(U)$, dann gilt auch $f \in C^l(U_0)$ (ohne Beweis).

Man kann dann auch die höheren Ableitungen der Funktion f implizit bestimmen.

Beispiel $n = 1$, $m = 1$

Sei also $g(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0$ und $g_y \neq 0 \Rightarrow$ (nach x differenzieren)

$g_x + g_y f' = 0 \quad \forall x \in U_0 \Rightarrow$ (nochmal differenzieren)

$g_{xx} + g_{xy} f' + (g_{yx} + g_{yy} f') f' + g_y f'' = 0 \quad \forall x \in U_0 \Rightarrow$

$$f''(x) = -\frac{1}{g_y} (g_{xx} + 2g_{xy} f' + g_{yy} f'^2)$$

Analog erhält man höhere Ableitungen.

Beispiel

1. $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $(a, b > 0)$

$g_y = \frac{2y}{b^2} \neq 0$, falls $y \neq 0$

\Rightarrow lokal auflösbar

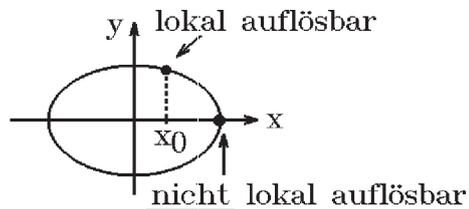
nach y , falls $y \neq 0$

$\Rightarrow \exists y(x)$ mit

$g(x, y(x)) = 0$ in $U_0(x_0)$,

falls $-a < x_0 < a$,

denn $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm a$.



Implizite Kurvendiskussion:

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$y = 0 \Leftrightarrow x = \pm a$ (Schnittpunkte mit der x -Achse)

$x = 0 \Leftrightarrow y = \pm b$ (Schnittpunkte mit der y -Achse)

Extrema

notwendiges Kriterium

$y' = 0$

Es gilt $y'(x) = -\frac{g_x}{g_y} = 0 \Leftrightarrow g_x = 0$ und $g_y \neq 0$ ($g_y \neq 0$ erfüllt, da lokal auflösbar)

$g_x = \frac{2x}{a^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = \pm b$ sind die möglichen Extremstellen

hinreichendes Kriterium

Ist $y'(x) = 0 \Rightarrow y''(x) = -\frac{g_{xx}}{g_y}$ (vgl. 2.Ableitung oben)

$$\Rightarrow y''(0) = -\frac{g_{xx}}{g_y} \Big|_{x=0} = -\frac{\frac{2}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} \Big|_{x=0} = -\frac{b^2}{a^2 y} \Big|_{y=\pm b}$$

$\Rightarrow y''(0) < 0$ für $y = b \Rightarrow$ relatives Maximum

$\Rightarrow y''(0) > 0$ für $y = -b \Rightarrow$ relatives Minimum.

Für $y \rightarrow 0, x \rightarrow \pm a \Rightarrow y'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow$ vertikale Tangente.

2. $\vec{g}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y + u^2 - v^2 \\ 4x + y^2 + u^2 + v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Wo ist $\vec{g}(x, y, u, v) = \vec{0}$ lokal nach (u, v) auflösbar ?

Es gilt: $\vec{g} \in C^1(\mathbb{R}^4)$ und

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)}\right) = 8uv \neq 0 \text{ für } u \neq 0, v \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{g}(x, y, u, v) = \vec{0}$ ist lokal nach (u, v) auflösbar, falls $u \neq 0$ und $v \neq 0$, und es gilt für die Funktionalmatrix der Auflösungsfunktion $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= -\left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)}\right) \Rightarrow \\ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= -\frac{1}{8uv} \begin{pmatrix} 2v & 2v \\ -2u & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 4 & 2y \end{pmatrix} = -\frac{1}{8uv} \begin{pmatrix} 4xv + 8v & 4v + 4vy \\ -4xu + 8u & -4u + 4uy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x+2}{2v} & -\frac{1+y}{2v} \\ \frac{x-2}{2v} & \frac{1-y}{2v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier müßten jetzt noch u und v durch x, y ersetzt werden. Dazu muß das GLS $\vec{g}(x, y, u, v) = \vec{0}$ nach u und v aufgelöst werden:

Beide Gleichungen addieren ergibt: $2u^2 = -(x^2 + 2y + 4x + y^2) \Rightarrow$

$u(x, y) = \pm\sqrt{-\left(\frac{x^2}{2} + y + 2x + \frac{y^2}{2}\right)}$, analog beide Gleichung subtrahieren ergibt

$v(x, y) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} + y - 2x - \frac{y^2}{2}}.$

Als Anwendung des Satzes über implizite Funktionen zeigen wir nun den Satz über Umkehrfunktionen:

Satz 8.39 : *Umkehrfunktion*

Sei $\vec{f}: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{x}_0 \in M, U$ Umgebung von \vec{x}_0 mit $U \subset M$. Es gelte:

a) $\vec{f} \in C^1(U)$ und b) $\det\left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)\right) \neq 0.$

Dann existiert eine Umgebung V_0 von $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ mit:

\vec{f} besitzt eine *Umkehrfunktion* $\vec{f}^{-1}: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, und es gilt $\vec{f}^{-1} \in C^1(V_0)$ mit

$$\boxed{\frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{y}}(\vec{y}) = \left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{f}^{-1}(\vec{y})) \right)^{-1}}$$

(Inverse der Funktionalmatrix).

Also \vec{f} ist unter diesen Voraussetzungen *lokal umkehrbar*.

Beweis :

$\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ muß lokal nach \vec{x} auflösbar sein. \vec{g} erfüllt die Vor. des Satzes 8.38, denn:

$$\vec{g}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}, \quad \det\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)\right) = \det\left(-\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_0)\right) \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{y} - \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ ist lokal nach \vec{x} auflösbar, dh.: es existiert eine Umgebung V_0 von \vec{y}_0 mit $\vec{f}^{-1} : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{f}^{-1} \in C^1(V_0)$, $\vec{y} - \vec{f}(\vec{f}^{-1}(\vec{y})) = \vec{0} \quad \forall \vec{y} \in V_0$ und

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{y}}(\vec{y}) &= -\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))\right)^{-1} \underbrace{\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))\right)}_{E \text{ Einheitsmatrix}} \\ &= \left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Beispiele

1. Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi = f_1(r, \varphi), \quad y = r \sin \varphi = f_2(r, \varphi), \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{f}(r, \varphi)$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \varphi)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right) = r \neq 0, \quad \text{falls } r \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{f}$ lokal umkehrbar, falls $r \neq 0$. Für die Umkehrfunktion $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \vec{f}^{-1}(x, y)$ gilt:

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right)^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad \varphi_x = -\frac{y}{r^2}, \quad \varphi_y = \frac{x}{r^2}.$$

Diese partiellen Ableitungen hätte man natürlich auch direkt bekommen können, denn es gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}.$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad \text{falls } x > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_x = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}, \quad \varphi_y = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2}.$$

Anwendung hierzu:

$$f(x, y) = h(r, \varphi) \quad (\text{Polarkoordinaten einsetzen})$$

$$\Rightarrow f_x = h_r r_x + h_\varphi \varphi_x = h_r \cdot \frac{x}{r} + h_\varphi \cdot \left(-\frac{y}{r^2}\right) \quad (\text{Kettenregel benutzen})$$

$$f_y = h_r r_y + h_\varphi \varphi_y = h_r \cdot \frac{y}{r} + h_\varphi \cdot \left(\frac{x}{r^2}\right).$$

2. Kugelkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \cos \psi = f_1(r, \varphi, \psi)$$

$$y = r \sin \varphi \cos \psi = f_2(r, \varphi, \psi)$$

$$z = r \sin \psi = f_3(r, \varphi, \psi)$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)}\right) = r^2 \cos \psi \neq 0, \text{ falls } r \neq 0 \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} &= \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{r^2 \cos \psi} \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \cos^2 \psi & r^2 \sin \varphi \cos^2 \psi & r^2 \sin \psi \cos \psi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ -r \cos \varphi \sin \psi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \cos \psi & r \cos^2 \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{\sin \varphi}{r \cos \psi} & \frac{\cos \varphi}{r \cos \psi} & 0 \\ -\frac{1}{r} \cos \varphi \sin \psi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \sin \psi & \frac{1}{r} \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ -\frac{\varrho^2}{xz} & \frac{\varrho^2}{yz} & 0 \\ -\frac{\varrho^2}{\varrho r^2} & -\frac{\varrho^2}{\varrho r^2} & \frac{\varrho}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ und } \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \psi$$

$$\Rightarrow r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r}$$

$$\varphi_x = -\frac{y}{\varrho^2}, \quad \varphi_y = \frac{x}{\varrho^2}, \quad \varphi_z = 0$$

$$\psi_x = -\frac{xz}{\varrho r^2}, \quad \psi_y = -\frac{yz}{\varrho r^2}, \quad \psi_z = \frac{\varrho}{r^2}.$$

Anwendung hierzu:

$$f(x, y, z) = h(r, \varphi, \psi) \quad (\text{Kugelkoordinaten einsetzen}) \Rightarrow$$

$$f_x = h_r r_x + h_\varphi \varphi_x + h_\psi \psi_x = h_r \cdot \frac{x}{r} + h_\varphi \cdot \left(-\frac{y}{\varrho^2}\right) + h_\psi \cdot \left(-\frac{xz}{\varrho r^2}\right)$$

$$f_y = h_r r_y + h_\varphi \varphi_y + h_\psi \psi_y = h_r \cdot \frac{y}{r} + h_\varphi \cdot \left(\frac{x}{\rho^2}\right) + h_\psi \cdot \left(-\frac{yz}{\rho r^2}\right)$$

$$f_z = h_r r_z + h_\varphi \varphi_z + h_\psi \psi_z = h_r \cdot \frac{z}{r} + h_\varphi \cdot 0 + h_\psi \cdot \left(\frac{\rho}{r^2}\right).$$

Extrema für Funktionen mehrerer Variabler

Definition 8.40 : relative Extrema

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

f besitzt in $\vec{x}_0 \in M$ ein *relatives Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es eine Umgebung U von \vec{x}_0 gibt mit $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ (bzw. \geq) $\forall \vec{x} \in U$.

Gilt $<$ (bzw. $>$) $\forall \vec{x} \in U \setminus \{\vec{x}_0\}$, so spricht man von einem *strengen* relativen Extremum.

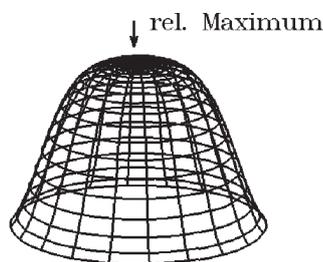
Satz 8.41 : notwendige Bedingung für relative Extrema

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in M$, $U \subset M$ Umgebung von \vec{x}_0 .

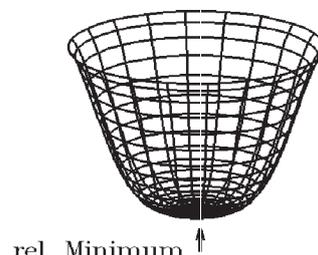
Ist $f \in C^1(U)$ und hat f in \vec{x}_0 ein *relatives Extremum* $\Rightarrow \text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Beweis :

f hat ja in jeder Koordinatenrichtung \vec{e}_i als Funktion der i -ten Koordinate in \vec{x}_0 ein relatives Extremum $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.



relatives Maximum



relatives Minimum

Für ein hinreichendes Kriterium benötigen wir die Begriffe "positiv definit", "negativ definit", "indefinit" aus der linearen Algebra (vgl. Def 2.54, S.86).

Sei $Q(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle$ eine *quadratische Form* mit einer reellen *symmetrischen* (n, n) -*Matrix* A . Dann heißt

A *positiv definit* $\Leftrightarrow Q(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,

A *negativ definit* $\Leftrightarrow Q(\vec{x}) < 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,

A *indefinit* $\Leftrightarrow Q(\vec{x})$ nimmt positive und negative Werte an,

A *positiv semidefinit* $\Leftrightarrow Q(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

A *negativ semidefinit* $\Leftrightarrow Q(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt (vgl. Satz 2.56, S.88)

A ist *positiv definit* \Leftrightarrow alle EW von A sind > 0

\Leftrightarrow alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i > 0$.

A ist *negativ definit* \Leftrightarrow alle EW von A sind < 0

\Leftrightarrow alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ haben wechselndes Vorzeichen: $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0$, usw.

A ist *indefinit* \Leftrightarrow es existieren positive und negative EW

\Leftrightarrow die Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ haben andere Vorzeichen als bei positiv- bzw. negativ-(semi)definit.

A ist *positiv semidefinit* und nicht positiv definit

\Leftrightarrow alle EW von A sind ≥ 0 und mindestens ein EW $= 0$

$\Rightarrow \det A = 0$ und alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i \geq 0$.

A ist *negativ semidefinit* und nicht negativ definit

\Leftrightarrow alle EW von A sind ≤ 0 und mindestens ein EW $= 0$

$\Rightarrow \det A = 0$ und alle Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ haben wechselndes Vorzeichen: $\det A_1 \leq 0, \det A_2 \geq 0, \det A_3 \leq 0$, usw.

Hierbei sind die Hauptunterdeterminanten $\det A_i$ folgendermaßen definiert:

$\det A_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ & \ddots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$ ist die i -te *Hauptunterdeterminante* von A , also

$\det A_1 = (a_{11})$, $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, \dots , $\det A_n = \det A$.

Spezialfall: $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Dann gilt: (vgl. Satz 2.55, S.87)

A *positiv definit* $\Leftrightarrow a > 0$ und $\det A > 0$.

A *negativ definit* $\Leftrightarrow a < 0$ und $\det A > 0$.

A *indefinit* $\Leftrightarrow \det A < 0$.

$\det A = 0 \Rightarrow A$ ist semidefinit.

Satz 8.42 : *hinreichendes Kriterium für Extrema*

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in M$, $U \subset M$ Umgebung von \vec{x}_0 .

Sei $f \in C^2(U)$ und sei $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Ist die Matrix $A(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

a) *positiv definit* $\Rightarrow f$ hat in \vec{x}_0 ein strenges relatives *Minimum*

b) *negativ definit* $\Rightarrow f$ hat in \vec{x}_0 ein strenges relatives *Maximum*

a) *indefinit* $\Rightarrow f$ hat in \vec{x}_0 *kein Extremum* (sondern Sattelpunkt).

Ist die Matrix A *semidefinit* \Rightarrow *keine Aussage möglich*.

Beweis :

Die Taylorformel liefert für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}_0 + \vec{h} \in U$

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) h_i h_j \quad \text{mit } 0 < \delta < 1 \quad (\text{da } \text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}).$$

Also gilt:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \langle A(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) \vec{h}, \vec{h} \rangle \quad \text{mit } 0 < \delta < 1 \quad \text{und mit der Matrix}$$

$$A(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) = (f_{x_i x_j}(\vec{x}_0 + \delta \vec{h})).$$

a) Ist $A(\vec{x}_0)$ positiv definit $\Rightarrow \langle A(\vec{x}_0) \vec{h}, \vec{h} \rangle > 0 \quad \forall \vec{h} \neq \vec{0}$.

Da $f_{x_i x_j}$ stetig in $U \Rightarrow$

$$\langle A(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) \vec{h}, \vec{h} \rangle > 0 \quad \forall 0 < |\vec{h}| < \epsilon$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}_0 + \vec{h}) > f(\vec{x}_0) \quad \forall 0 < |\vec{h}| < \epsilon$$

$\Rightarrow f$ hat in \vec{x}_0 ein strenges relatives Minimum.

b) Analog.

c) $\langle A(\vec{x}_0 + \delta \vec{h}) \vec{h}, \vec{h} \rangle$ nimmt positive und negative Werte an für $0 < |\vec{h}| < \epsilon$

$\Rightarrow f$ hat in \vec{x}_0 kein Extremum.

Beispiele

1. $f(x, y) = xy \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (vgl. Beispiel 2., S.253)

notwendige Bedingung:

$$f_x = y = 0, \quad f_y = x = 0 \Rightarrow \text{grad } f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hinreichendes Kriterium

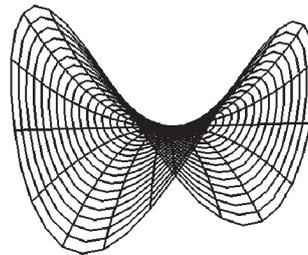
$$A(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A(0, 0) = -1 < 0 \Rightarrow A(0, 0)$ indefinit

\Rightarrow kein Extremum, sondern

Sattelpunkt in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



2. $f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x + y)^2 - 12y \\ 3(x + y)^2 - 12x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow (\text{einsetzen in 2. Gleichung}) \quad x^2 = x \Rightarrow \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow mögliche Extrema in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6(x+y) & 6(x+y) - 12 \\ 6(x+y) - 12 & 6(x+y) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A(0, 0) < 0 \Rightarrow A(0, 0)$ indefinit

\Rightarrow kein Extremum, sondern

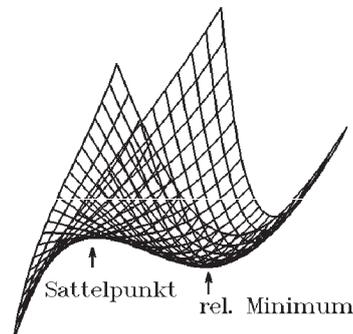
Sattelpunkt in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$A(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 12 > 0$, $\det A(1, 1) > 0$

$\Rightarrow A(1, 1)$ positiv definit

\Rightarrow relatives Minimum in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(1, 1) = -4$.



3. $f(x, y) = xy(3 - x - y) \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y - 2xy - y^2 \\ 3x - x^2 - 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3 - 2x - y) \\ x(3 - x - 2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow (aus der 1. Gleichung) $y = 0$ oder $y = 3 - 2x \Rightarrow$ (einsetzen in 2. Gleichung)

$y = 0 \Rightarrow x(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 3$

$y = 3 - 2x \Rightarrow x(3 - x - 6 + 4x) = x(3x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3$ oder $x = 1, y = 1$

\Rightarrow mögliche Extrema in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A(0, 0) < 0 \Rightarrow A(0, 0)$ indefinit \Rightarrow kein Extremum

$A(3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, $\det A(3, 0) < 0 \Rightarrow A(3, 0)$ indefinit \Rightarrow kein Extremum

$A(0, 3) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A(0, 3) < 0 \Rightarrow A(0, 3)$ indefinit \Rightarrow kein Extremum

$A(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $a_{11} = -2 < 0$. $\det A(1, 1) = 3 > 0 \Rightarrow A(1, 1)$ negativ

definit \Rightarrow relatives Maximum in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f(1, 1) = 1$.

4. $f(x, y) = x^2 \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$, sind mögliche Extremstellen

$A(0, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 2 > 0$, $\det A(0, y) = 0 \Rightarrow A(0, y)$ positiv

semidefinit \Rightarrow Kriterium nicht benutzbar.

Da $f(0, y) = 0 < f(x, y) \quad \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ absolutes Minimum in $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$,
mit $f(0, y) = 0$.

5. $f(x, y) = x^3 + y^3 \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist mögliche Extremstelle}$$

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 0, \det A(0, 0) = 0 \Rightarrow \text{Kriterium nicht benutzbar.}$$

Da $f(\epsilon, \epsilon) > f(0, 0) \quad \forall \epsilon > 0$ und $f(-\epsilon, -\epsilon) < f(0, 0) \quad \forall \epsilon > 0$

$$\Rightarrow \text{kein Extremum in } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$f_x = 2x + 2y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$f_y = 4y + 2x = 0 \Rightarrow y = -x/2$$

$$f_z = 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

aus den beiden ersten Gleichungen folgt $x = y = 0 \Rightarrow$

einzigste mögliche Extremstelle ist $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$A(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 > 0, \det A = 2 \cdot 4 = 8 > 0 \Rightarrow A \text{ ist positiv}$$

definit \Rightarrow relatives Minimum in $\vec{0}$ mit $f(0, 0, 0) = 0$.

7. $f(x, y, z) = x^2 + xz + yz \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$f_x = 2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x$$

$$f_y = z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$f_z = x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$\Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow$ einzigste mögliche Extremstelle ist $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$A(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \geq 0, \det A = -2 < 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ist}$$

kein EW ; Vorzeichenwechsel anders als bei "negativ definit" $\Rightarrow A$ indefinit

\Rightarrow kein Extremum in $\vec{0}$.

Extrema mit Nebenbedingungen

In der Anwendung tritt häufig das Problem auf, Extrema einer Funktion zu bestimmen, wenn nicht alle $\vec{x} \in D(f)$ zugelassen sind, sondern den Variablen \vec{x} gewisse Beschränkungen auferlegt werden (z.B. Temperaturverteilung auf einem Flächenstück im Raum). Die Beschränkungen (*Nebenbedingungen*) werden i.A. durch Gleichungen angegeben: $g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$.

Wir geben eine *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines solchen Extremums an:

Satz 8.43 : *Multiplikatorenregel von Lagrange*

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und seien $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}, (i = 1, 2, \dots, m)$ die Nebenbedingungsfunktionen. Sei $\vec{x}_0 \in M$ und $U \subset M$ eine Umgebung von \vec{x}_0 . Seien $f, g_i \in C^1(U)$ und $\text{rang} \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}_0) \right) = m$ und $g_i(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Dann gilt:

Hat f in \vec{x}_0 ein relatives Extremum unter den *Nebenbedingungen* $g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$, so existieren reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Die Zahlen λ_i heißen *Lagrange Parameter*.

$\text{rang} \left(\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\vec{x}_0) \right) = m$ bedeutet: m unabhängige Nebenbedingungen.

Beweis :

Es wird der Satz über implizite Funktionen benutzt:

Wir zeigen die Behauptung nur für eine Nebenbedingung, also $m = 1$; für $m > 1$ geht der Beweis analog (siehe Literatur).

$m = 1$: also eine Nebenbedingungsfunktion $g = g_1$.

Da $\text{rang} \left(\frac{\partial g}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\vec{x}_0) \right) = 1 \Rightarrow \text{grad } g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.

Sei o.B.d.A. $g_{x_1}(\vec{x}_0) \neq 0 \Rightarrow g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ist lokal nach x_1 auflösbar, dh. $\exists h$ mit $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$ und $g(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = 0$ in $U(\vec{x}_0)$.

Nach x_i differenzieren $\Rightarrow g_{x_1} h_{x_i} + g_{x_i} = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$.

Da f in \vec{x}_0 ein relatives Extremum unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ besitzt, folgt für $F(x_2, \dots, x_n) = f(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \text{grad } F(\vec{x}_0) = \vec{0}$, also

$(f_{x_1} h_{x_i} + f_{x_i})(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$.

Mit $\lambda := -\frac{f_{x_1}(\vec{x}_0)}{g_{x_1}(\vec{x}_0)}$ folgt dann:

$(-\lambda g_{x_1} h_{x_i} + f_{x_i})(\vec{x}_0) = 0$, da $g_{x_1} h_{x_i} = -g_{x_i} \Rightarrow (\lambda g_{x_i} + f_{x_i})(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$.

$$\text{Da } \lambda := -\frac{f_{x_1}(\vec{x}_0)}{g_{x_1}(\vec{x}_0)} \Rightarrow (\lambda g_{x_1} + f_{x_1})(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow (\lambda g_{x_i} + f_{x_i})(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Anwendung dieses Satzes

Um mögliche Extrema der Funktion f unter den Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$ zu finden, betrachtet man die Hilfsfunktion φ mit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\vec{x}) + \lambda_1 g_1(\vec{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\vec{x})$$

und löst das Gleichungssystem

$$\text{grad } \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \vec{0}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\vec{x}) &= 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ g_i(\vec{x}) &= 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{Nebenbedingungen}) \end{aligned}$$

Das sind $(n + m)$ Gleichungen für die $(n + m)$ Unbekannten $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Nur die als Lösungen dieses Gleichungssystems auftretenden (x_1, \dots, x_n) sind mögliche Extremstellen von f unter den Nebenbedingungen $g_i(\vec{x}) = 0, i = 1, \dots, m$. Ob es wirklich Extremstellen sind, muß an Hand der Funktion f untersucht werden (es gibt kein sinnvolles hinreichendes Kriterium).

Beispiele

1. Wie sind die Kantenlängen einer oben offenen Pappschachtel zu wählen, damit bei vorgegebenem Volumen V die Gesamtoberfläche minimal wird, dh.: möglichst wenig Pappe verbraucht wird?

$$V = xyz \quad \text{gegeben mit } x, y, z > 0 \Rightarrow g(x, y, z) = xyz - V = 0 \quad (\text{Nebenbedingung}),$$

$$f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz \quad (\text{Oberfläche}).$$

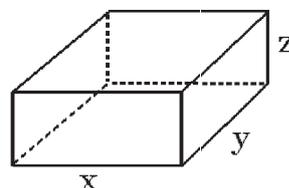
Gesucht: Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$.

$$\text{grad } g(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T \neq \vec{0} \quad \text{für } x, y, z > 0$$

$$\text{Hilfsfunktion } \varphi(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z),$$

$$\text{grad } \varphi = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_x = y + 2z + \lambda yz = 0 \\ \varphi_y = x + 2z + \lambda xz = 0 \\ \varphi_z = 2y + 2x + \lambda xy = 0 \\ \text{-----} \\ \varphi_\lambda = xyz - V = 0 \end{array} \right|$$



Dieses Gleichungssystem muß gelöst werden:

$x * 1.$ Gleichung $-y * 2.$ Gleichung $\Rightarrow 2z(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$ (da $z > 0$)
 $z * 3.$ Gleichung $-y * 2.$ Gleichung $\Rightarrow x(2z - y) = 0 \Rightarrow z = y/2$ (da $x > 0$)

einsetzen in 4. Gleichung $\Rightarrow \frac{y^3}{2} = V \Rightarrow y = \sqrt[3]{2V}$

\Rightarrow einzige mögliche Extremstelle ist:

$$x = y = \sqrt[3]{2V}, z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}.$$

Hiermit erhält man für die Oberfläche $f(x, y, z) = 3(2V)^{2/3}$.

Da f ein Minimum annehmen muß, muß dieses Minimum an dieser Stelle

$x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$ angenommen werden (die Oberfläche und damit f wird beliebig groß, wenn x oder y oder $z \rightarrow 0$, weil dann eine andere Variable gegen ∞ gehen muß, da ja $xyz = V$ ist).

In diesem Beispiel könnte man auch die Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ nach einer Variablen auflösen, z.B.: $z = \frac{V}{xy}$. Einsetzen in die Funktion f ergibt

$$h(x, y) = f(x, y, \frac{V}{xy}) = xy + 2y \cdot \frac{V}{xy} + 2x \cdot \frac{V}{xy} = xy + 2V(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$$

$$\text{grad } h(x, y) = \begin{pmatrix} y + 2V(-\frac{1}{x^2}) \\ x + 2V(-\frac{1}{y^2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \frac{2V}{x^2} \\ x - \frac{2V}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2V}{x^2} \text{ und } xy^2 = 2V \Rightarrow \frac{2V}{x^3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2V}, y = \frac{2V}{(2V)^{2/3}}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{2V}, z = \frac{V}{(2V)^{2/3}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}.$$

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv definit, da } a_{11} = 2 > 0 \text{ und } \det A = 3 > 0$$

$$\Rightarrow \text{relatives Minimum in } x = y = \sqrt[3]{2V}, z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}.$$

2. Gesucht: Die kürzeste Entfernung von der Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ zum Ursprung.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (\text{Entfernung zum Quadrat})$$

$$g(x, y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0 \quad (\text{Nebenbedingung})$$

$$\text{grad } g(x, y) = (2x + 8y, 8x + 14y)^T \neq \vec{0} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Es gilt: die Entfernung ist minimal \Leftrightarrow das Quadrat der Entfernung ist minimal.

Deshalb suchen wir das Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

$$\varphi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad \text{grad } \varphi = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_x = 2x + \lambda(2x + 8y) = 0 \\ \varphi_y = 2y + \lambda(8x + 14y) = 0 \\ \text{-----} \\ \varphi_\lambda = g(x, y) = 0 \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem muß gelöst werden:

Die ersten beiden Gleichungen durch 2 dividiert ergeben in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 1 + 7\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die triviale Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht die 3. Gleichung erfüllt, suchen wir nicht-

triviale Lösungen des GLS. Damit diese existieren, muß $\det \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 4\lambda \\ 4\lambda & 1 + 7\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$\text{sein, also } (1 + \lambda)(1 + 7\lambda) = 16\lambda^2 \Rightarrow 9\lambda^2 - 8\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (9\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -\frac{1}{9}$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Einsetzen in die 3. Gleichung} \Rightarrow \alpha^2(4 - 16 + 7) = 225 \Rightarrow \alpha^2 = -\frac{225}{5}$$

$$\Rightarrow \text{keine Lösung.}$$

$$\lambda = -\frac{1}{9}: \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Einsetzen in die 3. Gleichung} \Rightarrow \alpha^2(1 + 16 + 28) = 225 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{225}{45} = 5$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ sind die beiden einzigen Lösungen mit } f(\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5}) = 25.$$

Da f ein absolutes Minimum annimmt (Maximum für $x \rightarrow \infty$ oder $y \rightarrow \infty$), wird das Minimum an diesen beiden Stellen angenommen, also ist die minimale Entfernung

$$d = 5 \text{ bei } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Gesucht: Die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ auf der Kugeloberfläche $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Da f stetig auf der kompakten (d.h.: abgeschlossen und beschränkt) Kugeloberfläche ist, nimmt f auf der Kugeloberfläche ihr *absolutes Maximum und Minimum* an.

$$\text{grad } g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^T \neq \vec{0} \text{ für } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

$$\varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z), \text{ grad } \varphi = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_x = 2(x + y + z) + \lambda \cdot 2x = 0 \\ \varphi_y = 2(x + y + z) + \lambda \cdot 2y = 0 \\ \varphi_z = 2(x + y + z) + \lambda \cdot 2z = 0 \\ \text{-----} \\ \varphi_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right|$$

Aus den ersten 3 Gleichungen $\Rightarrow 2\lambda x = 2\lambda y = 2\lambda z \Rightarrow \lambda = 0$ oder $x = y = z$.

$\lambda = 0$: $\Rightarrow x + y + z = 0$ (Ebene durch $\vec{0}$) und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Kugeloberfläche um $\vec{0}$ mit Radius 1)

\Rightarrow Schnittkurve K der Ebene mit der Kugeloberfläche mit $f(x, y, z) = 0$.

$\lambda \neq 0$: $\Rightarrow x = y = z$, einsetzen in 3. Gleichung $\Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ mit $f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = (\pm \frac{3}{\sqrt{3}})^2 = 3$.

Also: absolutes Minimum auf der Kurve K mit $f(x, y, z) = 0$,

absolutes Maximum in $x = y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ mit $f(x, y, z) = 3$.

Diese Aufgabe hätte man auch anders lösen können:

$f(x, y, z) = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ ist eine *quadratische Form* $f(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle$ mit der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist äquivalent zu $|\vec{x}| = 1$.

Nach Satz 2.57, S.88, gilt:

$\max_{|\vec{x}|=1} \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \lambda_1$ mit λ_1 der größte EW der Matrix A . Das Maximum wird angenommen bei den EV \vec{x}_1 zu λ_1 mit $|\vec{x}_1| = 1$.

$\min_{|\vec{x}|=1} \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \lambda_n$ mit λ_n der kleinste EW der Matrix A . Das Minimum wird angenommen bei den EV \vec{x}_n zu λ_n mit $|\vec{x}_n| = 1$.

Also erhalten wir bei obigem Beispiel:

Berechnung der EW

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2) = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0$ (doppelter EW)

Berechnung der EV

$$\text{zu } \lambda_1 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |\vec{x}_1| = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ Schnittkurve K

zwischen der Ebene $x + y + z = 0$ und der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

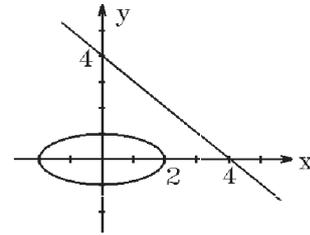
$\Rightarrow \max_{|\vec{x}|=1} (x + y + z)^2 = 3$, Maximum wird angenommen bei $\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\min_{|\vec{x}|=1} (x + y + z)^2 = 0$, Minimum wird angenommen auf der Schnittkurve K .

4. Gesucht: Die kürzeste Entfernung von der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ zur Geraden $x + y = 4$.

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Punkt
auf der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ein Punkt
auf der Geraden $u + v = 4$



\Rightarrow Entfernung von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ zum Quadrat ist:

$$f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

$$g_1(x, y, u, v) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad (1. \text{ Nebenbedingung})$$

$$g_2(x, y, u, v) = u + v - 4 = 0 \quad (2. \text{ Nebenbedingung})$$

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y, u, v)} = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2, \text{ falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, u, v) + \lambda_1 g_1(x, y, u, v) + \lambda_2 g_2(x, y, u, v)$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_x = 2(x - u) + 2\lambda_1 x = 0 \\ \varphi_y = 2(y - v) + 8\lambda_1 y = 0 \\ \varphi_u = -2(x - u) + \lambda_2 = 0 \\ \varphi_v = -2(y - v) + \lambda_2 = 0 \\ \text{-----} \\ \varphi_{\lambda_1} = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ \varphi_{\lambda_2} = u + v - 4 = 0 \end{array} \right|$$

$$1. + 3. \text{ Gleichung} \Rightarrow \lambda_2 + 2\lambda_1 x = 0$$

$$2. + 4. \text{ Gleichung} \Rightarrow \lambda_2 + 8\lambda_1 y = 0.$$

$$\text{Subtraktion dieser beiden Gleichungen} \Rightarrow 2\lambda_1(x - 4y) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ oder } x = 4y$$

$$4. - 3. \text{ Gleichung} \Rightarrow x - u = y - v.$$

$$\lambda_1 = 0 : \Rightarrow x = u \text{ und } y = v, \text{ also Schnittpunkt der beiden Kurven}$$

$$\Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow x = 4 - y \Rightarrow (4 - y)^2 + 4y^2 - 4 = 5y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$(1. \text{ Nebenbedingung}) \Rightarrow \text{keine reelle Lösung} \Rightarrow \text{es existiert kein Schnittpunkt.}$$

$$\lambda_1 \neq 0 : \Rightarrow x = 4y \Rightarrow (4y)^2 + 4y^2 = 4 \quad (1. \text{ Nebenbedingung})$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{Lösung im 1. Quadranten}) \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Da $x - u = y - v \Rightarrow u - v = x - y$ und $u + v = 4$ (2. Nebenbedingung)

$$\text{Addition} \Rightarrow 2u = 4 + (x - y) = 4 + \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow u = 2 + \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Subtraktion} \Rightarrow 2v = 4 - (x - y) = 4 - \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow v = 2 - \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{5}}, y = \frac{1}{\sqrt{5}}, u = 2 + \frac{3}{2\sqrt{5}}, v = 2 - \frac{3}{2\sqrt{5}}$ ist die einzige Lösung mit

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{3}{2\sqrt{5}}, 2 - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) = \left(2 - \frac{5}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{5})^2.$$

Da die kürzeste Entfernung existiert (Entfernung $\rightarrow \infty$ für $u \rightarrow \infty$ oder $v \rightarrow \infty$), muß die kürzeste Entfernung an diesen beiden Punkten angenommen werden. Die kürzeste Entfernung ist $d = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 - \sqrt{5})$.

5. Gesucht: Die absoluten Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ in

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

f ist stetig auf der kompakten Kreisscheibe $M \Rightarrow f$ nimmt ihr absolutes Maximum und Minimum in M an.

a) Inneres von M :

notwendige Bedingung für relative Extrema: $\text{grad } f(x, y) = \vec{0} \Rightarrow$

$$f_x = 2x + y = 0, \quad f_y = 2y + x = 0 \Rightarrow y = -2x, \quad -4x + x = -3x = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M \text{ ist (einzige) mögliche Extremstelle im Inneren von } M.$$

hinreichendes Kriterium:

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv definit, da } a_{11} = 2 > 0 \text{ und } \det A > 0$$

$$\Rightarrow \text{relatives Minimum in } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } f(0, 0) = 0.$$

b) Rand von M :

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (\text{Nebenbedingung}).$$

$$\text{Da } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x, y) = 1 + xy$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = (1 + xy) + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

$$\text{grad } \varphi = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_x = y + 2\lambda x = 0 \\ \varphi_y = x + 2\lambda y = 0 \\ \text{-----} \\ \varphi_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right|$$

Die ersten beiden Gleichungen in Matrizenform ergeben:

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses GLS ist nichttrivial lösbar (die triviale Lösung erfüllt nicht die 3. Gleichung)

$$\text{nur, falls } \det \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\lambda = \frac{1}{2}: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{einsetzen in 3. Gleichung} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{einsetzen in 3. Gleichung} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

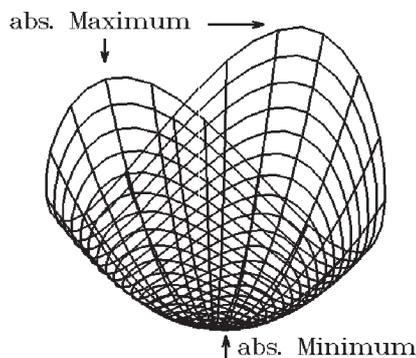
\Rightarrow mögliche Extrema auf dem Rand von M sind: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Insgesamt erhält man für die absoluten Extrema von f in M :

Absolutes Minimum in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f(0,0) = 0$.

Absolutes Maximum in $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$.



IX Orthonormalsysteme, Fourierreihen

Problemstellung: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Kann f durch "einfache Funktionen" approximiert werden? Als "einfache Funktionen" betrachten wir z.B.:

a) algebraische Polynome $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

b) trigonometrische Polynome $p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

Was heißt "approximieren"?

p_n soll die Funktion f möglichst gut annähern, dh.: der "Abstand" zwischen f und p_n soll in $[a, b]$ möglichst klein sein.

Wir müssen also den "Abstand" zwischen zwei Funktionen "messen" können. Bei stetigen Funktionen kann das folgendermaßen geschehen:

Sei $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig in } [a, b]\}$ die Menge aller in $[a, b]$ stetigen Funktionen. $C[a, b]$ ist mit folgenden Operationen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (\text{Addition})$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\text{Skalarmultiplikation})$$

ein *Vektorraum*, denn es gelten alle Eigenschaften des Satzes 2.3, S.28, da sie jeweils für die Funktionswerte gelten.

Für $f \in C[a, b]$ können wir folgende *Norm* definieren:

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Diese Norm heißt ∞ -Norm. Es gelten die folgenden Normeigenschaften

$$\|f\|_\infty \geq 0 \quad , \quad = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \text{ in } [a, b]$$

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

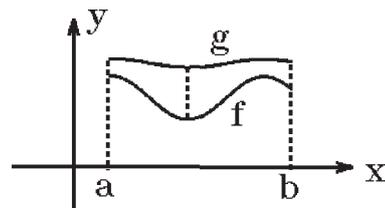
$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Damit ist $C[a, b]$ ein *normierter Vektorraum*.

Mit Hilfe dieser Norm können wir den Abstand zwischen zwei Funktionen f und g folgendermaßen messen

$$\|f - g\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

der Abstand zwischen f und g .

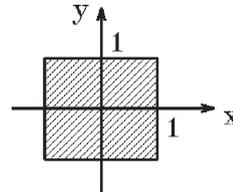


$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$ bedeutet:
 p_n konvergiert in $[a, b]$ *gleichmäßig* gegen f .

Diese Norm $\|f\|_\infty$ ist nicht die Verallgemeinerung der Euklid-Norm $|\vec{x}|$ des \mathbb{R}^n , sondern die Verallgemeinerung der folgenden Norm des \mathbb{R}^n :

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\|_\infty \leq 1\}$ ist das folgende Quadrat:



Anders als diese ∞ -Norm wurde die bisher im \mathbb{R}^n immer benutzte Euklid-Norm

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{über das Skalarprodukt} \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{folgendermaßen}$$

definiert: $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

Immer dann, wenn in einem Vektorraum ein *Skalarprodukt* $\langle x, y \rangle$ gegeben ist, der Vektorraum also ein *unitärer Raum* ist, kann in gleicher Weise eine *Norm* definiert werden: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Mit Hilfe dieser Norm können wir dann den Abstand $\|x - y\|$ zwischen zwei Elementen x und y messen.

Betrachten wir also noch einmal den Vektorraum $C[a, b]$. Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

in $C[a, b]$ ein *Skalarprodukt* definiert, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &\geq 0, \quad = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \text{ in } [a, b] \\ \langle \lambda f, g \rangle &= \lambda \langle f, g \rangle, \quad \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \quad (\text{Linearität}) \\ \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \quad (\text{Symmetrie}) \end{aligned}$$

Damit ist $C[a, b]$ ein *unitärer Raum*.

Mit Hilfe dieses Skalarprodukts wird dann die folgende 2-Norm definiert:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_2 \geq 0 \quad , \quad = 0 &\Leftrightarrow f(x) \equiv 0 \text{ in } [a, b] \\ \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 &\text{ (Dreiecksungleichung)} \\ |\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 &\text{ (Schwarzsche Ungleichung)} \end{aligned}$$

Beweis : Schwarzsche Ungleichung

Sei $\langle f, g \rangle$ ein inneres Produkt und $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ die zugehörige Norm, dann gilt:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Denn: Ist $g \equiv 0 \Rightarrow$ auf beiden Seiten $= 0 \Rightarrow$ Behauptung.

Sei $g \neq 0$ und $h = \frac{g}{\|g\|} \Rightarrow \|h\| = 1$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|f - \langle f, h \rangle h\|^2 &= \langle f - \langle f, h \rangle h, f - \langle f, h \rangle h \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \langle f, h \rangle^2 + \langle f, h \rangle^2 \langle h, h \rangle \quad (\text{wegen der Linearität}) \\ &= \|f\|^2 - \langle f, h \rangle^2 \quad , \quad \text{da } \langle h, h \rangle = \|h\|^2 = 1 \\ \Rightarrow \langle f, h \rangle^2 &\leq \|f\|^2 \Rightarrow \langle f, \frac{g}{\|g\|} \rangle^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \langle f, g \rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2 \\ \Rightarrow |\langle f, g \rangle| &\leq \|f\| \cdot \|g\| . \end{aligned}$$

Beweis : Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + 2 \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &\leq \|f\|^2 + 2 \|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 \quad (\text{Schwarzsche Ungleichung}) \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| . \end{aligned}$$

Für die 2-Norm lautet die Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \\ \sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx} &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \end{aligned}$$

Mit der 2-Norm ist $C[a, b]$ ebenfalls ein normierter Vektorraum, und wir können auch bzgl. der 2-Norm den *Abstand* zwischen zwei Funktionen messen: $\|f - g\|_2$ (Abstand bzgl. der 2-Norm).

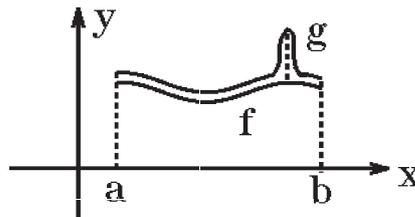
Es gilt i.A.: $\|f\|_2 \neq \|f\|_\infty$ und $\|f - g\|_2 \neq \|f - g\|_\infty$.

Beispiel

$$f(x) = x \quad , \quad x \in [0, 1] \Rightarrow \|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 1 \neq \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

$\|f - g\|_\infty$ "groß"

$\|f - g\|_2$ "klein":



Es gilt aber

Satz 9.1 : Seien $f_n \in C[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$, $f \in C[a, b]$.

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ (gleichmäßige Konvergenz in $[a, b]$)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ (Konvergenz im quadratischen Mittel in $[a, b]$)

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Beweis :

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|^2 (b - a) \leq \|f_n - f\|_\infty^2 (b - a).$$

Wir wollen nun Funktionen $f \in C[a, b]$ durch "einfache" Funktionen im *quadratischen Mittel* approximieren, d.h.: Gesucht: $p_n \in C[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_2 = 0$.

Dazu betrachten wir zunächst einmal *Orthonormalsysteme*:

Definition 9.2 : Sei in $C[a, b]$ ein Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ gegeben und die zugehörige Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Seien $\varphi_i \in C[a, b]$, $(i \in \mathbb{N})$, mit $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{falls } i \neq j \\ 1 & , \text{falls } i = j \end{cases}$,

so bilden die Funktionen $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein *Orthonormalsystem* bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle$.

$\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1$ bedeutet $\|\varphi_i\|_2 = 1$, denn $\|\varphi_i\|_2^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1$.

Sei nun $\{\varphi_i \in C[a, b] : i \in \mathbb{N}\}$ ein *Orthonormalsystem* bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle$ und sei $f \in C[a, b]$.

Wir wollen f durch folgende einfache Funktionen approximieren:

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \quad , \quad (n \in \mathbb{N} \quad , \quad \alpha_k \in \mathbb{R}).$$

Frage: Für welche $\alpha_k \in \mathbb{R}$ wird

$$\|f - p_n\|_2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|_2 \quad \text{minimal ?}$$

Um diese Frage zu klären, betrachten wir die Funktion F mit

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|_2^2 = \left\langle f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \alpha_j \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\
&= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \\
&\quad (\text{da } \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0 \text{ für } k \neq j \text{ und } = 1 \text{ für } k = j) \\
\Rightarrow F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2.
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Minimum: $\text{grad } F = \vec{0}$, also
 $\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = -2 \langle f, \varphi_j \rangle + 2\alpha_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = \langle f, \varphi_j \rangle$.

Hinreichendes Kriterium für Minimum: $A = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \right)$ positiv definit:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \begin{cases} 2 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv definit, da alle}$$

EW = 2 > 0. Also Minimum für $\alpha_j = \langle f, \varphi_j \rangle$.

Ergebnis: $\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|_2$ wird minimal, falls $\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$. Also gilt:

Satz 9.3 : Sei $\{\varphi_i \in C[a, b] : i \in \mathbb{N}\}$ ein *Orthonormalsystem* bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle$ und sei $f \in C[a, b]$. Dann gilt:

Die *beste Approximation im quadratischen Mittel* für f erhält man durch

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

und es gilt die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis : (Besselsche Ungleichung)

$$\begin{aligned}
0 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2^2 &= \left\langle f - \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, f - \sum_{j=1}^n \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle^2 \\
&\quad (\text{da } \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0 \text{ für } k \neq j \text{ und } = 1 \text{ für } k = j) \\
\Rightarrow \quad (n \rightarrow \infty) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2 &\leq \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Hat man also in $C[a, b]$ ein Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$, und kennt man zu diesem Skalarprodukt ein Orthonormalsystem $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$, so kennt man die *beste Approximation im quadratischen Mittel* durch $p_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$; man muß nur die Koeffizienten $\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ berechnen.

Wir wollen nun Beispiele von Orthonormalsystemen behandeln:

1. Fourierreihen

Sei $C[-\pi, \pi]$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ und $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx}$. Dann gilt:

Satz 9.4 : Die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx : k \in \mathbb{N} \right\}$ bilden in $C[-\pi, \pi]$ ein ONS (*Orthonormalsystem*).

Beweis : Es gilt für $k, m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+m)x + \cos(k-m)x) dx \\
&= \begin{cases} \left[\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(k+m)x}{k+m} + \frac{\sin(k-m)x}{k-m} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & , \text{falls } k \neq m \\ \left[\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(k+m)x}{k+m} + x \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = 1 & , \text{falls } k = m \neq 0 \\ \left[\frac{1}{2\pi} (2x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 2 & , \text{falls } k = m = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right\rangle &= \begin{cases} 0 & , \text{falls } k \neq m \\ 1 & , \text{falls } k = m \neq 0 \\ 2 & , \text{falls } k = m = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \right\rangle &= \begin{cases} 0 & , \text{falls } k \neq m \\ 1 & , \text{falls } k = m \neq 0 \end{cases} \\
\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \right\rangle &= 0 \quad \forall k, m \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Da

$$\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx & , \text{falls } \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cos kx & , \text{falls } \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \\ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \sin kx & , \text{falls } \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \end{cases}$$

gilt:

Satz 9.5 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und stetig in \mathbb{R} .

Die beste Approximation im quadratischen Mittel erhält man durch die *trigonometrischen Polynome*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad , \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad , \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$T_n(x)$ heißt Teilsumme der *Fourierreihe*

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

von f .

Die Koeffizienten a_k, b_k heißen *Fourierkoeffizienten*.

In der Besselschen Ungleichung gilt " = " , d.h.: es gilt die *Parsevalsche Gleichung*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.

Die Fourierreihe *konvergiert im quadratischen Mittel* gegen f .

Die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} , \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx , \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx : k \in \mathbb{N} \right\}$

bilden ein *vollständiges ONS*.

Beweis :

Bis auf " = " in der Besselschen Ungleichung folgen alle Aussagen aus Satz 9.3, Satz 9.4 und aus dem Beweis zu Satz 9.3.

Da $\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$ konvergent $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.

Ein ONS heißt *vollständig*, wenn in der Besselschen Ungleichung " = " steht. Beweis der Parsevalschen Gleichung siehe Literatur.

Bemerkung : Satz 9.5 gilt auch für *stückweise stetige*, 2π -periodische Funktionen.

Die Frage, die nun noch behandelt werden muß, lautet:

Wann konvergiert die Fourierreihe *punktweise* oder sogar *gleichmäßig* gegen f ?

Bevor wir diese Frage klären können, müssen wir zunächst einige Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. : Es gilt

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad , \quad (x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n \cos kx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad , \quad (x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z})$$

Beweis :

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=0}^n \cos kx &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \quad (\text{geometrische Summe, falls } e^{ix} \neq 1) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-ix/2} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \right) \quad (\text{erweitert mit } e^{-ix/2}) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{\cos(x/2) - i \sin(x/2) - \cos(n + 1/2)x - i \sin(n + 1/2)x}{-2i \sin(x/2)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Es gilt $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$.

b) folgt sofort aus a).

Hilfssatz 2. : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und 2π -periodisch. Dann gilt für die Teilsummen der Fourierreihe von f

$$T_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} K_n(t) dt$$

$$\text{mit dem Dirichlet Kern } K_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} & , \text{ falls } t \neq 0, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 2n+1 & , \text{ falls } t = 0. \end{cases}$$

Beweis :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] f(t) dt \quad (\text{Additionstheorem}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_n(t-x) f(t) dt \quad \text{mit } C_n(t-x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} C_n(t-x) f(t) dt \quad (\text{da } C_n \text{ und } f \text{ } 2\pi\text{-periodisch}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_n(s) f(x+s) ds \quad (\text{Substitution } s = t-x, ds = dt) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 C_n(s) f(x+s) ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_n(s) f(x+s) ds \\
& \quad (\text{Substitution } t = -s, dt = -ds, C_n(-t) = C_n(t) \text{ gerade Funktion}) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_n(t) f(x-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_n(t) f(x+t) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2s) + f(x-2s)}{2} 2C_n(2s) ds \quad (\text{Substitution } t = 2s, dt = 2ds) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2s) + f(x-2s)}{2} 2 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2ks \right] ds \\
&\Rightarrow \text{Behauptung mit Hilfssatz 1.b).}
\end{aligned}$$

Hilfssatz 3. : Es gilt $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} K_n(t) dt = 1.$

Beweis :

Wir betrachten die Funktion $f(x) \equiv 1 \Rightarrow a_0 = 2, a_k = b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow T_n(x) = \frac{a_0}{2} = 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} K_n(t) dt \quad (\text{nach Hilfssatz 2}).$$

Wir können nun folgendes *hinreichende Konvergenzkriterium* angeben:

Satz 9.6 : *Hinreichendes Konvergenzkriterium*

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und *stückweise stetig* und *stückweise glatt* (d.h.: f und f' sind stetig in $[-\pi, \pi]$ bis auf endlich viele Sprungstellen).

Dann *konvergiert* die Fourierreihe $T(x)$ *punktweise* gegen

$$\begin{cases} f(x) & , \text{falls } f \text{ stetig in } x \\ \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & , \text{falls } f \text{ in } x \text{ Sprungstelle hat.} \end{cases}$$

Die Konvergenz ist *gleichmäßig* in allen *abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen* von f .

Beweis :

$$\begin{aligned}
&T_n(x) - \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2} K_n(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{f(x+) + f(x-)}{2} K_n(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{f(x+2t) - f(x+)}{2t} + \frac{f(x-2t) - f(x-)}{2t} \right) \cdot \frac{t}{\sin t} \cdot \sin(2n+1)t \, dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi(x,t) \sin(2n+1)t \, dt
\end{aligned}$$

mit $\psi(x,t) = \left(\frac{f(x+2t) - f(x+)}{2t} + \frac{f(x-2t) - f(x-)}{2t} \right) \cdot \frac{t}{\sin t}$.

Da $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(x,t) = (f'(x+) - f'(x-)) \cdot 1$, gilt:

$\psi(x,t)$ ist stückweise stetig bzgl. $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Mit folgendem Hilfssatz gilt dann:

$$T_n(x) - \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi(x,t) \sin(2n+1)t \, dt \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

also punktweise Konvergenz in $[-\pi, \pi]$ und damit auch in \mathbb{R} , da

f und T_n 2π -periodisch.

Beweis der gleichmäßigen Konvergenz in abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen siehe Literatur.

Hilfssatz 4. : Sei f stückweise stetig in $[a, b]$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0.$$

Beweis :

a) f konstant = $c \Rightarrow \int_a^b c \sin nt \, dt = c \cdot \left. \frac{-\cos nt}{n} \right]_{t=a}^b \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

b) $f \neq$ konstant, dann läßt sich f durch Treppenfunktionen t_m annähern

$$\int_a^b t_m(x) \sin nt \, dt = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} c_i \sin nt \, dt \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) \sin nt \, dt \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ da } t_m \rightarrow f \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Bemerkung : Die Fourierreihe einer stückweise stetigen und stückweise glatten periodischen Funktion kann *gliedweise integriert* werden.

Denn: Die Konvergenz ist gleichmäßig in abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen.

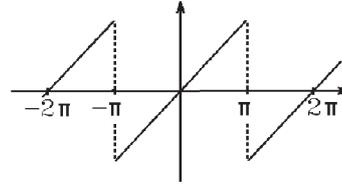
Beispiele

1. $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Additionstheorem)
ist schon fertige Fourierreihe.

2. $f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
ist fertige Fourierreihe.

3. $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi)$, f 2π -periodisch fortgesetzt.

f ist stückweise stetig und stückweise glatt in \mathbb{R} mit Sprungstellen in $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,



$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{falls } x \neq \pi + 2k\pi \\ 0 & , \text{falls } x = \pi + 2k\pi. \end{cases}$$

f ist ungerade Funktion. Für ungerade Funktionen gilt:

$$f \text{ ungerade Funktion} \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx$$

denn:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos kx \, dx = 0, \quad \text{weil } f(x) \cos kx \text{ ungerade Funktion,}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx, \quad \text{weil } f(x) \sin kx \text{ gerade Funktion.}$$

Umgekehrt gilt für gerade Funktionen:

$$f \text{ gerade Funktion} \Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx$$

denn:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx, \quad \text{weil } f(x) \cos kx \text{ gerade Funktion,}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin kx \, dx = 0, \quad \text{weil } f(x) \sin kx \text{ ungerade Funktion.}$$

Also in unserem Beispiel 3. gilt (da f ungerade): $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ x \cdot \frac{-\cos kx}{k} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k} \, dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{k} (-\cos k\pi) + \frac{\sin kx}{k^2} \Big|_0^\pi \right\} = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}, \quad \text{da } \cos k\pi = (-1)^k \text{ und } \sin k\pi = 0. \end{aligned}$$

Damit lautet die Fourierreihe von f :
$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx .$$

Die Partialsummen $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ konvergieren punktweise gegen

$$\begin{cases} f(x) & , \text{falls } x \neq \pi + 2k\pi \\ 0 & , \text{falls } x = \pi + 2k\pi. \end{cases}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in allen abgeschlossenen Intervallen, die keine Punkte $x = \pi + 2k\pi$ enthalten. Es gilt also z.B.:

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = x \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in $[-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

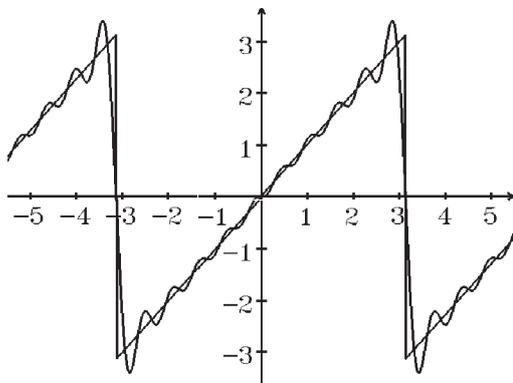
Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin k\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

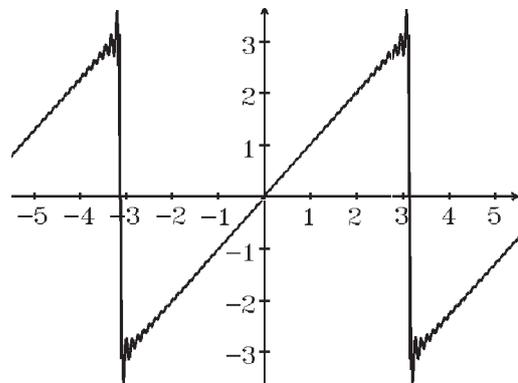
$$\text{Da } \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } k = 2l \text{ gerade} \\ (-1)^l & \text{, falls } k = 2l + 1 \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4}$$

Kurvenverlauf der Fourierpolynome $T_n(x)$ für $n = 10$ und $n = 50$



Fourierpolynom vom Grad 10



Fourierpolynom vom Grad 50

Gibbssches Phänomen: An den Sprungstellen treten starke Überschwinger auf. Auch bei hohem Grad werden diese Überschwinger nicht kleiner, sie rücken nur näher an die Sprungstellen heran.

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt:

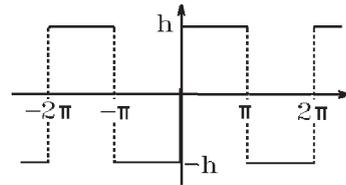
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4. $f(x) = h$ für $x \in (0, \pi)$, ungerade und 2π -periodisch fortgesetzt.

f ist stückweise stetig und stückweise glatt in \mathbb{R} mit Sprungstellen in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

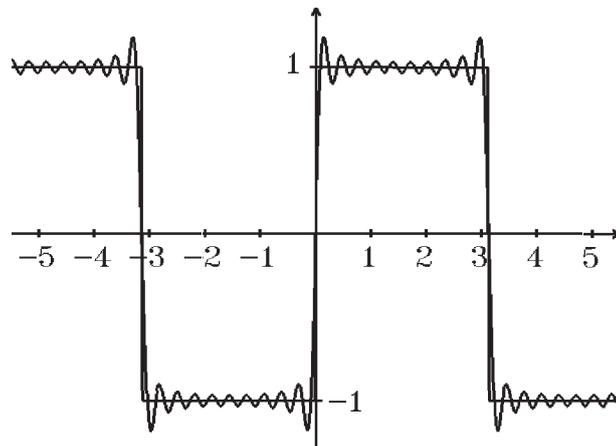


$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{falls } x \neq k\pi \\ 0 & , \text{falls } x = k\pi. \end{cases}$$

f ist ungerade $\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h \sin kx dx = \frac{2h}{\pi} \cdot \frac{-\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{2h}{k\pi} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{4h}{k\pi} & , \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit lautet die Fourierreihe von f : $T(x) = \frac{4h}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin(2l+1)x}{2l+1}$.



Fourierpolynom vom Grad 20

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt für $h = 1$:

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1^2 dx = 2 \Rightarrow$$

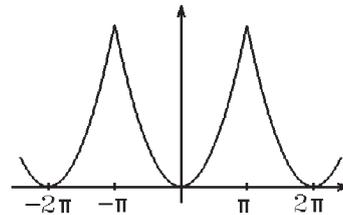
$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

5. $f(x) = x^2$ für $x \in (-\pi, \pi]$, 2π -periodisch fortgesetzt.

f ist stetig und
stückweise glatt in \mathbb{R}

$$\Rightarrow T(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in \mathbb{R} .



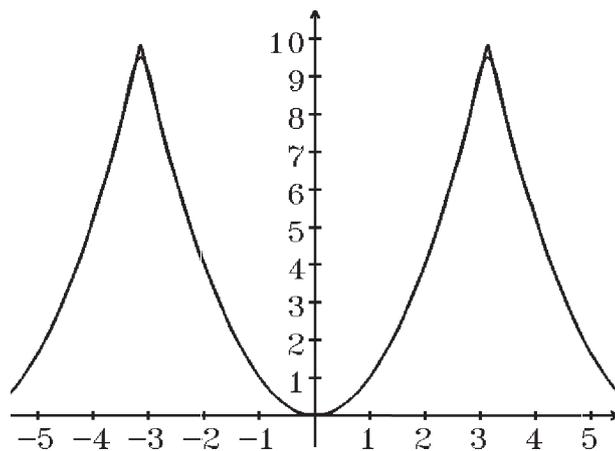
f ist gerade $\Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left\{ x^2 \frac{\sin kx}{k} \right\}_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin kx}{k} dx \quad , \quad (k \neq 0)$$

$$= -\frac{4}{\pi} \left\{ x \frac{-\cos kx}{k^2} \right\}_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k^2} dx = -\frac{4}{\pi} \left\{ \pi \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} + \frac{\sin kx}{k^3} \right\}_0^{\pi} = \frac{4(-1)^k}{k^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3} .$$

Damit lautet die Fourierreihe von f : $T(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx .$



Fourierpolynom vom Grad 10

Da $T(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ z.B. für $x = 0$:

$$T(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} = f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt:

$$\frac{4\pi^4}{2 \cdot 9} + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^5}{5} = \frac{2\pi^4}{5} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

Ist f nicht 2π -periodisch, sondern $2L$ -periodisch mit $L > 0$, so kann man die Fourierreihe mit Hilfe einer Transformation erhalten:

$$\text{Sei } g(t) := f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \Rightarrow$$

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{Lt + 2\pi L}{\pi}\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = g(t) \Rightarrow$$

g ist 2π -periodisch mit der Fourierreihe

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad \text{und}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(s) \cos \frac{k\pi s}{L} \cdot \frac{\pi}{L} ds$$

(Substitution $s = \frac{Lt}{\pi}$, $ds = \frac{L}{\pi} dt$)

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(s) \cos \frac{k\pi s}{L} ds .$$

Analog erhält man

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(s) \sin \frac{k\pi s}{L} ds .$$

Also sieht die Fourierreihe der $2L$ -periodischen Funktion f folgendermaßen aus:

$$\boxed{T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi}{L} x \right)}$$

mit

$$\boxed{a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx}$$

Komplexe Darstellung der Fourierreihe

Die Fourierreihe einer $2L$ -periodischen Funktion kann auch in komplexer Darstellung geschrieben werden:

$$T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{k\pi}{L} x} dx$$

Hierbei gilt für $k \geq 0$ (mit $b_0 := 0$):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad , \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 2\operatorname{Re}(c_k) \quad , \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) = -2\operatorname{Im}(c_k) \end{aligned}$$

Beweis :

Für $k \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{k\pi x}{L} - i \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx - i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2} \\ c_{-k} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{k\pi x}{L} + i \sin \frac{k\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx + i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{a_k}{2} + i \frac{b_k}{2} = \bar{c}_k . \end{aligned}$$

Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt:

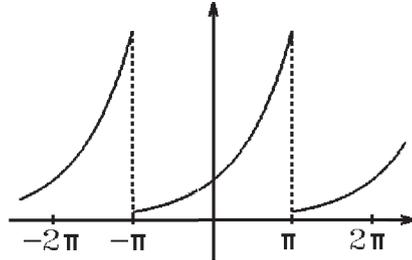
$$a_k = c_k + c_{-k} = c_k + \bar{c}_k = 2\operatorname{Re}(c_k)$$

$$ib_k = c_{-k} - c_k \Rightarrow b_k = i(c_k - c_{-k}) = i(c_k - \bar{c}_k) = -2\operatorname{Im}(c_k).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} &= c_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-i \frac{k\pi}{L} x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{L} x} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos \frac{k\pi x}{L} - i \sin \frac{k\pi x}{L} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos \frac{k\pi x}{L} + i \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((c_k + c_{-k}) \cos \frac{k\pi x}{L} + i(c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) = T(x) . \end{aligned}$$

Beispiel

$f(x) = e^{\alpha x}$ für $x \in (-\pi, \pi)$, $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, 2π -periodisch fortgesetzt.



f ist stückweise stetig und stückweise glatt \Rightarrow

$$T(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{falls } x \neq \pi + 2k\pi \\ \frac{1}{2}(e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}) & , \text{falls } x = \pi + 2k\pi. \end{cases}$$

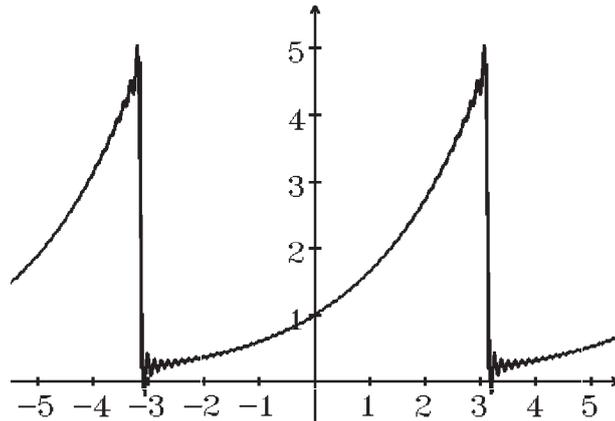
$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha-ik)x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(\alpha-ik)x}}{\alpha-ik} \Big]_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\alpha+ik}{2\pi(\alpha^2+k^2)} (e^{(\alpha-ik)\pi} - e^{-(\alpha-ik)\pi}) = \frac{\alpha+ik}{2\pi(\alpha^2+k^2)} (e^{\alpha\pi} e^{-ik\pi} - e^{-\alpha\pi} e^{ik\pi}) \\ &= \frac{(\alpha+ik)(-1)^k}{\pi(\alpha^2+k^2)} \sinh(\alpha\pi) \quad , \quad \text{da } e^{\pm ik\pi} = \cos k\pi = (-1)^k \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha+ik) \sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+k^2)} e^{ikx} \quad (\text{komplexe Darstellung}).$$

$$a_k = 2\operatorname{Re}(c_k) = \frac{2\alpha(-1)^k \sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+k^2)} \quad , \quad b_k = -2\operatorname{Im}(c_k) = \frac{2k(-1)^{k+1} \sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+k^2)}$$

$$T(x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\alpha(-1)^k}{\alpha^2+k^2} \cos kx + \frac{2k(-1)^{k+1}}{\alpha^2+k^2} \sin kx \right) \right)$$

(reelle Darstellung).



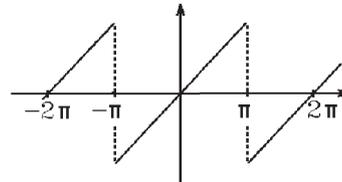
Fourierpolynom vom Grad 50 für $\alpha = 0.5$

Integration von Fourierreihen

Ist f stückweise stetig und stückweise glatt, so konvergiert die zugehörige Fourierreihe gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall. Also läßt sich die Fourierreihe dort *gliedweise integrieren*. Damit läßt sie sich aber auch auf dem *ganzen Periodenintervall gliedweise integrieren* (für den Beweis muß man das Intervall an den Sprungstellen aufteilen).

Beispiel

$f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi)$,
 2π -periodisch fortgesetzt,
 $f(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$



(vgl. Beispiel 3, S.313).

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Also gilt für $x \in (-\pi, \pi)$:

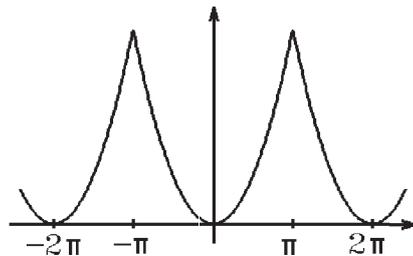
$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \int_0^x \sin kt dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \cdot \left[\frac{-\cos kt}{k} \right]_0^x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} \cos kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} \cos kx . \end{aligned}$$

Mit $g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, 2π -periodisch fortgesetzt,

$$\text{und } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} \cos kx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in \mathbb{R} , da g stetig und stückweise glatt in \mathbb{R} .



Graph von g

Nochmalige Integration ergibt für $x \in (-\pi, \pi)$:

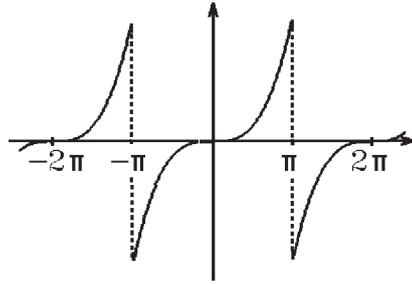
$$\int_0^x g(t) dt = \frac{\pi^2}{6} \int_0^x 1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2} \int_0^x \cos kt dt = \frac{\pi^2}{6} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^3} \sin kx .$$

$$\text{Da } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \quad \forall x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow$$

mit $h(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6}$ für $x \in (-\pi, \pi)$, 2π -periodisch fortgesetzt

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right) \sin kx \quad \forall x \neq \pi + 2k\pi , \quad h(\pi + 2k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} ,$$

da h stückweise stetig und stückweise glatt in \mathbb{R} mit Sprungstellen in $x = \pi + 2k\pi$.



Graph von h

Bei der Funktion f und h treten Sprungstellen schon bei der Funktion auf; die Fourierkoeffizienten konvergieren wie $\frac{1}{k}$ gegen 0.

Die Funktion g ist stetig in \mathbb{R} , Sprungstellen treten erst bei der 1. Ableitungsfunktion auf; die Fourierkoeffizienten konvergieren wie $\frac{1}{k^2}$ gegen 0.

Allgemein gilt:

Sind $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ stetig und ist $f^{(r)}$ stückweise stetig (mit Sprungstellen) und stückweise glatt, dann konvergieren die Fourierkoeffizienten a_k und b_k mit der Ordnung $\frac{1}{k^{r+1}}$, d.h.:

$$|a_k| \leq \frac{K}{k^{r+1}} \quad , \quad |b_k| \leq \frac{K}{k^{r+1}}$$

Fourierreihenansatz bei Differentialgleichungen

Beispiel

$y'' + \omega^2 y = f(x)$, f $2L$ -periodisch, stückweise stetig und stückweise glatt ($\omega > 0$ fest).

homogen:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (\text{charakteristisches Polynom}) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$y_h(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$, $c_i \in \mathbb{R}$, ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

partikuläre Lösung:

Wir entwickeln f in eine Fourierreihe mit dem Ergebnis:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi}{L} x + B_k \sin \frac{k\pi}{L} x \right) .$$

Für die partikuläre Lösung machen wir einen Fourierreihenansatz:

1.Fall: Sei $\omega \neq \frac{k\pi}{L} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (keine Resonanz) \Rightarrow

$$y_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi}{L} x \right) .$$

Ableiten (falls die unendliche Reihe 2-mal gliedweise differenzierbar) und einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \left(\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right) \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \left(\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right) \sin \frac{k\pi}{L} x \right) \\ = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi}{L} x + B_k \sin \frac{k\pi}{L} x \right) . \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2\omega^2} , \quad a_k = \frac{A_k}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2} , \quad b_k = \frac{B_k}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2} .$$

2.Fall: Ist $\omega = \frac{k\pi}{L}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (Resonanz) \Rightarrow

$$y_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1, k \neq \frac{\omega L}{\pi}}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{L} x + b_k \sin \frac{k\pi}{L} x \right) + x \left(a_{\frac{\omega L}{\pi}} \cos \omega x + b_{\frac{\omega L}{\pi}} \sin \omega x \right) .$$

Analog ableiten, einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich ergibt die Koeffizienten a_k, b_k .

Beispiel hierzu:

$y'' + 2y = f(x)$ mit $f(x) = x^2$ für $x \in (-\pi, \pi]$, 2π -periodisch fortgesetzt.

Die Fourierreihe von f lautet: $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx$

(vgl. Beispiel 5, S.316).

Es ist $L = \pi$ und $\omega = \sqrt{2} \neq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ keine Resonanz \Rightarrow

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{6} , \quad a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2(2-k^2)} , \quad b_k = 0 \quad \Rightarrow$$

$y_0(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2(2-k^2)} \cos kx$ ist partikuläre Lösung, falls die Reihe 2-mal

gliedweise differenzierbar ist. Das ist hier der Fall, denn die 1. und 2. Ableitungsreihe sind gleichmäßig konvergent in \mathbb{R} , denn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin kx}{k(2-k^2)} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k(2-k^2)} \right| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{konvergent}) \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos kx}{2-k^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2-k^2} \right| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{konvergent}).$$

Also lautet die allgemeine Lösung

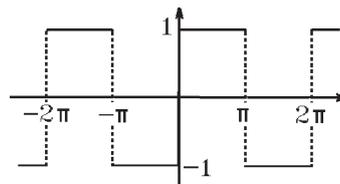
$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{2} x + c_2 \sin \sqrt{2} x + \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2(2-k^2)} \cos kx .$$

In diesem Beispiel ist die rechte Seite f der DGL stetig in \mathbb{R} . Hat f Sprungstellen, so ist die Fourierreihe der partikulären Lösung an diesen Sprungstellen nicht mehr 2-mal differenzierbar (nur k^3 im Nenner), aber in abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen

von f , denn die 2. Ableitungsreihe ist Fourierreihe einer stückweise stetigen, stückweise glatten, periodischen Funktion, also gleichmäßig konvergent in abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen.

δ -Distribution

Sei $h(x) = 1$ für $x \in (0, \pi)$, ungerade und 2π -periodisch fortgesetzt,
 $h(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.



$h'(x)$ existiert an den Sprungstellen $x = k\pi$ nicht.

Die Fourierreihe von h lautet (vgl. Beispiel 4, S.315):

$$h(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Würde man diese Reihe gliedweise differenzieren, so erhielte man die *divergente* Reihe

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)x.$$

Definieren wir

$\delta(x) := \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)x$, so erhalten wir *keine* Funktion, sondern eine *Distribution* (verallgemeinerte Funktion), in diesem Fall eine periodische δ -Distribution.

Betrachten wir die DGL

$$y'' + \omega^2 y = \delta(x), \quad (\omega \notin \mathbb{N}),$$

so erhalten wir über den Fourierreihenansatz die partikuläre Lösung

$$y_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{\omega^2 - (2k+1)^2}.$$

Dies ist die Fourierreihe einer stetigen, stückweise glatten, 2π -periodischen Funktion; die Reihe ist gleichmäßig konvergent in \mathbb{R} . Also ist y_0 eine "vernünftige" Funktion. Diese Funktion ist aber im üblichen Sinne nicht 2-mal differenzierbar, sondern nur differenzierbar im Sinne von Distributionen (genauer: siehe Literatur).

Wir können dann y_0 als partikuläre Lösung der DGL im Sinne von Distributionen auffassen.

Weitere Orthonormalsysteme

2. Legendre-Polynome

Da die Fourierreihe nur zur Approximation von periodischen Funktionen geeignet ist, müssen wir bei nichtperiodischen Funktionen andere Orthonormalsysteme betrachten:

Sei $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig in } [a, b]\}$ mit einem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ und der zugehörigen Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Gesucht: *Algebraische Polynome* p_n (mit $\text{grad} \leq n$), die eine gegebene Funktion $f \in C[a, b]$ im quadratischen Mittel am besten approximieren.

Kennen wir bzgl. des Skalarprodukts ein ONS $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, so gilt:

$$p_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$
 ist die beste Approximation im quadratischen Mittel an die Funktion f (vgl. Satz 9.3, S.307).

Betrachten wir nun das Intervall $[-1, 1]$ (jedes andere Intervall $[a, b]$ kann durch die Transformation $t = \frac{(x-b)+(x-a)}{b-a}$ auf das Intervall $[-1, 1]$ abgebildet werden) und in $C[-1, 1]$ das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$, so wollen wir bzgl. dieses Skalarprodukts ein ONS konstruieren:

Die Funktionen h_k mit $h_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, sind linear unabhängig in $[-1, 1]$, denn:

$$\sum_{k=0}^n a_k h_k(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \quad \forall x \in [-1, 1] \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

Mit Hilfe des *Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens* (vgl. S.78) konstruieren wir aus den Funktionen h_k ein ONS $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0\}$:

$$\varphi_0 = \frac{h_0}{\|h_0\|_2}, \quad \|h_0\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 h_0^2(x) dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 1 dx} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Allgemein für $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_k = \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|_2} \quad \text{mit} \quad \psi_k = h_k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle h_k, \varphi_j \rangle \varphi_j \Rightarrow$$

$$\psi_1 = h_1 - \langle h_1, \varphi_0 \rangle \varphi_0, \quad \langle h_1, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0, \quad \text{da Integrand ungerade}$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = x, \quad \|\psi_1\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$\psi_2 = h_2 - \langle h_2, \varphi_0 \rangle \varphi_0 - \langle h_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1$
 $\langle h_2, \varphi_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\langle h_2, \varphi_1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx = 0$, da
 Integrand ungerade

$$\Rightarrow \psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \text{ , } \|\psi_2\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right)$$

Analog erhält man:

$$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right)$$

usw.

Diese Funktionen $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ bilden ein ONS, d.h.: es gilt:

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{, falls } j \neq k \\ 1 & \text{, falls } j = k \end{cases} \text{ und}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

ist das Polynom vom grad $\leq n$, das die Funktion f im quadratischen Mittel am besten approximiert.

Beispiel hierzu

$f(x) = e^x$, gesucht: $p_2(x)$, (grad $p_2 \leq 2$) , mit $\int_{-1}^1 (f(x) - p_2(x))^2 dx$ minimal.

$$\Rightarrow p_2(x) = \langle e^x, \varphi_0 \rangle \varphi_0(x) + \langle e^x, \varphi_1 \rangle \varphi_1(x) + \langle e^x, \varphi_2 \rangle \varphi_2(x)$$

$$\langle e^x, \varphi_0 \rangle \varphi_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

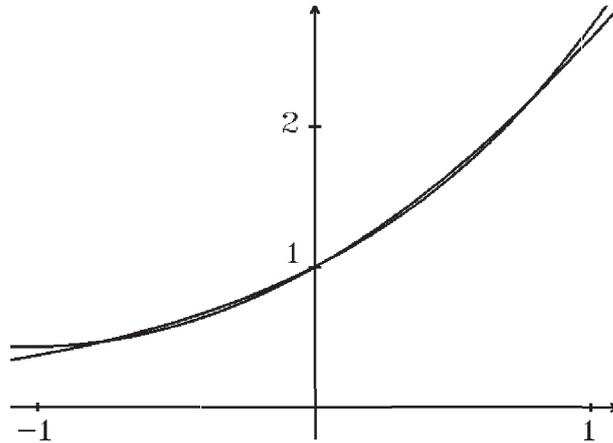
$$\langle e^x, \varphi_1 \rangle \varphi_1(x) = \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 x e^x dx \right) x = \frac{3}{2} \left(\left[(x-1)e^x \right]_{-1}^1 \right) x = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{e} x = \frac{3}{e} x$$

$$\begin{aligned} \langle e^x, \varphi_2 \rangle \varphi_2(x) &= \frac{5}{2} \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) e^x dx \right) \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8} \left(\int_{-1}^1 (3x^2 - 1) e^x dx \right) (3x^2 - 1) \\ &= \frac{5}{8} \left\{ \left[(3x^2 - 1) e^x \right]_{-1}^1 - 6 \int_{-1}^1 x e^x dx \right\} (3x^2 - 1) = \frac{5}{8} \left\{ 2 \left(e - \frac{1}{e} \right) - 6 \left[(x-1)e^x \right]_{-1}^1 \right\} (3x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{4} \left(\left(e - \frac{1}{e} \right) - \frac{6}{e} \right) (3x^2 - 1) = \frac{5}{4} \left(e - \frac{7}{e} \right) (3x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow p_2(x) = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) + \frac{3}{e} x + \frac{5}{4} \left(e - \frac{7}{e} \right) (3x^2 - 1) = \frac{15}{4} \left(e - \frac{7}{e} \right) x^2 + \frac{3}{e} x + \frac{33}{4e} - \frac{3e}{4}$$

ist für die Funktion e^x das Polynom (vom grad ≤ 2) bester Approximation im quadratischen Mittel in $[-1, 1]$.



Approximation von $f(x) = e^x$ im quadratischen Mittel

Multipliziert man die Funktionen φ_k mit dem Faktor $\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$, so erhält man die *Legendre-Polynome*

$$L_k(x) = \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \varphi_k(x) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

also:

$$L_0(x) = 1 \quad , \quad L_1(x) = x \quad , \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad , \quad L_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad , \quad \dots$$

Diese Polynome erfüllen folgende Eigenschaften:

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \left((x^2 - 1)^k \right)$$

$$L_k(1) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

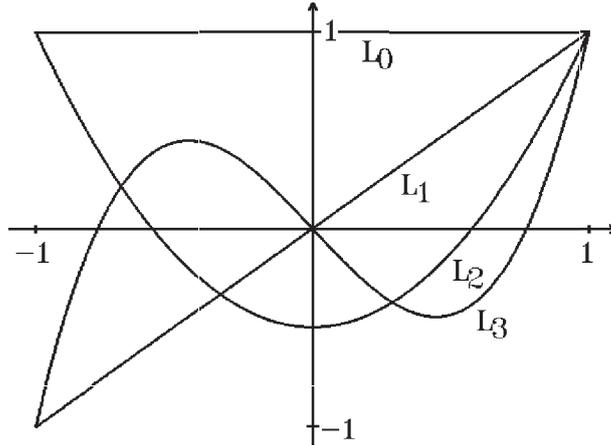
Die L_k erfüllen für $k \geq 1$ die *Rekursionsformel*:

$$(k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1)xL_k(x) - kL_{k-1}(x) \quad .$$

Die L_k erfüllen die *Legendresche DGL*:

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k+1)y = 0 \quad .$$

Beweis : später bzw. siehe Literatur.



Graphen der Legendre-Polynome L_0, L_1, L_2, L_3

3. Tschebyscheff-Polynome

Man kann in $C[-1, 1]$ auch andere Skalarprodukte betrachten, z.B.: ist

$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ auch ein Skalarprodukt in $C[-1, 1]$ (Eigenschaften einfach nachprüfbar).

Bzgl. dieses Skalarprodukts sind die *Tschebyscheff-Polynome* T_n orthogonal, aber nicht normiert:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad , \quad x \in [-1, 1]$$

Es gilt bzgl. dieses Skalarprodukts $\langle T_n, T_m \rangle = 0$ für $n \neq m$.

Weiter gilt:

T_n ist ein Polynom vom Grad $= n$.

Die T_n erfüllen für $n \geq 1$ die *Rekursionsformel*:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) .$$

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \quad , \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad , \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad , \quad \dots$$

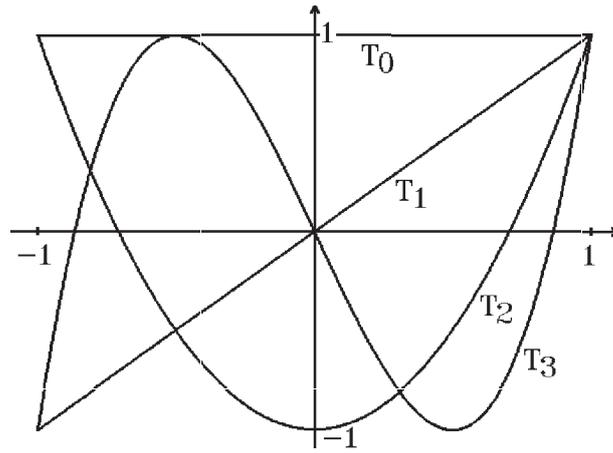
$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1, 1] \quad , \quad T_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Die Nullstellen von T_n sind: $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, denn

$$\cos(n \arccos x) = 0 \Leftrightarrow n \arccos x = \frac{2k+1}{2} \pi \Leftrightarrow x = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi .$$

Die T_n erfüllen die DGL:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 .$$



Graphen der Tschebyscheff-Polynome T_0, T_1, T_2, T_3

X Laplace-Transformation

Eine weitere Möglichkeit, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (z.B. Einschaltvorgänge) zu lösen, bietet die *Laplace-Transformation*. Hierbei wird einer Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Funktion $F : (\sigma, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folgendermaßen zugeordnet:

$L : f \rightarrow F$ mit

$$F(x) = L(f(t))(x) := \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

Die Funktion $f(t)$ wird also auf die Funktion $F(x)$ abgebildet. In der Anwendung ist normalerweise die Variable t die Zeit und die Variable x die Frequenz, also $f(t)$ eine Funktion der Zeit t und $F(x)$ eine Funktion der Frequenz x . Man kann also die Laplace-Transformation auch als Transformation vom *Zeitbereich* in den *Frequenzbereich* betrachten.

$F(x)$ ist nur definiert, wenn das uneigentliche Integral *konvergiert*. Dies ist nicht für alle Funktionen $f(t)$ der Fall. Wir definieren zunächst eine Klasse von Funktionen, für die das uneigentliche Integral auf jeden Fall konvergiert für $x > \sigma \geq 0$.

Definition 10.1 : Originalfunktionen

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Originalfunktion*, falls gilt:

a) f ist *stückweise stetig* in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[0, b] \subset [0, \infty)$,
d.h.: f hat nur endlich viele Sprungstellen in $[0, b]$.

b) f *wachse* für $t \rightarrow \infty$ *höchstens exponentiell*,
d.h.: $\exists M > 0, \sigma \geq 0, t_0 \geq 0$ mit $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t \geq t_0$.

Beispiele

1. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha \geq 0$, ist Originalfunktion, denn:
 $f(t) = t^\alpha$ ist für $\alpha \geq 0$ stetig in $[0, \infty)$, und es gilt:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{e^{\sigma t}} = 0$, falls $\sigma > 0$ beliebig.
2. $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist Originalfunktion, denn:
 $f(t) = e^{\alpha t}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig in $[0, \infty)$, und es gilt:
 $e^{\alpha t} \leq e^{\sigma t} \quad \forall t \geq 0$ für $\sigma = \alpha$, falls $\alpha > 0$, und $\sigma = 0$, falls $\alpha \leq 0$.
3. $f(t) = \cos \omega t$ und $f(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$, sind Originalfunktionen, denn:
 $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ sind für alle $\omega \in \mathbb{R}$ stetig und es gilt:
 $|\cos \omega t| \leq 1 = e^{\sigma t} \quad \forall t \geq 0$ für $\sigma = 0$ (analog für sin).

Satz 10.2 : Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Originalfunktion mit $\sigma \geq 0$.

Dann existiert die Laplace-Transformation $F(x) = L(f)(x)$ für alle $x > \sigma$.

Beweis :

$F(x) = L(f(t))(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$ ist konvergent für $x > \sigma$, denn

$|e^{-xt} f(t)| \leq M e^{(\sigma-x)t} \quad \forall t \geq t_0$ und $\int_{t_0}^\infty e^{(\sigma-x)t} dt$ ist konvergent, da $(\sigma - x) < 0$.

Die Eigenschaft "Originalfunktion" ist nur ein *hinreichendes Kriterium* für die Existenz der Laplace-Transformation. Es existieren auch "Nicht-Originalfunktionen", für die die Laplace-Transformation existiert:

Beispiel

$f(t) = t^\alpha$ mit $-1 < \alpha < 0$ ist keine Originalfunktion, da $f(t)$ für $t \rightarrow 0$ unbeschränkt, aber es existiert die Laplace-Transformation für $x > 0$:

$$\begin{aligned} L(t^\alpha)(x) &= \int_0^\infty e^{-xt} t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{x}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{x} ds = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-s} s^\alpha ds \\ &\quad (\text{Substitution } s = xt, ds = xdt, x > 0) \\ &= \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-s} s^{(\alpha+1)-1} ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}} \quad \forall x > 0, \forall \alpha > -1 \\ &\quad (\text{vgl. Gamma-Funktion S.220}). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt auch für $\alpha \geq 0$, also erhalten wir insgesamt:

$$L(t^\alpha)(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}, \quad \forall \alpha > -1, \quad \forall x > 0$$

Spezialfälle:

$$\alpha = -1/2 \Rightarrow$$

$$L(t^{-1/2})(x) = \frac{\Gamma(1/2)}{x^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}, \quad \text{da } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (\text{vgl. S.221}) \Rightarrow$$

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x > 0$$

$$\alpha = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$L(t^n)(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad \text{da } \Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{vgl. S.221}) \Rightarrow$$

$$L(t^n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad x > 0$$

$$\text{z.B.: } L(1)(x) = \frac{1}{x}, \quad L(t)(x) = \frac{1}{x^2}, \quad L(t^2)(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \dots$$

Satz 10.3 : Seien f_1, f_2 Originalfunktionen mit $L(f_1)(x) = L(f_2)(x) \quad \forall x > \sigma \Rightarrow f_1(t) = f_2(t) \quad \forall t > 0$, in denen f_1 und f_2 stetig sind.

D.h.: Bis auf die Sprungstellen stimmen f_1 und f_2 überein, wenn $L(f_1) = L(f_2)$ ist.

Beweis : siehe Literatur.

Sehen wir zwei Originalfunktionen, die bis auf ihre Sprungstellen übereinstimmen, als *gleich* an, so gilt:

$$L(f_1) = L(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2 .$$

Also ist die Laplace-Transformation auf dem Raum der Originalfunktionen eindeutig, und es existiert die *inverse Laplace-Transformierte*

$$L^{-1}(F) = f \quad , \text{ falls } L(f) = F \quad , \text{ also } L^{-1}(L(f)) = f .$$

Satz 10.4 : *Eigenschaften der Laplace-Transformation*

Seien f, f_1, f_2 Originalfunktionen. Dann gilt:

a) $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2) \quad , \quad L(cf_1) = cL(f_1) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (\text{Linearitat}).$

b) $L(f(\alpha t))(x) = \frac{1}{\alpha} L(f(t))\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad , \quad (\alpha > 0), \quad (\text{ahnlichkeitssatz}).$

c) $L(e^{-\alpha t} f(t))(x) = L(f(t))(x + \alpha) \quad , \quad (x + \alpha > \sigma), \quad (\text{Dampfungssatz}).$

d) $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0) \quad , \text{ falls } f, f' \text{ Originalfunktionen und } f \text{ stetig in } [0, \infty).$

e) $L(f'')(x) = x^2 L(f)(x) - xf(0) - f'(0) \quad , \text{ falls } f, f', f'' \text{ Originalfunktionen und } f, f' \text{ stetig in } [0, \infty).$

f) $L(f^{(n)})(x) = x^n L(f)(x) - x^{n-1} f(0) - x^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad ,$
falls $f, f', \dots, f^{(n)}$ Originalfunktionen und $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ stetig in $[0, \infty)$.

g) $\frac{d^n L(f)(x)}{dx^n} = (-1)^n L(t^n f(t))(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

h) $L\left(\int_0^t f(s) ds\right)(x) = \frac{1}{x} L(f)(x) \quad , \text{ falls } f \text{ und } \int_0^t f(s) ds \text{ Originalfunktionen.}$

Beweis :

a) gilt wegen der Linearitat des Integrals.

b) $L(f(\alpha t))(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(\alpha t) dt = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)s} f(s) \frac{1}{\alpha} ds = \frac{1}{\alpha} L(f(t))\left(\frac{x}{\alpha}\right) .$

(Substitution $s = \alpha t \quad , \quad ds = \alpha dt$)

c) $L(e^{-\alpha t} f(t))(x) = \int_0^\infty e^{-xt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(x+\alpha)t} f(t) dt = L(f(t))(x + \alpha).$

d) $L(f')(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f'(t) dt = \left[f(t)e^{-xt} \right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x e^{-xt} f(t) dt$

(partielle Integration)

$$= -f(0) + x \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt = xL(f)(x) - f(0)$$

denn: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-xt} = 0 \quad , \text{ da } |f(t)e^{-xt}| \leq M e^{(\sigma-x)t} \rightarrow 0 \quad , \text{ da } \sigma - x < 0.$

e) $L(f'')(x) = xL(f')(x) - f'(0) = x(xL(f)(x) - f(0)) - f'(0)$
 $= x^2L(f)(x) - xf(0) - f'(0)$ (nach d)).

f) mehrmals d) benutzen.

g) $L'(f)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dx} (e^{-xt} f(t)) dt = \int_0^\infty (-t)e^{-xt} f(t) dt$
 $= -L(tf(t))(x)$

(Differentiation und Integration vertauschbar, weil das Integral und Ableitungsin-
 tegral gleichmäßig konvergent für $x \geq \sigma_0 > \sigma$, denn $\int_0^\infty t^k e^{-\sigma_0 t} f(t) dt$ konver-
 gent für $k = 0, 1$).

Für $n > 1$ mehrmals diese Eigenschaft benutzen, allg. Induktionsbeweis.

h) mit $g(t) = \int_0^t f(s) ds \Rightarrow g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0 \Rightarrow$ (nach d))

$$L(g')(x) = xL(g)(x) - g(0) = xL(g)(x) \Rightarrow L(g)(x) = \frac{1}{x}L(f)(x).$$

Beispiele

Da $L(t^n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$

$$L(t^n e^{\alpha t})(x) = \frac{n!}{(x - \alpha)^{n+1}} \quad , (x > \alpha), \quad (\text{nach c}).$$

Insbesondere gilt:

$$L(e^{\alpha t})(x) = \frac{1}{x - \alpha} \quad , (x > \alpha)$$

Es gilt $L(\sin t)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $(x > 0)$, (Beweis später) \Rightarrow

$$L(\sin \beta t)(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(\frac{x}{\beta})^2 + 1} = \frac{\beta}{x^2 + \beta^2} \quad , (x > 0), \quad (\text{nach b}).$$

$$L(e^{\alpha t} \sin \beta t)(x) = \frac{\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad , (x > \alpha), \quad (\text{nach c}).$$

$$L(\sin' t)(x) = L(\cos t)(x) = xL(\sin t)(x) - \sin 0 = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (\text{nach d}).$$

$$L(t \sin \beta t)(x) = -L'(\sin \beta t)(x) = -\left(\frac{\beta}{x^2 + \beta^2}\right)' = \frac{2\beta x}{(x^2 + \beta^2)^2} \quad (\text{nach g}).$$

Zusatz:

Ist f eine Originalfunktion mit $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$, so ist die Laplace-Transformation auch definiert für alle $z \in \mathcal{C}$ mit $Re(z) > \sigma$, denn für $z = x + iy \in \mathcal{C}$ gilt:

$$L(f(t))(z) = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t) dt \quad , Re(z) = x > \sigma$$

Das Integral ist konvergent für $Re(z) = x > \sigma$, denn
 $|e^{-(x+iy)t} f(t)| \leq e^{-xt} |e^{-iyt}| \cdot M e^{\sigma t} = M e^{-(x-\sigma)t}$ (da $|e^{-iyt}| = 1$),
 und $\int_0^{\infty} e^{-(x-\sigma)t}$ ist konvergent für $x > \sigma$.

Damit gilt der *Dämpfungssatz* auch für *komplexe* α , also:

$$L(e^{-\alpha t} f(t))(z) = L(f(t))(z + \alpha) \quad , \quad Re(z + \alpha) > \sigma \quad , \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

Beispiel

$$L(e^{(\alpha+i\beta)t})(x) = L(1)(x - \alpha - i\beta) = \frac{1}{x - \alpha - i\beta} = \frac{(x - \alpha) + i\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \Rightarrow$$

$$L(e^{(\alpha+i\beta)t})(x) = \frac{(x - \alpha) + i\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad , \quad (x > \alpha)$$

Da $e^{\alpha t} \cos \beta t = Re(e^{(\alpha+i\beta)t})$ und $e^{\alpha t} \sin \beta t = Im(e^{(\alpha+i\beta)t}) \quad \Rightarrow$

$$L(e^{\alpha t} \cos \beta t)(x) = \frac{(x - \alpha)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad , \quad L(e^{\alpha t} \sin \beta t)(x) = \frac{\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad , \quad (x > \alpha)$$

Für $\alpha = 0$ folgt hieraus:

$$L(\cos \beta t)(x) = \frac{x}{x^2 + \beta^2} \quad , \quad L(\sin \beta t)(x) = \frac{\beta}{x^2 + \beta^2} \quad , \quad (x > 0)$$

Mit Hilfe der Regel g) hatten wir gezeigt (vgl. **S.333**)

$$L(t \sin \beta t)(x) = -L'(\sin \beta t)(x) = -\left(\frac{\beta}{x^2 + \beta^2}\right)' = \frac{2\beta x}{(x^2 + \beta^2)^2} \cdot$$

Dieses Ergebnis erhält man auch ohne Differentiation mit Hilfe des Dämpfungssatzes:

$$\begin{aligned} L(t \sin \beta t)(x) &= Im(L(te^{i\beta t})(x)) = Im(L(t)(x - i\beta)) = Im\frac{1}{(x - i\beta)^2} \\ &= Im\frac{(x + i\beta)^2}{(x^2 + \beta^2)^2} = Im\frac{(x^2 - \beta^2) + 2i\beta x}{(x^2 + \beta^2)^2} = \frac{2\beta x}{(x^2 + \beta^2)^2} \cdot \end{aligned}$$

Hieraus erhält man sofort:

$$L(t \cos \beta t)(x) = Re(L(te^{i\beta t})(x)) = \frac{x^2 - \beta^2}{(x^2 + \beta^2)^2} \cdot$$

Satz 10.5 : Grenzwertsätze

Seien f, f' Originalfunktionen. Dann gilt:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} L(f(t))(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} xL(f(t))(x) = f(0)$, falls f zusätzlich stetig in $[0, \infty)$.

Beweis :

a) Gilt $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow$

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-xt} e^{\sigma t} dt = M \cdot \left. \frac{e^{-(x-\sigma)t}}{-(x-\sigma)} \right]_{t=0}^\infty = \frac{M}{x-\sigma} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} L(f(t))(x) = 0.$$

Gilt $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ nur für $\forall t \geq t_0 > 0 \Rightarrow$ Integral bei t_0 aufspalten und dann analog.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} L(f'(t))(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} (xL(f)(x) - f(0)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} xL(f)(x) = f(0).$

Beispiel

Gesucht: $L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(x)$

$f(t) = \frac{\sin t}{t}$ ist Originalfunktion, denn: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, also ist f stetig in $[0, \infty)$.

Da $|f(t)| \leq 1 = e^{0t} \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow f$ ist höchstens exponentiell wachsend.

Es gilt: $tf(t) = \sin t \Rightarrow L(tf(t))(x) = L(\sin t)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$

Andererseits gilt: $L(tf(t))(x) = -L'(f(t))(x) \Rightarrow L'(f(t))(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow$
 $L(f(t))(x) = -\arctan x + c.$

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} L(f(t))(x) = 0 = -\frac{\pi}{2} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$$

Nach Regel h) folgt hieraus:

$$L\left(\int_0^t \frac{\sin s}{s} ds\right)(x) = \frac{1}{x} L\left(\frac{\sin t}{t}\right)(x) = \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$$

Weitere Beispiele

1. Da $\sinh \alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$ und $\cosh \alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$, gilt für $x > \alpha$:

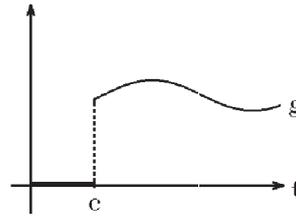
$$L(\sinh \alpha t)(x) = \frac{1}{2} \left(L(e^{\alpha t})(x) - L(e^{-\alpha t})(x) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x+\alpha} \right) = \frac{\alpha}{x^2 - \alpha^2}.$$

Analog erhält man $L(\cosh \alpha t)(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x+\alpha} \right) = \frac{x}{x^2 - \alpha^2}$, ($x > \alpha$), also

$$L(\sinh \alpha t)(x) = \frac{\alpha}{x^2 - \alpha^2}, \quad L(\cosh \alpha t)(x) = \frac{x}{x^2 - \alpha^2}, \quad (x > \alpha)$$

2.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq t < c \\ g(t) & ,\text{falls } t > c \end{cases}$$



$$L(f(t))(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-xt} g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-x(s+c)} g(s+c) ds$$

(Substitution $s = t - c$, $ds = dt$)

$$= e^{-cx} \int_0^{\infty} e^{-xs} g(s+c) ds = e^{-cx} L(g(t+c))(x).$$

Also gilt für

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq t < c \\ g(t) & ,\text{falls } t > c \end{cases}$$

$$L(f(t))(x) = e^{-cx} L(g(t+c))(x)$$

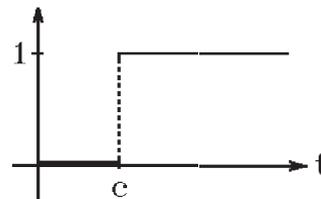
Damit gilt für die inverse Laplace-Transformation

$$L^{-1}(e^{-cx} L(g(t))(x))(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq t < c \\ g(t-c) & ,\text{falls } t > c \end{cases}$$

Beispiele hierzu

1.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq t < c \\ 1 & ,\text{falls } t > c \end{cases}$$

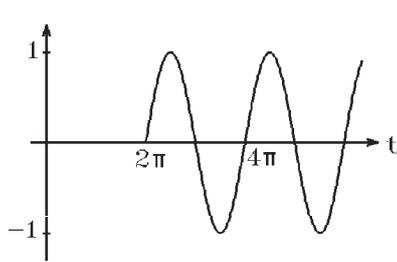


$$L(f(t))(x) = e^{-cx} L(1)(x) = \frac{e^{-cx}}{x}.$$

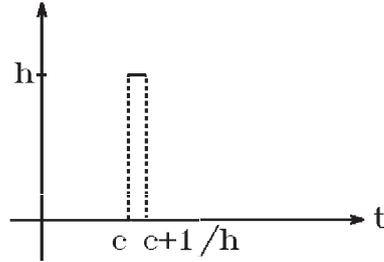
2.

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi x}}{x^2 + 1}\right)(t) = L^{-1}(e^{-2\pi x} L(\sin t)(x))(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq t < 2\pi \\ \sin(t - 2\pi) & ,\text{falls } t > 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi x}}{x^2 + 1}\right)(t) = \begin{cases} 0 & ,\text{falls } 0 \leq t < 2\pi \\ \sin t & ,\text{falls } t > 2\pi. \end{cases}$$



Graph von $L^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi x}}{x^2+1}\right)(t)$



Graph von $f_h(t)$

3. δ -Distribution

$$f_h(t) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } 0 \leq t < c, t > c + \frac{1}{h} \\ h & , \text{falls } c < t < c + \frac{1}{h} \end{cases}$$

$$L(f_h(t))(x) = e^{-cx} L(h)(x) - e^{-(c+\frac{1}{h})x} L(h)(x) = e^{-cx} \cdot \frac{h}{x} - e^{-(c+\frac{1}{h})x} \cdot \frac{h}{x} = e^{-cx} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{x}{h}}}{\frac{x}{h}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} L(f_h(t))(x) = e^{-cx} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\frac{x}{h}}}{\frac{x}{h}} = e^{-cx} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-u}}{u} = e^{-cx}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} L(f_h(t))(x) = e^{-cx}.$$

Da $\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(t) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } t \neq c \\ \infty & , \text{falls } t = c \end{cases} = \delta_c$ (δ -Distribution), gilt also

$L(\delta_c)(x) = e^{-cx}$

ist die Laplace-Transformierte der δ -Distribution.

Man könnte dieses Ergebnis auch anders herleiten:

$$\text{Da für } f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } 0 \leq t < c \\ 1 & , \text{falls } t > c \end{cases} \text{ gilt } L(f(t))(x) = \frac{e^{-cx}}{x} \Rightarrow$$

$$L(f'(t))(x) = xL(f(t))(x) - f(0) = e^{-cx}, \text{ da } f(0) = 0 \text{ und } f'(t) = \delta_c \text{ (Ableitung im Sinne von Distributionen)} \Rightarrow L(\delta_c)(x) = e^{-cx}.$$

Die δ -Distribution ist natürlich keine Originalfunktion, da sie ja keine "normale" Funktion ist. Diese Aussagen gelten also nur im Sinne von Distributionen.

2L-periodische Funktionen

Sei f eine $2L$ -periodische Originalfunktion, dann gilt:

$$\begin{aligned} L(f(t))(x) &= \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{2nL}^{2(n+1)L} e^{-xt} f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-x(s+2nL)} f(s+2nL) ds \quad (\text{Substitution } s = t - 2nL, ds = dt) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^{2L} e^{-x(s+2nL)} f(s) ds = \sum_{n=0}^\infty (e^{-2Lx})^n \cdot \int_0^{2L} e^{-xs} f(s) ds. \end{aligned}$$

(da f $2L$ -periodisch)

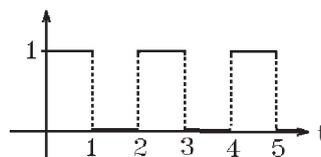
Da $\sum_{n=0}^\infty (e^{-2Lx})^n = \frac{1}{1 - e^{-2Lx}}$ für $x > 0 \Rightarrow$ für eine $2L$ -periodische Originalfunktion

$$L(f(t))(x) = \frac{1}{1 - e^{-2Lx}} \int_0^{2L} e^{-xs} f(s) ds, \quad (x > 0)$$

Beispiel hierzu

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{falls } 1 < t < 2 \end{cases}$$

2-periodisch fortgesetzt, also $L = 1$.



$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{-xs} f(s) ds &= \int_0^1 e^{-xs} ds = -\frac{1}{x} e^{-xs} \Big|_{s=0}^1 = \frac{1 - e^{-x}}{x} \Rightarrow \\ L(f(t))(x) &= \frac{1 - e^{-x}}{x(1 - e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-x}}{x(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} = \frac{1}{x(1 + e^{-x})}. \end{aligned}$$

Anwendung der Laplace-Transformation auf DGL

Wir wollen nun auf lineare DGL mit konstanten Koeffizienten die Laplace-Transformation anwenden. Wir erhalten dann aus der DGL eine neue Gleichung. Gelingt es uns, diese Gleichung zu lösen, so erhalten wir durch Rücktransformation auch die Lösung der ursprünglichen DGL.

Beispiele

1. $y'' + 5y' + 4y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (AWA).

Wenden wir auf diese DGL die Laplace-Transformation an, so erhalten wir wegen der Linearitätseigenschaft die neue Gleichung

$$L(y'') + 5L(y') + 4L(y) = L(t) = \frac{1}{x^2} .$$

Mit Regel d) und e) von Satz 10.4 folgt hieraus

$$(x^2L(y) - xy(0) - y'(0)) + 5(xL(y) - y(0)) + 4L(y) = \frac{1}{x^2} .$$

Wegen der Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ folgt hieraus

$$(x^2 + 5x + 4)L(y) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{x^2(x^2 + 5x + 4)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{x^2(x^2 + 5x + 4)}\right) .$$

Um die inverse Laplace-Transformation zu berechnen, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{x+4}\right) \\ &= \frac{1}{4}L^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{5}{16}L^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{48}L^{-1}\left(\frac{1}{x+4}\right) \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{4}t - \frac{5}{16} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t} \quad \text{ist die gesuchte Lösung.} \end{aligned}$$

2. $y'' - 4y = 2 \sinh t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} (x^2L(y) - xy(0) - y'(0)) - 4L(y) &= 2L(\sinh t) = \frac{2}{x^2 - 1} \\ \Rightarrow (x^2 - 4)L(y) &= x + \frac{2}{x^2 - 1} \quad (\text{da } y(0) = 1 \text{ und } y'(0) = 0) \\ \Rightarrow L(y) &= \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)} = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \\ \Rightarrow y(t) &= L^{-1}\left(\frac{x}{x^2 - 4}\right) + \frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{2}{x^2 - 4}\right) - \frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) \\ \Rightarrow y(t) &= \cosh 2t + \frac{1}{3} \sinh 2t - \frac{2}{3} \sinh t \quad \text{ist die gesuchte Lösung.} \end{aligned}$$

3. *Harmonische Schwingung*

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = v_0 .$$

$$(x^2L(y) - xy(0) - y'(0)) + \frac{k}{m}L(y) = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{k}{m}\right)L(y) = v_0$$

$$\Rightarrow y(t) = v_0L^{-1}\left(\frac{1}{x^2 + \frac{k}{m}}\right) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t .$$

4.

$$y'' + y = f(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{mit}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \text{falls } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & , \text{falls } t > 2\pi \end{cases} = 1 + \begin{cases} 0 & , \text{falls } 0 \leq t < 2\pi \\ -1 & , \text{falls } t > 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2L(y) - xy(0) - y'(0)) + L(y) = L(1) + e^{-2\pi x}L(-1) \quad (\text{vgl. S.336})$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)L(y) = \frac{1}{x}(1 - e^{-2\pi x}) \Rightarrow$$

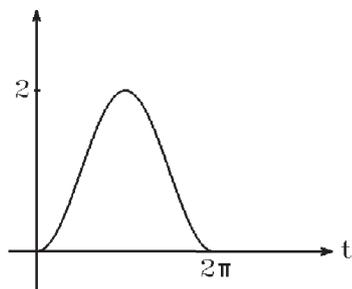
$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1 - e^{-2\pi x}}{x(x^2 + 1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{x(x^2 + 1)}\right) - L^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi x}}{x(x^2 + 1)}\right).$$

$$\text{Da } L^{-1}\left(\frac{1}{x(x^2 + 1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - L^{-1}\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = 1 - \cos t \Rightarrow$$

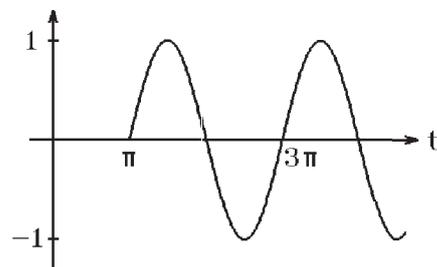
$$y(t) = (1 - \cos t) - \begin{cases} 0 & \text{,falls } 0 \leq t < 2\pi \\ 1 - \cos(t - 2\pi) & \text{,falls } t > 2\pi \end{cases} \quad (\text{vgl. S.336}) \Rightarrow$$

$$y(t) = (1 - \cos t) - \begin{cases} 0 & \text{,falls } 0 \leq t < 2\pi \\ 1 - \cos t & \text{,falls } t > 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 1 - \cos t & \text{,falls } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{,falls } t > 2\pi \end{cases}$$

ist die gesuchte Lösung.



Lösung von Beispiel 4.



Lösung von Beispiel 5.

5.

$$y'' + y = \delta_\pi \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (\delta_\pi \text{ } \delta\text{-Distribution})$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)L(y) = e^{-\pi x}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi x}}{1 + x^2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } 0 \leq t < \pi \\ \sin(t - \pi) & \text{,falls } t > \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } 0 \leq t < \pi \\ -\sin t & \text{,falls } t > \pi . \end{cases}$$

Faltungseigenschaft

Auf die Partialbruchzerlegung bei der Rücktransformation kann man verzichten, wenn man die folgende Faltungseigenschaft benutzt:

Definition 10.5 : Faltung

Seien f und g zwei Originalfunktionen, dann heißt

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

die *Faltung* von f und g .

Es gilt: $f * g = g * f$, denn:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du = - \int_t^0 f(s)g(t-s) ds = \int_0^t f(s)g(t-s) ds = (g * f)(t).$$

(Substitution $s = t - u$, $ds = -du$)

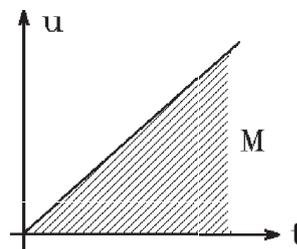
Satz 10.6 : Faltungseigenschaft

Seien f und g zwei Originalfunktionen, dann gilt

$$L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$$

Beweis :

$$\begin{aligned} L(f * g)(x) &= \int_0^\infty e^{-xt} \left(\int_0^t f(t-u)g(u) du \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-xt} f(t-u)g(u) du \right) dt \\ &= \int_M e^{-xt} f(t-u)g(u) d(u, t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{mit } M &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} : 0 \leq t < \infty, 0 \leq u \leq t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} : 0 \leq u < \infty, u \leq t < \infty \right\} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-xt} f(t-u)g(u) dt \right) du \\ &\quad \text{(Substitution } s = t - u, ds = dt) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x(s+u)} f(s)g(u) ds \right) du \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xs} f(s) ds \right) e^{-xu} g(u) du \\ &= L(f)(x) \int_0^\infty e^{-xu} g(u) du = L(f)(x) \cdot L(g)(x). \end{aligned}$$

Beispiele

$$1. L^{-1}\left(\frac{1}{x^2(x^2+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = L^{-1}(L(t) \cdot L(\sin t)) = L^{-1}(L(t * \sin t))$$

$$= t * \sin t = \int_0^t (t-u) \sin u \, du = (t-u)(-\cos u) \Big|_{u=0}^t - \int_0^t \cos u \, du = t - \sin t .$$

$$2. L^{-1}\left(\frac{2}{(x^2-1)(x^2-4)}\right) = \sinh t * \sinh 2t = \int_0^t \sinh(t-u) \sinh(2u) \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t (\cosh(t+u) - \cosh(t-3u)) \, du = \frac{1}{2} \left\{ \sinh(t+u) \Big|_{u=0}^t + \frac{1}{3} \sinh(t-3u) \Big|_{u=0}^t \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (\sinh(2t) - \sinh t + \frac{1}{3} \sinh(-2t) - \frac{1}{3} \sinh t) = \frac{1}{3} \sinh 2t - \frac{2}{3} \sinh t .$$

$$3. L^{-1}\left(\frac{1}{(x^2+\beta^2)^2}\right) = \frac{1}{\beta^2} \sin \beta t * \sin \beta t = \frac{1}{\beta^2} \int_0^t \sin \beta(t-u) \sin \beta u \, du$$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t (\cos \beta(t-2u) - \cos \beta t) \, du = \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \frac{\sin \beta(t-2u)}{-2\beta} \Big|_{u=0}^t - \cos \beta t \cdot u \Big|_{u=0}^t \right\}$$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \frac{1}{2\beta} (\sin \beta t - \sin \beta(-t)) - t \cos \beta t \right\} = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{\sin \beta t}{\beta} - t \cos \beta t \right) \quad , \text{ also}$$

$$\boxed{L^{-1}\left(\frac{1}{(x^2+\beta^2)^2}\right) = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{\sin \beta t}{\beta} - t \cos \beta t \right)}$$

Nach den Beispielen zu Satz 10.4, **S.333** gilt

$$\boxed{L^{-1}\left(\frac{x}{(x^2+\beta^2)^2}\right) = \frac{1}{2\beta} t \sin \beta t}$$

Eine Anwendung dieser beiden Ergebnisse liefert das nächste Beispiel:

$$4. L^{-1}\left(\frac{x+3}{(x^2+2x+5)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{(x+1)+2}{((x+1)^2+4)^2}\right) = e^{-t} L^{-1}\left(\frac{x+2}{(x^2+4)^2}\right)$$

(Dämpfungseigenschaft)

$$= e^{-t} \left(L^{-1}\left(\frac{x}{(x^2+4)^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{2}{(x^2+4)^2}\right) \right) = e^{-t} \left(\frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin 2t - t \cos 2t \right) \right)$$

$$= \frac{1}{8} e^{-t} (\sin 2t + 2t \sin 2t - 2t \cos 2t).$$

Lösung einer Integralgleichung

Beispiel

$$y(t) = 4t - 3 \int_0^t y(u) \sin(t-u) du.$$

Das Integral ist die Faltung von $y(t)$ mit $\sin t$, also erhalten wir

$$y(t) = 4t - 3y(t) * \sin t.$$

Anwendung der Laplace-Transformation auf diese Gleichung liefert

$$L(y) = 4L(t) - 3L(y(t) * \sin(t)) \Rightarrow$$

$$L(y) = \frac{4}{x^2} - 3L(y) \cdot L(\sin t) = \frac{4}{x^2} - 3L(y) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$L(y) \cdot \left(1 + \frac{3}{x^2 + 1}\right) = \frac{4}{x^2} \Rightarrow L(y) \cdot \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}\right) = \frac{4}{x^2} \Rightarrow$$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{4(x^2 + 1)}{x^2(x^2 + 4)}\right) = L^{-1}\left(\frac{4}{x^2(x^2 + 4)}\right) + L^{-1}\left(\frac{4}{x^2 + 4}\right)$$

$$= 2(t * \sin 2t) + 2 \sin 2t = 2 \int_0^t (t-u) \sin 2u du + 2 \sin 2t$$

$$= 2(t-u) \left(\frac{-\cos 2u}{2}\right) \Big|_{u=0}^t - \int_0^t \cos 2u du + 2 \sin 2t = t - \frac{1}{2} \sin 2t + 2 \sin 2t$$

$$\Rightarrow y(t) = t + \frac{3}{2} \sin 2t \quad \text{ist die gesuchte Lösung der Integralgleichung.}$$

XI Einführung in die Numerische Mathematik

Für viele Probleme der angewandten Mathematik existieren keine exakten Lösungsmethoden.

Beispiele

1. Gesucht: Die Nullstellen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $[a, b]$,

z.B.: $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$,

z.B.: $f(x) = \cos x - x = 0$.

In beiden Fällen lassen sich die Nullstellen nicht exakt berechnen.

2. Integralberechnung $\int_a^b f(x) dx$, falls eine Stammfunktion in einfacher Form nicht bekannt ist.

In diesen und anderen Fällen muß man versuchen, die gesuchten Lösungen, falls sie existieren, durch geeignete Verfahren *anzunähern*.

Soll ein Problem näherungsweise gelöst werden, so ist zunächst ein geeignetes Lösungsverfahren (z.B.: Iterationsverfahren) anzugeben. Dann stellen sich zwei Fragen:

- a) Konvergiert das Verfahren gegen die gesuchte Lösung ?
- b) Wie groß ist im Falle der Konvergenz der Fehler zwischen der Näherungslösung und der gesuchten exakten Lösung ?

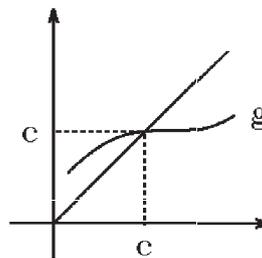
Diese Problematik wollen wir zunächst an Hand eines Beispiels behandeln:

Fixpunktverfahren

Gegeben: $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht: $c \in [a, b]$ mit $g(c) = c$,

c heißt *Fixpunkt* von g in $[a, b]$.



Geometrisch ist jeder Fixpunkt ein Schnittpunkt zwischen dem Graphen von g mit der Winkelhalbierenden.

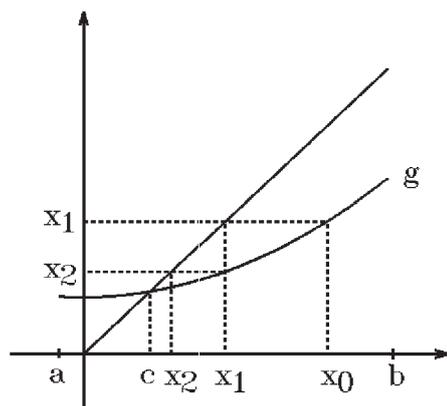
Definition 11.1 : Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $c \in [a, b]$ heißt *Fixpunkt* von g , wenn $g(c) = c$ gilt.

Definition 11.2 : *Fixpunktverfahren*

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ (Startwert). Das Verfahren

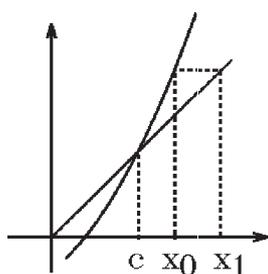
$$x_{n+1} := g(x_n) \quad , \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

heißt *Fixpunktverfahren*, falls $x_n \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

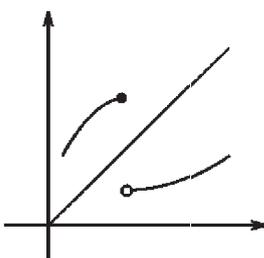


Man hofft nun, daß die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, die durch dieses Fixpunktverfahren definiert ist, konvergiert, und der Grenzwert der gesuchte Fixpunkt c ist, d.h. also :

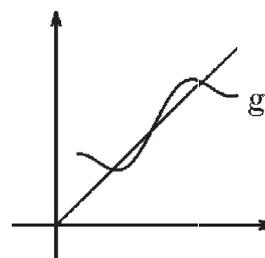
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ mit $g(c) = c$. Daß dies nicht immer der Fall ist, zeigen die folgenden Bilder :



$x_n \not\rightarrow c$



\nexists Fixpunkt



drei Fixpunkte , $x_n \rightarrow ?$

Wenn die Funktion g gewisse Eigenschaften besitzt, dann kann man zeigen, daß $x_n \rightarrow c$ mit $g(c) = c$, und c der einzige Fixpunkt in $[a, b]$ ist. Dazu benötigen wir folgende Definition:

Definition 11.3 : *Lipschitzbedingung*

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. g genügt in $[a, b]$ einer *Lipschitzbedingung*

$$\Leftrightarrow \exists L > 0 \text{ mit } |g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

L heißt *Lipschitzkonstante*.

Bemerkung 11.4 : Genügt g in $[a, b]$ einer *Lipschitzbedingung* $\Rightarrow g$ ist *stetig* in $[a, b]$.

Bemerkung 11.5 : Ist g in $[a, b]$ *stetig differenzierbar* $\Rightarrow g$ genügt in $[a, b]$ einer *Lipschitzbedingung* mit der Lipschitzkonstanten $L = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$.

Beweis :

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x - y)| \leq \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Beispiel

$$[a, b] = [0, 1], \quad g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x, \quad L = \max_{x \in [0, 1]} |g'(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |2x| = 2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq 2|x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

An den Bildern der letzten Seite erkennt man, daß das Fixpunktverfahren *divergiert*, wenn der Graph von g steiler verläuft als die Winkelhalbierende, falls also $|g'(x)| > 1$ in $U(c)$ ist. Genauer gilt folgender Satz:

Satz 11.6 : *Fixpunktsatz*

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, g genüge in $[a, b]$ einer *Lipschitzbedingung* mit der *Lipschitzkonstanten* $L < 1$.

Sei $x_0 \in [a, b]$ (Startwert), und es gelte $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = g(x_n) \in [a, b]$.

Dann *konvergiert* die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ gegen einen Fixpunkt $c \in [a, b]$ von g .

c ist in $[a, b]$ der *einzige* Fixpunkt von g .

Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$ x_n - c \leq \frac{L^n}{1 - L} x_1 - x_0 , \quad x_n - c \leq \frac{L}{1 - L} x_n - x_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bemerkung :

$x_{n+1} = g(x_n) \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ ist erfüllt, falls $g([a, b]) \subset [a, b]$.

Beweis : zu Satz 11.6

Es gilt die Ungleichung

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq 1.$$

Mehrmalige Anwendung dieser Ungleichung führt auf

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L|x_n - x_{n-1}| \leq L^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq L^n|x_1 - x_0| \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei $m > n$ beliebig \Rightarrow

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)| \\ &\leq L^{m-1}|x_1 - x_0| + L^{m-2}|x_1 - x_0| + \dots + L^n|x_1 - x_0| \\ &= \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^k \right) |x_1 - x_0| = \frac{L^n - L^m}{1 - L} |x_1 - x_0| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

(geometrische Summe, vgl. S.15)

Da $0 < L < 1 \Rightarrow L^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon \quad \forall m, n > N \Rightarrow (x_n)$ ist Cauchy-konvergent in $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Da \mathbb{R} vollständig $\Rightarrow \exists c \in [a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Da g stetig in $[a, b] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(c)$.

Aus $g(x_n) = x_{n+1} \rightarrow c \Rightarrow g(c) = c$, also ist c Fixpunkt.

c ist einziger Fixpunkt in $[a, b]$, denn:

sei d weiterer Fixpunkt in $[a, b] \Rightarrow$ (aus der Lipschitzbedingung)

$$|c - d| = |g(c) - g(d)| \leq L|c - d| < |c - d| \quad (\text{da } L < 1) \Rightarrow \text{Widerspruch.}$$

Da $|x_m - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|$, folgt mit $m \rightarrow \infty$

$$|c - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

Für $n = 1$ folgt hieraus

$$|c - x_1| \leq \frac{L}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

Wählen wir x_{n-1} als Startpunkt x_0 , so erhalten wir

$$|c - x_n| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|.$$

Bemerkung 11.7 : Je kleiner L ist, desto besser konvergiert das Fixpunktverfahren gegen den gesuchten Fixpunkt.

Bemerkung 11.8 : Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes sind erfüllt, wenn g in $[a, b]$ stetig differenzierbar ist mit $\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| < 1$, und $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt.

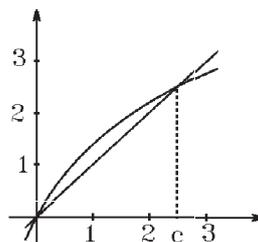
Beispiel

$$g(x) = 2 \ln(1 + x)$$

$$\text{Gesucht: } c = 2 \ln(1 + c),$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ oder } c \in [2, 3].$$

$$\text{Gesucht: } c \in [2, 3].$$



$$\text{Es gilt: } g'(x) = \frac{2}{1+x} \Rightarrow \max_{x \in [2, 3]} |g'(x)| = \frac{2}{3} = L < 1.$$

$g([2, 3]) \subset [2, 3]$, denn: g ist streng monoton wachsend in $[2, 3]$,

da $g'(x) > 0 \quad \forall x \in [2, 3]$, und es gilt $g(2) = 2.197 \dots > 2$ und $g(3) = 2.77 \dots < 3$

\Rightarrow Vor. des Fixpunktsatzes erfüllt.

Mit dem Startwert $x_0 = 2.7$ erhalten wir die Iterationsfolge

$x_1 = g(x_0) = 2.6167\dots$, $x_2 = g(x_1) = 2.5711\dots$, $x_3 = g(x_2) = 2.5457\dots$,
 $x_4 = g(x_3) = 2.5315\dots$ mit der Fehlerabschätzung

$$|c - x_4| \leq \frac{(2/3)^4}{1 - 2/3} |x_1 - x_0| = \frac{16}{27} |x_1 - x_0| \leq 0.05 \quad \text{oder}$$

$$|c - x_4| \leq \frac{2/3}{1 - 2/3} |x_4 - x_3| = 2|x_4 - x_3| \leq 0.029 .$$

Da L nicht sehr klein, erhalten wir nur relativ langsame Konvergenz.

Bemerkung 11.9 : Ist $|g'(x)| \geq K > 1 \quad \forall x \in [a, b]$ und g stetig differenzierbar mit $g([a, b]) \subset [a, b]$, so existiert die Umkehrfunktion $g^{-1} : [a, b] \rightarrow [a, b]$ mit $\max_{t \in [\alpha, \beta]} |g^{-1}'(t)| < 1$.

$$\text{Denn: } |g^{-1}'(t)| = \frac{1}{|g'(g^{-1}(t))|} \leq \frac{1}{K} \quad \forall t \in [\alpha, \beta] .$$

Also kann man zur *Umkehrfunktion* g^{-1} übergehen, denn es gilt

$$\boxed{g(c) = c \Leftrightarrow g^{-1}(c) = c}$$

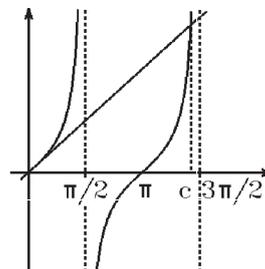
Beispiel

$$g(x) = \tan x$$

Gesucht: $\tan c = c$ mit

$$c \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) , \text{ also}$$

Schnittpunkt des 2. tan-Astes mit der Winkelhalbierenden.



$$\text{Es gilt: } |g'(x)| = |1 + \tan^2 x| \geq 2 > 1 \quad \forall x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow g^{-1}(x) = \pi + \arctan x$ erfüllt in $[1, \infty)$ die Voraussetzungen, denn

$$\max_{x \geq 1} |g^{-1}'(x)| = \max_{x \geq 1} \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2} = L < 1 , g^{-1} \text{ ist streng monoton wachsend mit}$$

$$g^{-1}(1) = \frac{5\pi}{4} > 1 \text{ und } g^{-1}(x) \rightarrow \frac{3\pi}{2} < \infty \text{ für } x \rightarrow \infty .$$

Mit dem Startwert $x_0 = \frac{5\pi}{4}$ erhalten wir:

$$x_4 = 4.4934062\dots , x_5 = 4.4934093\dots$$

mit der Fehlerabschätzung

$$|c - x_5| \leq \frac{1/2}{1 - 1/2} |x_5 - x_4| \leq 3.1 \cdot 10^{-6} .$$

Berechnung von Nullstellen

Gegeben: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht: $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$ (Nullstelle von f in $[a, b]$).

Zurückführung auf ein Fixpunktverfahren

1. Möglichkeit:

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = c \text{ mit } g(x) = x + f(x), \text{ falls } -2 < f'(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

2. Möglichkeit:

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = c \text{ mit } g(x) = x - f(x), \text{ falls } 0 < f'(x) < 2 \quad \forall x \in [a, b].$$

3. Möglichkeit:

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = c \text{ mit } g \text{ so w\u00e4hlen, da\u00df } \max_{x \in [a, b]} |g'(x)| \text{ m\u00f6glichst klein.}$$

4. M\u00f6glichkeit: *Newton-Verfahren* (vgl. **S.168**)

$$f(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = c \text{ mit } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ falls } f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Beispiel

$$f(x) = x^2 - 5x + 4, \quad [a, b] = [0, 2].$$

Da $f(0) = 4 > 0$ und $f(2) = -2 < 0 \Rightarrow \exists c \in [0, 2]$ mit $f(c) = 0$.

a) Da $f'(x) = 2x - 5$, also $f'(0) = -5$, sind die ersten beiden M\u00f6glichkeiten nicht geeignet, aber:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{5} = x.$$

$$\text{W\u00e4hle also } g(x) = \frac{x^2 + 4}{5} \Rightarrow |g'(x)| = \left| \frac{2}{5}x \right| \leq \frac{4}{5} = L < 1 \text{ in } [0, 2].$$

Da $g'(x) = \frac{2}{5}x > 0$ in $[0, 2] \Rightarrow g$ ist streng monoton wachsend in $[0, 2]$.

Mit $g(0) = 4/5 > 0$ und $g(2) = 8/5 < 2 \Rightarrow g([0, 2]) \subset [0, 2] \Rightarrow$

alle Vor. des Fixpunktsatzes sind erf\u00fcllt. Mit dem Startwert $x_0 = 0$ erhalten wir $x_1 = g(0) = 4/5 = 0.8$, $x_2 = g(x_1) = 0.928$, $x_3 = g(x_2) = 0.9722 \dots$

$$|c - x_3| \leq \frac{4/5}{1 - 4/5} |x_3 - x_2| \leq 0.177.$$

Die exakte L\u00f6sung ist $c = 1$.

b) *Newton-Verfahren*

$$f(x) = x^2 - 5x + 4, \quad f'(x) = 2x - 5,$$

$$g(x) = x - \frac{x^2 - 5x + 4}{2x - 5} = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}.$$

Die Vor. f\u00fcr die Konvergenz werden gleich gezeigt.

Mit dem Startwert $x_0 = 0$ erhalten wir

$x_1 = g(0) = 4/5 = 0.8$, $x_2 = g(x_1) = 0.98823\dots$, $x_3 = g(x_2) = 0.99995\dots$,
 also wesentlich bessere Konvergenz als unter a).

Geometrische Deutung des Newton-Verfahrens (vgl. S.168)

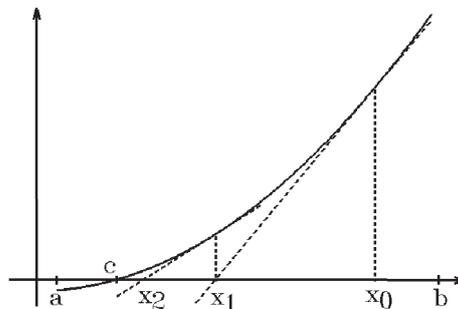
$$x_0 \in [a, b]$$

$f(a)f(b) < 0$,
 (Vorzeichenwechsel)

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

falls $f'(x_n) \neq 0$.

x_{n+1} ist der Schnittpunkt der
 Tangente an f im Punkt $\begin{pmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{pmatrix}$
 mit der x -Achse.



Mit $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ gilt $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

Also erhalten wir die Lipschitzkonstante

$$L = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right|$$

Aus dem Fixpunktsatz folgt sofort der folgende Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren:

Satz 11.10 : *Konvergenzkriterium für das Newton-Verfahren*

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar in $[a, b]$ mit $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Für den Startwert x_0 seien alle $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Sei ferner $L = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$.

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ gegen die *einzige Nullstelle* $c \in [a, b]$ von f .

Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$|c - x_n| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}| \quad \text{und} \quad |c - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [a, b]} |f'(x)|} .$$

Beweis :

Alle Aussagen bis auf die letzte Fehlerabschätzung folgen sofort aus dem Fixpunktsatz. Die letzte Fehlerabschätzung folgt aus dem Mittelwertsatz mit

$$0 = f(c) = f(x_n) + f'(\xi_n)(c - x_n) \Rightarrow |c - x_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi_n)|} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Bemerkung :

Da $f(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = 0 \Rightarrow |g'(x)| \leq L < 1$ in $U(c)$ (Umgebung von c) $\Rightarrow L < 1$ in $U(c)$ (da g' stetig in $[a, b]$, weil f 2-mal stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$). Also ist die Voraussetzung "L < 1" in einer kleinen Umgebung $U(c)$ immer erfüllt. Falls also x_0 "nahe genug" bei c gewählt wird, konvergiert das Newton-Verfahren. Die Lipschitzkonstante L läßt sich i.A. nur schwer berechnen. Man verzichtet normalerweise darauf und wählt x_0 möglichst nahe bei der gesuchten Nullstelle c .

Beispiele

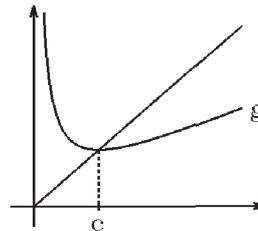
1. Gesucht: \sqrt{a} , ($a > 0$).

$c = \sqrt{a}$ ist die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$.

Newton-Verfahren für $f(x) = x^2 - a$:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} \\ = \frac{x^2 + a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$



Graph von $g(x)$

Dieses Verfahren ist auch als Heron-Verfahren bekannt.

Hierbei wird das geometrische Mittel $\sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$ durch das arithmetische Mittel

$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ angenähert.

Sei $x_0 > \sqrt{a} \Rightarrow g([\sqrt{a}, x_0]) \subset [\sqrt{a}, x_0]$ und $|g'(x)| \leq \frac{1}{2} = L < 1 \quad \forall x \in [\sqrt{a}, x_0]$.

Denn: $g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \Rightarrow 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [\sqrt{a}, x_0] \Rightarrow$

g ist monoton wachsend in $[\sqrt{a}, x_0]$ mit $\sqrt{a} = g(\sqrt{a}) \leq g(x) \leq g(x_0) < x_0$
 $\forall x \in [\sqrt{a}, x_0]$

\Rightarrow Vor. des Fixpunktsatzes erfüllt $\Rightarrow x_n \rightarrow \sqrt{a}$ mit

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1/2}{1 - 1/2} |x_n - x_{n-1}| = |x_n - x_{n-1}| \Rightarrow$$

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq |x_n - x_{n-1}| .$$

Beispiel hierzu: $a = 2$, also $c = \sqrt{2}$

$$x_0 = 1.5, \quad x_1 = g(x_0) = 1.41\bar{6}, \quad x_2 = g(x_1) = 1.4142157\dots, \\ x_3 = g(x_2) = 1.4142136\dots, \quad x_4 = g(x_3) = 1.4142136\dots$$

$$|x_3 - c| \leq |x_3 - x_2| \leq 2.2 \cdot 10^{-6} \quad \text{oder}$$

$$f(1.4142136) > 0, \quad f(1.4142135) < 0 \Rightarrow 1.4142135 < \sqrt{2} < 1.4142136.$$

2.

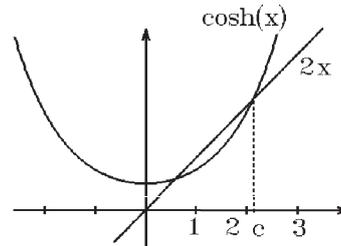
$$f(x) = \cosh x - 2x$$

2 Nullstellen, und zwar eine in $[0, 1]$ und eine in $[2, 3]$,

denn:

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) < 0$$

$$f(2) < 0, \quad f(3) > 0.$$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cosh x_n - 2x_n}{\sinh x_n - 2}$$

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 0.58629\dots, \quad x_2 = 0.5893836\dots, \quad x_3 = 0.58938776\dots$$

Da $|f'(x)| = |\sinh x - 2| \geq 0.8 \quad \forall x \in [0, 1]$, gilt für den Fehler

$$|c_1 - x_3| \leq \frac{|f(x_3)|}{\min_{x \in [0,1]} |f'(x)|} < 10^{-8}.$$

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2.14617\dots, \quad x_2 = 2.1271644\dots, \quad x_3 = 2.1268000\dots, \\ x_4 = 2.1267998\dots$$

$$f(2.1267998) < 0, \quad f(2.1267999) > 0 \Rightarrow 2.1267998 < c_2 < 2.1267999.$$

Satz 11.11: *quadratische Konvergenz*

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 3-mal stetig differenzierbar in $[a, b]$, und sei c einfache Nullstelle von f in $[a, b]$. Die Voraussetzungen des Satzes 11.10 seien erfüllt.

Dann konvergiert das Newton-Verfahren mit *quadratischer Konvergenz*, d.h.: $\exists M > 0$ mit

$$|x_{n+1} - c| \leq M|x_n - c|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(c) = 0.$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung um c erhalten wir

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(c) + g'(c)(x_n - c) + \frac{g''(\xi)}{2}(x_n - c)^2.$$

$$\text{Da } g(c) = c \text{ und } g'(c) = 0 \Rightarrow x_{n+1} - c = \frac{g''(\xi)}{2}(x_n - c)^2$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - c| \leq M|x_n - c|^2 \quad \text{mit } M = \max_{\xi \in [a,b]} \frac{|g''(\xi)|}{2}.$$

Bemerkung : Quadratische Konvergenz bedeutet:

Ist x_n auf k Stellen genau $\Rightarrow x_{n+1}$ ist ungefähr auf $2k$ Stellen genau,
d.h.: Die Anzahl der richtigen Stellen wird in jedem Schritt ungefähr *verdoppelt*.

Denn: gilt $|x_n - c| < 10^{-k} \Rightarrow |x_{n+1} - c| \leq M \cdot 10^{-2k}$.

Bemerkung : Das Newton-Verfahren kann auch für *komplexe Funktionen* benutzt werden:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad . \text{ falls } f'(z_n) \neq 0$$

Die Suche nach "günstigen" Startwerten z_0 ist hier allerdings nicht so einfach.

Beispiel 1

$$f(z) = z^4 + z + 4$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^4 + z_n + 4}{4z_n^3 + 1} = \frac{3z_n^4 - 4}{4z_n^3 + 1} .$$

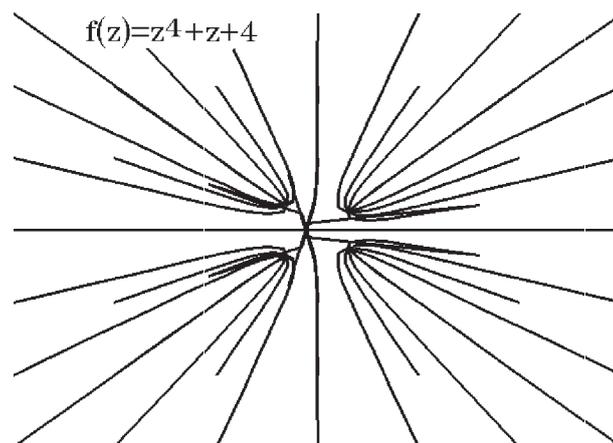
Mit dem Startwert $z_0 = 1 + i$ erhalten wir

$$z_1 = 0.99115 + i \cdot 1.13274 \quad , \quad z_2 = 1.00364 + i \cdot 1.120819 \quad , \quad z_3 = 1.00385404 + i \cdot 1.1210545 \quad , \\ z_4 = 1.00385398 + i \cdot 1.12105442 \quad , \quad z_5 = 1.00385398 + i \cdot 1.12105442 .$$

Der Startwert $z_0 = -1 + i$ ergibt: $z_5 = -1.00385398 + i \cdot 0.871023881$.

Da $f(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten \Rightarrow mit z ist auch \bar{z} Nullstelle von $f(z)$. Also sind die Nullstellen von $f(z)$

$$z_{1,2} = 1.00385398 \pm i \cdot 1.12105442 \quad , \quad z_{3,4} = -1.00385398 \pm i \cdot 0.871023881 .$$



In diesem Bild sind die Wege gezeichnet, die das Newton-Verfahren vom Startpunkt

aus bis zur angenäherten Nullstelle zurücklegt (die Eckpunkte der Polygonzüge sind die Punkte z_n der Folge (z_n)).

Die äußersten Startpunkte sind $\pm 9 \pm 9i$. Man kann erkennen, daß bei einigen Startwerten *nicht* die am nächsten liegende Nullstelle angenähert wird.

Beispiel 2

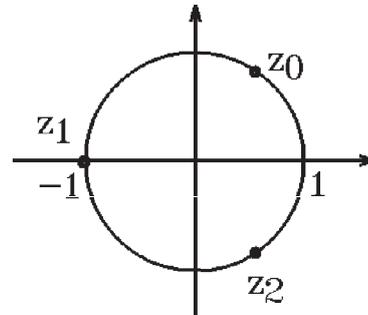
$$f(z) = z^3 + 1$$

Exakte Berechnung der Nullstellen:

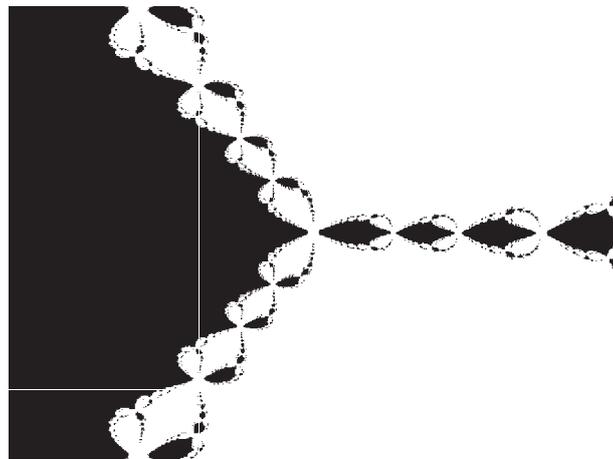
$$z^3 = -1 \Rightarrow z_k = e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$z_0 = e^{i \frac{\pi}{3}},$$

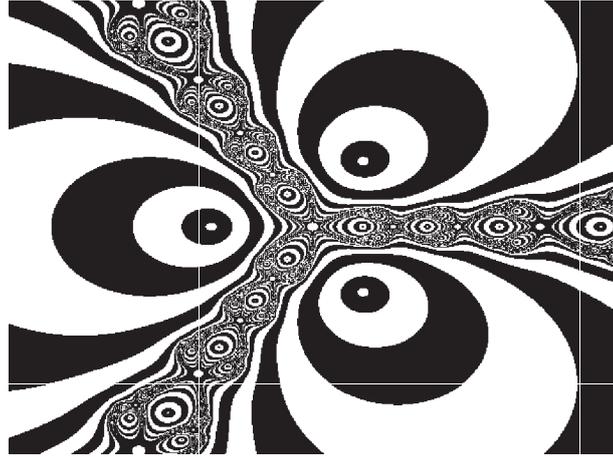
$$z_1 = e^{i\pi} = -1, \quad z_2 = \bar{z}_0.$$



Im folgenden Bild sind alle Punkte der komplexen Ebene (zwischen $-3 - 3i$ und $3 + 3i$) schwarz gekennzeichnet, die als Startwerte beim Newton-Verfahren die Nullstelle (-1) angesteuert haben:



Im folgenden Bild sind die Punkte der komplexen Ebene (zwischen $-3 - 3i$ und $3 + 3i$) schwarz gekennzeichnet, die als Startwert beim Newton-Verfahren eine *gerade* Anzahl von Iterationsschritten benötigten, um die entsprechende Nullstelle mit einer Genauigkeit $< 10^{-8}$ anzunähern:



11.12 Regula falsi

Ersetzt man im Newton-Verfahren die Ableitung $f'(x_n)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, so erhält man die Regula falsi:

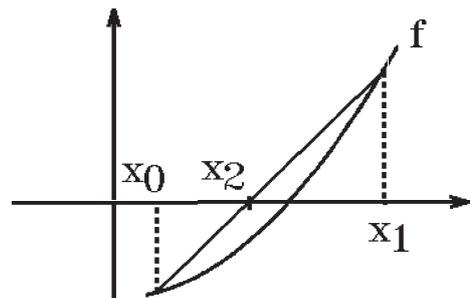
Wähle zwei Startwerte $x_0, x_1 \in [a, b]$ so, daß $f(x_0)f(x_1) < 0$ (Vorzeichenwechsel).

Berechne:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \\ &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned}$$

Also

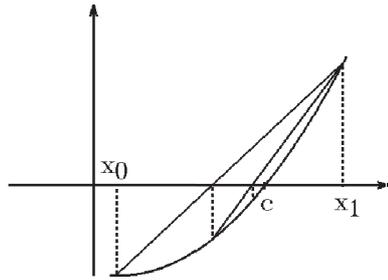
$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



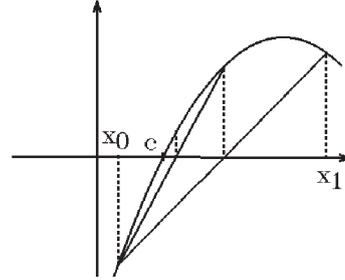
Ist $f(x_n)f(x_{n+1}) < 0 \Rightarrow$ weiter mit x_n, x_{n+1} ,
sonst weiter mit x_{n-1}, x_{n+1} .

Falls Konvergenz vorliegt, ist die Konvergenz nicht mehr quadratisch.

Man benutzt die Regula falsi (an Stelle des Newton-Verfahrens), wenn die Ableitung von f nicht oder nur schwer zu berechnen ist.



f konvex , x_1 bleibt rechte Grenze



f konkav , x_0 bleibt linke Grenze

Beispiel

$$f(x) = \cosh x - 2x \quad (\text{vgl. Beispiel 2., S.352})$$

$$x_0 = 0, x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0.68637978, f(x_0)f(x_2) < 0$$

$$x_0, x_2 \Rightarrow x_3 = 0.60859710, f(x_0)f(x_3) < 0$$

$$x_0, x_3 \Rightarrow x_4 = 0.59305218, f(x_0)f(x_4) < 0$$

⋮

$$x_0, x_{12} \Rightarrow x_{13} = 0.58938776$$

$$f(0.58938776) > 0, f(0.58938777) < 0 \Rightarrow 0.58938776 < c < 0.58938777.$$

Newton-Verfahren für nichtlineare GLS

Gegeben: n Gleichungen mit n Unbekannten

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

⋮

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

In Vektorschreibweise erhalten wir mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$.

Gesucht: $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{f}(\vec{c}) = \vec{0}$ (Nullstelle von \vec{f}).

Beim einfachen Newton-Verfahren wurde die Funktion f an der Stelle x_n durch die Tangente angenähert (linearisiert) und die Tangente gleich 0 gesetzt $\Rightarrow x_{n+1}$. Also

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0 \Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n).$$

Also werden wir auch in diesem allgemeinen Fall die Funktion \vec{f} durch den Anfang der Taylorentwicklung *linearisieren*:

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{x}_n) + \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_n)(\vec{x} - \vec{x}_n) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_n) \right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n)$$

Hierbei ist $\left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_n) \right)^{-1}$ die *inverse Funktionalmatrix* von \vec{f} an der Stelle \vec{x}_n .

Man berechnet nicht die Inverse, sondern löst das lineare GLS:

11.13 Newton-Verfahren

$$\left(\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}(\vec{x}_n) \right) \vec{d} = -\vec{f}(\vec{x}_n) \quad , \quad \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{d} \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit \vec{x}_0 als Startvektor.

Auch hier gilt bei einfachen Nullstellen und 3-mal stetig differenzierbaren Funktionen \vec{f} *quadratische Konvergenz*, falls der Startvektor "nahe genug" bei der gesuchten Nullstelle liegt. Wie im Komplexen ist auch hier die Suche nach geeigneten Startvektoren nicht immer ganz einfach.

Beispiel

$$f_1(x, y) = 4x^2 - xy^2 = 0$$

$$f_2(x, y) = 2x^2 + x^2y - y^2 = 0$$

$$A(x, y) := \frac{d\vec{f}}{d(x, y)}(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - y^2 & -2xy \\ 4x + 2xy & x^2 - 2y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wählen wir als Startvektor } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.8 \end{pmatrix} \Rightarrow A(0.9, 1.8) = \begin{pmatrix} 3.96 & -3.24 \\ 6.84 & -2.79 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{d} = -\begin{pmatrix} f_1(0.9, 1.8) \\ f_2(0.9, 1.8) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.324 \\ -0.162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.324 \\ 0.162 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3.96 & -3.24 \\ 6.84 & -2.79 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.324 \\ 0.162 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{(mit Hilfe der Cramer-Regel)}$$

$$d_1 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} -0.324 & -3.24 \\ 0.162 & -2.79 \end{pmatrix} = \frac{1.42884}{11.1132} = 0.1285714$$

$$d_2 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 3.96 & -0.324 \\ 6.84 & 0.162 \end{pmatrix} = \frac{2.85768}{11.1132} = 0.2571429$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.0286 \\ 2.0571 \end{pmatrix}.$$

Nächster Schritt:

$$A(1.0286, 2.0571)\vec{d} = -\vec{f}(1.0286, 2.0571) \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 2.003 \end{pmatrix}.$$

Die nächsten Schritte ergeben:

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.0000045 \\ 2.0000090 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Die exakte Lösung ist } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bei einem $(2, 2)$ -GLS kann man auch mit der inversen Matrix rechnen, es gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Anwendung: Gesucht: *Extrema* der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$.

Notwendige Bedingung: $\text{grad } f(\vec{x}) = \vec{0}$,

also ein GLS für die n Unbekannten x_1, \dots, x_n .

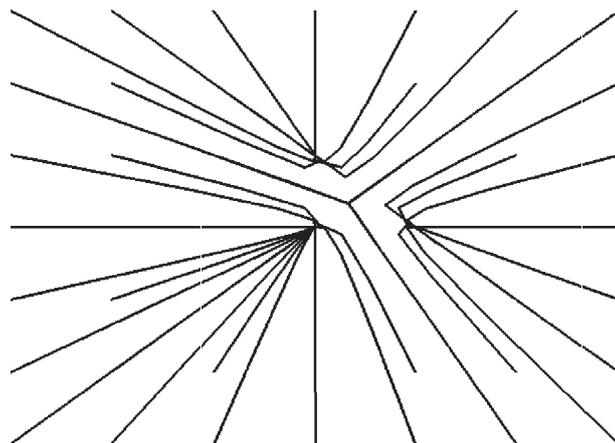
Beispiel hierzu

$f(x, y) = xy(3 - x - y)$ (vgl. Beispiel 3., S.293)

$$\text{grad } f(x, y) = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_x = y(3 - x - y) - xy = 0 \\ f_y = x(3 - x - y) - xy = 0 \end{array} \right\}$$

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(x,y)} \quad \text{Funktionalmatrix von } \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

$$A(x_n, y_n)\vec{d} = - \begin{pmatrix} f_x(x_n, y_n) \\ f_y(x_n, y_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$



In diesem Bild sind wieder die Wege gezeichnet, die beim Newton-Verfahren bei verschiedenen Startvektoren zurückgelegt wurden. Die Nullstellen von $\text{grad } f$ sind hier

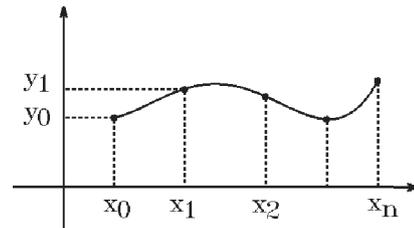
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nur bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein relatives Extremum, bei allen anderen Punkten liegen keine Extrema vor.

Bemerkung : Für die Extremwertsuche bei größeren Problemen sind andere Verfahren, z.B.: *Gradientenverfahren* (siehe Literatur) besser geeignet als das Newton-Verfahren.

Interpolation

Gegeben: $n + 1$ verschiedene *Stützstellen* $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, und
 $n + 1$ *Stützwerte* $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Gesucht: Ein Polynom p
mit $\text{grad } p \leq n$
und $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$.



Anwendungen:

a) *Meßreihe:* An den $n + 1$ Stellen x_0, x_1, \dots, x_n werden die Werte y_0, y_1, \dots, y_n gemessen.

Gesucht: Polynom p , das diese Meßpunkte $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ verbindet (interpoliert).

b) *Gegeben:* Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht: Polynom p , das an $n + 1$ Stellen x_0, x_1, \dots, x_n mit der Funktion übereinstimmt, d.h.: $p(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$, d.h.: Die Funktion f wird durch p interpoliert.

Im folgenden Satz wird gezeigt, daß das Interpolationsproblem (wie oben angegeben) eindeutig lösbar ist.

Satz 11.14 : *Interpolationsproblem*

Gegeben: $n + 1$ verschiedene *Stützstellen* $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, und
 $n + 1$ *Stützwerte* $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Dann existiert *eindeutig* ein Polynom p mit $\text{grad } p \leq n$
und $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$. p hat die Darstellungsform von *Lagrange* :

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k d_k(x) \quad \text{mit}$$

$$d_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

p heißt *Interpolationspolynom* zu den Punkten $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $(0 \leq i \leq n)$.

Beweis :

Existenz: d_k ist ein Polynom vom grad $= n \Rightarrow p$ ist ein Polynom vom grad $\leq n$.

Es gilt: $d_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{falls } i = k \end{cases} \Rightarrow p(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k d_k(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$

$\Rightarrow p$ ist Interpolationspolynom zu den Punkten $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $(0 \leq i \leq n)$ mit grad $p \leq n$.

Eindeutigkeit: Sei r ein weiteres Interpolationspolynom mit grad $r \leq n$ und $r(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \Rightarrow q = r - p$ ist ein Polynom vom grad $\leq n$ und $q(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \Rightarrow q(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (denn ein Polynom vom grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen) $\Rightarrow r(x) = p(x) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Beispiel

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4,$$

$$y_0 = 15, \quad y_1 = 6, \quad y_2 = 10,$$

$$d_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1-2)(-1-4)} = \frac{1}{15}(x-2)(x-4) = \frac{1}{15}(x^2 - 6x + 8)$$

$$d_1(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(2+1)(2-4)} = -\frac{1}{6}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{6}(x^2 - 3x - 4)$$

$$d_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(4+1)(4-2)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2) = \frac{1}{10}(x^2 - x - 2)$$

$$p(x) = y_0 d_0(x) + y_1 d_1(x) + y_2 d_2(x) \\ = (x^2 - 6x + 8) - (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - x - 2) = x^2 - 4x + 10.$$

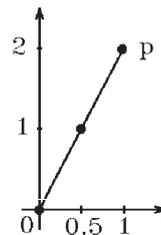
Der Grad von p kann kleiner als n werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1,$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2,$$

$$\Rightarrow p(x) = 2x, \text{ also grad } p < 2.$$



Approximation einer Funktion durch Interpolationspolynome

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $x_i \in [a, b]$.

Dann existiert nach Satz 11.14 das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom p_n mit $p_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Frage: Wie groß ist der Fehler zwischen $f(x)$ und $p_n(x)$ für $x \in [a, b]$?

Satz 11.15 : Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ mal stetig differenzierbar in $[a, b]$, und sind $n + 1$ verschiedene Stützstellen $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ vorgegeben, dann gilt für das Interpolationspolynom p_n

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

mit $\xi \in (a, b)$.

Beweis :

Mit $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ gilt $q(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$,
und $q(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_i$.

Sei $x \in [a, b]$ mit $x \neq x_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$ fest gewählt, dann definieren wir:

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{q(x)} q(t) \quad , \quad t \in [a, b] \quad ,$$

$\Rightarrow F$ ist $n + 1$ mal stetig differenzierbar in $[a, b]$ und hat dort mindestens $n + 2$ Nullstellen, denn $F(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$ und $F(x) = 0$. Nach dem Satz von Rolle hat F' mindestens eine Nullstelle zwischen zwei Nullstellen von F , also gilt:

F' hat mindestens $n + 1$ Nullstellen \Rightarrow (analog)

F'' hat mindestens n Nullstelle \Rightarrow

\vdots

$F^{(n+1)}$ hat mindestens 1 Nullstelle in (a, b)

(wiederholte Anwendung des Satzes von Rolle).

D.h.: $\exists \xi \in (a, b)$ mit $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Da $p^{(n+1)}(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$ (da Polynom vom grad $\leq n$) und

$q^{(n+1)}(t) = (n + 1)! \quad \forall t \in [a, b] \Rightarrow$

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p_n(x)}{q(x)} (n + 1)! = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) q(x).$$

Folgerung aus Satz 11.15

11.16 Es gilt für den maximalen Fehler in $[a, b]$

$$\|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [a, b]} |q(x)|$$

Dieser maximale Fehler hängt von 2 Faktoren ab:

- $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ (hängt nur von der Funktion f ab)
- $\max_{x \in [a, b]} |q(x)| = \max_{x \in [a, b]} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$ (hängt nur von den Stützstellen x_i ab).

Um eine gute Approximation zu erreichen, muß man die Stützstellen x_i so wählen, daß $\max_{x \in [a,b]} |q(x)|$ möglichst klein wird. Für das Intervall $[-1, 1]$ kann man zeigen, daß die Nullstellen der *Tschebyscheff-Polynome* T_{n+1} (vgl. S.328) diese Eigenschaft erfüllen. Diese Nullstellen sind $x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$, ($i = 0, 1, \dots, n$).

Man kann sogar zeigen, daß bei Wahl dieser Stützstellen die Interpolationspolynome p_n für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$ gegen f konvergieren, falls f in $[-1, 1]$ stetig differenzierbar ist.

Beispiel zu Satz 11.15, 11.16

$$f(x) = e^x, \quad [a, b] = [0, 1], \quad x_i \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$\max_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)| = \max_{x \in [0,1]} |e^x| = e,$$

$$\max_{x \in [0,1]} |q(x)| = \max_{x \in [0,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\|e^x - p_n(x)\|_\infty \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^x - p_n(x)\|_\infty = 0 \quad (\text{gleichmäßige Konvergenz in } [0, 1]).$$

Beispiel für Divergenz

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & , \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

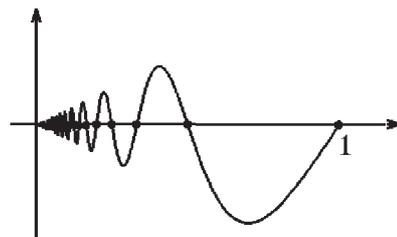
$\Rightarrow f$ ist stetig in $[0, 1]$.

$$\text{Wähle } x_i = \frac{1}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{i+1} \sin((i+1)\pi) = 0$$

$$\Rightarrow p_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow p_n(x) \not\rightarrow f(x), \quad \text{falls } x \neq 0, \quad x_i.$$



Die Berechnung der Interpolationspolynome p_n nach der Formel von *Lagrange* ist *numerisch instabil*, d.h. es können relativ große Rundungsfehler auftreten, denn es werden die Polynome d_k vom grad $= n$ zunächst mit den Faktoren y_k multipliziert und dann addiert. Bei größeren n sind die Polynome d_k aber sehr stark oszillierend, und es können leicht größere Rundungsfehler entstehen.

Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß bei Hinzunahme weiterer Stützstellen (um die Genauigkeit zu erhöhen) alle d_k neu berechnet werden müssen.

Der Vorteil der Lagrange-Formel liegt darin, daß bei gleicher Stützstellenwahl für verschiedene Sätze von Stützwerten die Polynome p_n leicht zu berechnen sind, da sich dann die d_k nicht verändern.

In den meisten Fällen ist aber die Berechnung mittels der Darstellungsformel von *Newton* vorzuziehen:

Newton-Darstellungsformel des Interpolationspolynoms

Seien x_0, x_1, \dots, x_n $n + 1$ verschiedene Stützstellen und y_0, y_1, \dots, y_n die zugehörigen Stützwerte, dann gilt für das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom p_n die folgende Darstellung von *Newton*:

11.17 Newton-Darstellungsformel

$$p_n(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + B_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

mit

$$B_0 = y_0 \\ B_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} := [x_0 x_1] \\ \vdots \\ B_k = \frac{[x_1 x_2 \dots x_k] - [x_0 x_1 \dots x_{k-1}]}{x_k - x_0} := [x_0 x_1 \dots x_k] \quad , \quad (k = 2, \dots, n)$$

Hierbei werden die folgenden *allgemeinen Differenzenquotienten* benutzt:

$$[x_{i-1} x_i] := \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad , \quad (1 \leq i \leq n) \quad ,$$

$$[x_i x_{i+1} \dots x_k] := \frac{[x_{i+1} x_{i+2} \dots x_k] - [x_i x_{i+1} \dots x_{k-1}]}{x_k - x_i} \quad , \quad (0 \leq i < k \leq n).$$

Beweis zu 11.17:

Sei p_n das Interpolationspolynom mit $p_n(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$, und sei $x \in [a, b]$ mit $x \neq x_i \quad (\forall i)$ eine weitere Stützstelle mit Stützwert $p_n(x) \Rightarrow$

$$[x x_0] = \frac{y_0 - p_n(x)}{x_0 - x} \quad , \quad [x x_0 x_1] = \frac{[x_0 x_1] - [x x_0]}{x_1 - x} \quad ,$$

$$[x x_0 x_1 x_2] = \frac{[x_0 x_1 x_2] - [x x_0 x_1]}{x_2 - x} \quad , \quad \dots \quad , \quad [x x_0 x_1 \dots x_n] = \frac{[x_0 x_1 \dots x_n] - [x x_0 \dots x_{n-1}]}{x_n - x}.$$

Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$p_n(x) = y_0 + [x x_0](x - x_0) = y_0 + \{[x_0 x_1] + [x x_0 x_1](x - x_1)\}(x - x_0) \\ = y_0 + [x_0 x_1](x - x_0) + [x x_0 x_1](x - x_0)(x - x_1) \\ = y_0 + [x_0 x_1](x - x_0) + [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ = y_0 + [x_0 x_1](x - x_0) + [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + [x_0 x_1 \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ + [x x_0 x_1 \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$\Rightarrow p_n(x) = r_n(x) + [x x_0 x_1 \dots x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

mit $\text{grad } r_n \leq n$ und $p_n(x_i) = r_n(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Da p_n eindeutig bestimmt $\Rightarrow p_n(x) = r_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow p_n(x) = y_0 + [x_0 x_1](x - x_0) + \dots + [x_0 x_1 \dots x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$$\Rightarrow p_n(x) = B_0 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + B_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Die Koeffizienten B_k werden mit folgendem Schema berechnet:

Newton-Schema (Beispiel für $n = 3$)

$$\begin{array}{r|l}
 x_0 & y_0 = B_0 \\
 x_1 - x_0 & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = [x_0 x_1] = B_1 \\
 x_2 - x_0 & x_1 & y_1 & \frac{[x_1 x_2] - [x_0 x_1]}{x_2 - x_0} = [x_0 x_1 x_2] = B_2 \\
 x_3 - x_0 & x_2 - x_1 & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = [x_1 x_2] & \frac{[x_1 x_2 x_3] - [x_0 x_1 x_2]}{x_3 - x_0} = B_3 \\
 & x_3 - x_1 & x_2 & y_2 & \frac{[x_2 x_3] - [x_1 x_2]}{x_3 - x_1} = [x_1 x_2 x_3] \\
 & x_3 - x_2 & \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = [x_2 x_3] \\
 x_3 & y_3
 \end{array}$$

Beispiel (vgl. Beispiel [S.360](#))

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -1, & x_1 &= 2, & x_2 &= 4 \\
 y_0 &= 15, & y_1 &= 6, & y_2 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 -1 & 15 \\
 3 & \frac{6 - 15}{3} = -3 \\
 5 & 2 & 6 & \frac{2 - (-3)}{5} = 1 \\
 2 & \frac{10 - 6}{2} = 2 \\
 4 & 10
 \end{array}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 15 - 3(x+1) + (x+1)(x-2) = x^2 - 4x + 10.$$

Programmmentwurf: Newton-Interpolation

$$b_0 := y_0$$

für $j := 1$ bis n

 für $i := n$ bis j (rückwärts)

$$h := x_i - x_{i-j}$$

$$y_i := (y_i - y_{i-1})/h$$

$$b_j := y_j$$

Berechnung von $p_n(x)$

$$s := b_n$$

für $i := n - 1$ bis 0 (rückwärts)

$$s := s * (x - x_i) + b_i$$

Neben der numerischen Stabilität hat die Newton-Darstellung den Vorteil, daß bei Hinzunahme neuer Stützstellen x_{n+1}, x_{n+2}, \dots sich die Koeffizienten B_0, B_1, \dots, B_n nicht verändern und nur die Koeffizienten B_{n+1}, B_{n+2}, \dots neu berechnet werden müssen.

Haben die Stützstellen alle *gleichen Abstand* voneinander (d.h.: *äquidistante Stützstellen*) mit $h := x_{i+1} - x_i \quad \forall i \Rightarrow$

$$B_0 = y_0, \quad B_1 = \frac{1}{h}(y_1 - y_0), \quad B_2 = \frac{1}{2h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0),$$

$$B_3 = \frac{1}{3!h^3}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0), \quad \dots \quad \text{Allgemein gilt dann}$$

$$B_k = \frac{1}{k!h^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j y_{k-j}$$

Hermite-Interpolation

Soll an einer Stelle x_i auch die Ableitung y'_i interpoliert werden, so muß die Stelle x_i im Newton-Schema 2 mal aufgeführt werden und der Differenzenquotient $\frac{y_i - y_i}{x_i - x_i}$ durch die Ableitung y'_i ersetzt werden. Der Rest des Newton-Schemas wird wie bisher berechnet

$$\begin{array}{c|c|c}
 x_{i-1} & y_{i-1} & \\
 x_i & y_i & \\
 0 & & y'_i \\
 x_i & y_i & \\
 x_{i+1} & y_{i+1} &
 \end{array}$$

Das Interpolationspolynom p_{n+1} erfüllt dann die zusätzliche Eigenschaft $p'_{n+1}(x_i) = y'_i$. Der Grad des Polynoms wird hierdurch um 1 erhöht, da ja eine Stützstelle x_i hinzugekommen ist.

Die Fehlerabschätzung 11.16, **S.361**, gilt analog, nur wird auf der rechten Seite der Faktor $(x - x_i)$ 2 mal aufgeschrieben.

Beispiel

Die \sin -Funktion soll in $x_0 = 0$ und in $x_1 = \pi/2$ mitsamt ihrer Ableitungen interpoliert werden; es soll also gelten:

$$\begin{aligned}
 p(0) &= \sin 0 = 0, & p'(0) &= \sin' 0 = \cos 0 = 1, \\
 p(\pi/2) &= \sin \pi/2 = 1, & p'(\pi/2) &= \sin' \pi/2 = \cos \pi/2 = 0.
 \end{aligned}$$

		x_i	$y_i = f(x_i)$
		0	0
	0		1
	$\pi/2$	0	$\frac{2/\pi - 1}{\pi/2} = \frac{4 - 2\pi}{\pi^2}$
	$\pi/2$	$\pi/2$	$\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{-\frac{4}{\pi^2} - \frac{4-2\pi}{\pi^2}}{\pi/2}} = \frac{4\pi - 16}{\pi^3}$
	$\pi/2$	$\pi/2$	$\frac{-2/\pi}{\pi/2} = -\frac{4}{\pi^2}$
		0	0
		$\pi/2$	1

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{4 - 2\pi}{\pi^2} (x - 0)(x - 0) + \frac{4\pi - 16}{\pi^3} (x - 0)(x - 0)(x - \frac{\pi}{2}) \\
 &= x + \frac{4 - 2\pi}{\pi^2} x^2 + \frac{4\pi - 16}{\pi^3} x^2 (x - \frac{\pi}{2}) .
 \end{aligned}$$

Probe: $p_3(0) = 0$, $p_3(\pi/2) = 1$, $p'_3(0) = 1$, $p'_3(\pi/2) = 0$.

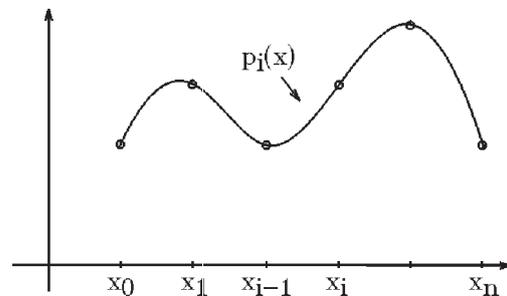
Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
 |f(x) - p_3(x)| &\leq \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [0, \pi/2]} |f^{(4)}(\xi)| |(x - 0)(x - 0)(x - \pi/2)(x - \pi/2)| \leq \frac{x^2(x - \pi/2)^2}{24} \\
 \Rightarrow \max_{x \in [0, \pi/2]} |f(x) - p_3(x)| &\leq \frac{1}{24} \max_{x \in [0, \pi/2]} ((x(x - \pi/2))^2) \leq \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \leq 0.016 .
 \end{aligned}$$

Bei der Polynom-Interpolation erhält man bei *großer Anzahl von Stützstellen* Polynome *hohen Grades*, die an den Intervallenden zu starken *Oszillationen* neigen. Deshalb bevorzugt man in diesem Fall eine *Spline-Interpolation*, d.h.: stückweise Interpolation durch Polynome kleinen Grads (z.B. 3 bei den *kubischen Splines*) und an den Verknüpfungsstellen möglichst glatte Übergänge (z.B. 2 mal stetig differenzierbar bei den *kubischen Splines*).

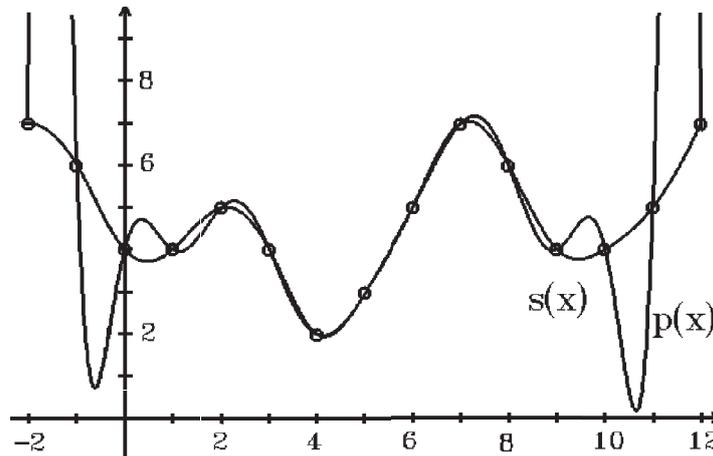
Beispiel *Kubische Splines*

Ausgehend von den Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ und den Stützwerten y_0, y_1, \dots, y_n wählt man in den Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ jeweils ein Polynom $p_i(x)$ mit $\text{grad } p_i \leq 3$ und $p_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ und $p_i(x_i) = y_i$, und verlangt 2 mal stetig differenzierbare Übergänge.



Damit erhält man insgesamt eine 2 mal stetig differenzierbare Funktion s , die die vorgebenen Interpolationspunkte $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ verbindet (genauereres siehe Literatur).

Im folgenden Bild sieht man den Unterschied zwischen Polynom ($p(x)$)– und Spline ($s(x)$)– Interpolation:



Spline- und Newton- Interpolation mit 15 Stützstellen

Numerische Integration

Um ein Integral näherungsweise berechnen zu können, bedienen wir uns der Interpolation.

Gesucht: Näherungswert für $\int_a^b f(x) dx$.

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und p_n das zugehörige Interpolationspolynom mit $p_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i$, also $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) d_k(x)$, $d_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b d_k(x) dx := I(p_n).$$

Frage: Ist $I(p_n)$ eine gute Näherung für $\int_a^b f(x) dx$?

Antwort: Für eine auf $[a, b]$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion f können wir mit Hilfe von Satz 11.15, **S.361**, folgende Fehlerabschätzung angeben:

Satz 11.18 : Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar auf $[a, b]$.
Seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und p_n das zugehörige Interpolationspolynom.

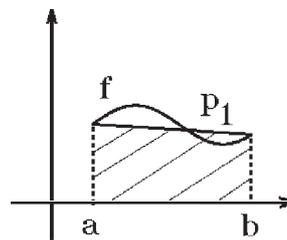
Dann gilt mit $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ und $I(p_n) = \int_a^b p_n(x) dx$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(p_n) \right| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b |q(x)| dx$$

Für $n = 1$ erhalten wir die *Trapez-Formel* :

Wir benutzen die Stützstellen $x_0 = a, x_1 = b$ mit den zugehörigen Stützwerten $y_0 = f(a), y_1 = f(b)$. Mit dem Newton-Schema erhalten wir das Interpolationspolynom p_1

$$b - a \left| \begin{array}{l} a \mid f(a) \\ \quad \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ b \mid f(b) \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I(p_1) &= \int_a^b p_1(x) dx = f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{(x - a)^2}{2} \Big|_a^b \\ &= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{(b - a)^2}{2} = \frac{b - a}{2} (2f(a) + f(b) - f(a)) \\ &= \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b |q(x)| dx &= \int_a^b (x - a)(b - x) dx = \frac{(x - a)^2}{2} \cdot (b - x) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{(x - a)^2}{2} dx \\ &= \frac{(x - a)^3}{6} \Big|_a^b = \frac{(b - a)^3}{6} . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

11.19: Trapez-Formel

Für $n = 1$ erhalten wir die einfache *Trapez-Formel*

$$I(p_1) = \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)) \quad \text{und die Fehlerabschätzung, falls } f \in C^2[a, b]$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(p_1) \right| \leq \frac{(b - a)^3}{12} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| .$$

Bemerkung : Die Trapez-Formel ist *exakt* für Polynome vom Grad ≤ 1 .

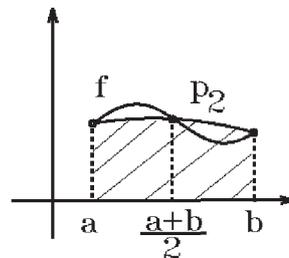
Für $n = 2$ erhalten wir die *Simpson-Formel* :

Wir benutzen die Stützstellen $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$ mit den zugehörigen

Stützwerten $y_0 = f(a), y_1 = f(c), y_2 = f(b)$ mit $c := \frac{a+b}{2}$.

Mit dem Newton-Schema erhalten wir das Interpolationspolynom p_2

$$\begin{array}{r|l}
 & a & f(a) \\
 \frac{b-a}{2} & & \frac{2(f(c) - f(a))}{b-a} \\
 b-a & \frac{a+b}{2} & f(c) & \frac{2(f(b) - 2f(c) + f(a))}{(b-a)^2} \\
 \frac{b-a}{2} & & \frac{2(f(b) - f(c))}{b-a} \\
 & b & f(b)
 \end{array}$$



$$p_2(x) = f(a) + \frac{2(f(c) - f(a))}{b-a}(x-a) + \frac{2(f(b) - 2f(c) + f(a))}{(b-a)^2}(x-a)(x-c)$$

$$\int_a^b (x-a) dx = \left. \frac{(x-a)^2}{2} \right|_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\int_a^b (x-a)(x-c) dx = \left. \frac{(x-a)^2}{2} \cdot (x-c) \right|_a^b - \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2} dx$$

$$= \left. \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{(x-a)^3}{6} \right|_a^b = \frac{(b-a)^3}{4} - \frac{(b-a)^3}{6} = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

$$\int_a^b p_2(x) dx = f(a)(b-a) + (f(c) - f(a))(b-a) + \frac{1}{6}(f(b) - 2f(c) + f(a))(b-a)$$

$$= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) .$$

Damit erhalten wir

11.20: *Simpson-Formel*

Für $n = 2$ erhalten wir die einfache *Simpson-Formel*

$$I(p_2) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad \text{und die Fehlerabschätzung, falls } f \in C^4[a, b]$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(p_2) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| .$$

Bemerkung : Aus Satz 11.18 würde eine schwächere Fehlerabschätzung folgen. Man kann aber diese bessere Fehlerabschätzung zeigen (siehe Literatur).

Bemerkung : Die Simpson-Formel ist *exakt* für Polynome vom grad ≤ 3 .

Diese einfachen Trapez- bzw. Simpson-Formeln liefern bei größeren Intervallen zu ungenaue Ergebnisse. Deshalb bedient man sich in der Praxis zusammengesetzter

Formeln, d.h.: man teilt zunächst das Intervall $[a, b]$ in mehrere Teilintervalle auf und wendet dann auf jedes dieser Teilintervalle die einfache Trapez- bzw. Simpson-Formel an. Dies führt auf die folgenden zusammengesetzten Formeln:

Zusammengesetzte Trapez-Formel

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, also N Teilintervalle, dann erhalten wir die (zusammengesetzte) Trapez-Formel

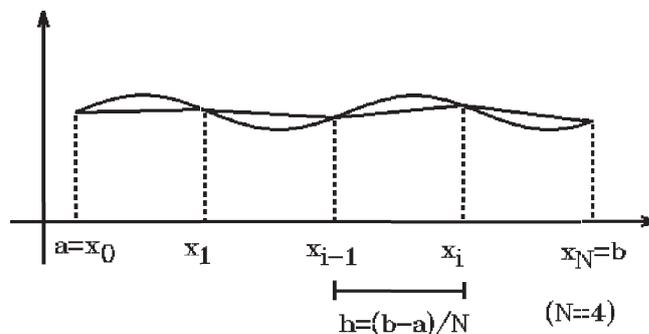
$$T(h) = \frac{h}{2} \left\{ f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N) \right\}$$

und es gilt die Fehlerabschätzung, falls $f \in C^2[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{Nh^3}{12} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Beweis :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| &\leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - I(p_{i,1}) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^3} \sum_{i=1}^N \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |f''(x)| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \cdot N \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| . \end{aligned}$$



Beispiel

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ?$$

Wir wählen $N = 4$, also 4 Teilintervalle $\Rightarrow h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$.

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{6}{4}, \quad x_3 = \frac{7}{4}, \quad x_4 = 2,$$

$$T(1/4) = \frac{1}{8}(f(1) + 2f(5/4) + 2f(6/4) + 2f(7/4) + f(2)) = \frac{1}{8}(1 + \frac{8}{5} + \frac{8}{6} + \frac{8}{7} + \frac{1}{2}) = 0.69702.$$

$$\text{Fehlerabschätzung: } |f''(x)| = \frac{2}{x^3} \leq 2 \quad \forall x \in [1, 2] \Rightarrow$$

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - 0.69702 \right| \leq \frac{4}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2 = \frac{1}{96} \leq 0.01042.$$

Zum Vergleich: exakter Wert: $\ln 2 = 0.6931472$.

Zusammengesetzte Simpson-Formel

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, also N Teilintervalle, dann erhalten wir die (zusammengesetzte) *Simpson-Formel*

$$S(h) = \frac{h}{6} \left\{ f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + 4f(x_{3/2}) + 2f(x_2) + \dots \right. \\ \left. + 2f(x_{N-1}) + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N) \right\}$$

und es gilt die Fehlerabschätzung, falls $f \in C^4[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(h) \right| \leq \frac{Nh^5}{2880} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

Bei der Simpson-Formel benötigen wir in jedem Teilintervall auch den Funktionswert in der Mitte des Intervalls $x_{i+1/2} = a + (i + 1/2)h$.

Beispiel 1

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ?$$

Wir wählen $N = 2$, also 2 Teilintervalle $\Rightarrow h = \frac{b-a}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$,

$$x_0 = 1, \quad x_{1/2} = \frac{5}{4}, \quad x_1 = \frac{6}{4}, \quad x_{3/2} = \frac{7}{4}, \quad x_2 = 2,$$

$$S(1/2) = \frac{1}{12}(f(1) + 4f(5/4) + 2f(6/4) + 4f(7/4) + f(2)) = \frac{1}{12}(1 + \frac{16}{5} + \frac{8}{6} + \frac{16}{7} + \frac{1}{2}) \\ = 0.69325.$$

$$\text{Fehlerabschätzung: } |f^{(4)}(x)| = \frac{24}{x^5} \leq 24 \quad \forall x \in [1, 2] \Rightarrow$$

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - 0.69325 \right| \leq \frac{2}{2880} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 24 = \frac{1}{1920} \leq 0.000521.$$

Zum Vergleich: exakter Wert: $\ln 2 = 0.6931472$.

Die Simpson-Formel liefert in diesem Beispiel eine wesentlich bessere Näherung als die Trapez-Formel (bei gleichem Rechenaufwand, da bei der Trapez-Formel die Anzahl der Teilintervalle doppelt so groß war). Das ist in der Praxis meistens so.

Beispiel 2

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = ?$$

Der Integrand ist stetig in $[0, 1]$, da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Wir wählen $N = 3$, also 3 Teilintervalle $\Rightarrow h = 1/3$.

$$\begin{aligned} S(1/3) &= \frac{1}{18} \left(1 + 4 \cdot \frac{\sin 1/6}{1/6} + 2 \cdot \frac{\sin 2/6}{2/6} + 4 \cdot \frac{\sin 3/6}{3/6} + 2 \cdot \frac{\sin 4/6}{4/6} + 4 \cdot \frac{\sin 5/6}{5/6} + \sin 1 \right) \\ &= 0.9460838 . \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung:

Der Integrand $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ hat die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4!}{5!} - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7!} x^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9!} x^4 - \dots = \frac{1}{5} - \frac{1}{7 \cdot 2!} x^2 + \frac{1}{9 \cdot 4!} x^4 - \dots$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{1}{5} + R \quad \text{mit} \quad |R| \leq \frac{1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{14} \quad \forall x \in [0, 1] \quad , \quad (\text{da alternierende Reihe})$$

$$\Rightarrow |f^{(4)}(x)| \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{14} < \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx - S(1/3) \right| \leq \frac{3}{2880} \left(\frac{1}{3} \right)^5 \cdot \frac{1}{3} \leq 1.43 \cdot 10^{-6} .$$

In diesem Beispiel können wir auch einen Näherungswert erhalten, wenn wir den Anfang der Potenzreihe von f (um $x_0 = 0$) integrieren:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \frac{1}{9!9} - \dots = 0.9460827 + R \quad \text{mit} \quad |R| \leq \frac{1}{9!9} \leq 3.1 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx - 0.9460827 \right| \leq 3.1 \cdot 10^{-7} .$$

Der folgende Satz besagt, daß bei feiner werdender Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ die Trapez- und Simpson-Formel gegen das Integral konvergieren:

Satz 11.21 : Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar in $[a, b]$. Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = \int_a^b f(x) dx .$$

Beweis : Mit $\sigma_N = \sum_{k=1}^N f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ und $\tau_N = \sum_{k=1}^N f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ (Riemann-Summen mit den Zwischenpunkten x_k bzw. x_{k-1}) gilt

$$T(h) = \frac{1}{2}(\sigma_N + \tau_N) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b f(x) dx$$

für $h \rightarrow 0$, also $N \rightarrow \infty$. Analog für $S(h)$.

Wahl der Schrittweite h

In der Fehlerabschätzung für die Simpson-Formel

$\left| \int_a^b f(x) dx - S(h) \right| \leq \frac{Nh^5}{2880} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$ benötigt man das betragliche Maximum von $f^{(4)}(x)$. Das ist bei vielen Funktionen nur mit sehr großem Aufwand oder gar nicht zu berechnen, so daß die Fehlerabschätzung nicht sinnvoll eingesetzt werden kann. Der Fehler hängt wesentlich von der Schrittweite h ab:

Wählt man h zu groß, so wird der *Verfahrens-Fehler* zu groß.

Wählt man h zu klein, so müssen zu viele Funktionswerte berechnet werden, und die *Rundungs-Fehler* nehmen zu.

D.h.: Man benötigt eine "sinnvolle" Schrittweite h . Hierbei kann man folgendermaßen vorgehen:

Man berechnet zunächst mit einer vorgegebenen Schrittweite h den Näherungswert $S(h)$, dann halbiert man die Schrittweite und berechnet $S(h/2)$. Unterscheiden sich $S(h)$ und $S(h/2)$ nur wenig, so gibt man sich mit $S(h/2)$ zufrieden, sonst halbiert man wieder die Schrittweite und vergleicht die Näherungswerte $S(h/2)$ und $S(h/4)$, usw.. Hierbei darf die Schrittweite nicht zu klein werden, da sonst die Rundungsfehler zu stark anwachsen.

Um mit Hilfe von $S(h)$ den Wert $S(h/2)$ zu berechnen, kann man die folgenden Eigenschaften benutzen:

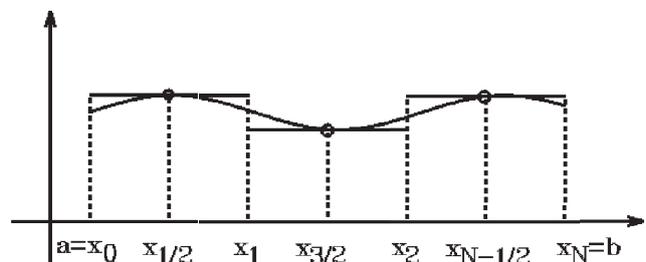
Satz 11.22 : Es sei

$T(h) = \frac{h}{2} \{ f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N) \}$ die *Trapez-Formel*, und

$M(h) = h \{ f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{N-1/2}) \}$ die *Rechteck-Formel*. Dann gilt

$$T(h/2) = \frac{1}{2}(T(h) + M(h))$$

$$S(h) = \frac{1}{3}(T(h) + 2M(h))$$



Rechteck-Formel

Wenn man $M(h/2)$ neu berechnet, erhält man

$$S(h/2) = \frac{1}{3}(T(h/2) + 2M(h/2)) .$$

Beweis :

$$\begin{aligned} T(h/2) &= \frac{h/2}{2} \left\{ f(x_0) + 2f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{N-1/2}) + f(x_N) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N) \right) + h \left(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(x_{N-1/2}) \right) \right\} = \frac{1}{2}(T(h) + M(h)) \\ S(h) &= \frac{h}{6} \left\{ f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + \dots + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N) \right) + 2h \left(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(x_{N-1/2}) \right) \right\} = \frac{1}{3}(T(h) + 2M(h)) . \end{aligned}$$

Also berechnet man mit $h = b - a$

$$T(h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \quad , \quad M(h) = hf(a + h/2)$$

$$S(h) = \frac{1}{3}(T(h) + 2M(h))$$

$$T(h/2) = \frac{1}{2}(T(h) + M(h)) \quad , \quad M(h/2) = \frac{h}{2} \left(f\left(a + \frac{h}{4}\right) + f\left(a + \frac{3}{4}h\right) \right) ,$$

$$S(h/2) = \frac{1}{3}(T(h/2) + 2M(h/2)) \quad , \text{ usw.}$$

bis $|S(h/2^{m-1}) - S(h/2^m)| < \epsilon$ oder $h/2^m$ zu klein.

Beispiele

1. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ? \quad , \quad h = 2 - 1 = 1 \quad ,$

$$T(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \quad , \quad M(1) = 1 \cdot \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$$

$$S(1) = \frac{1}{3}(T(1) + 2M(1)) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3} \right) = \frac{25}{36} = 0.69\bar{4}$$

$$T(1/2) = \frac{1}{2}(T(1) + M(1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{17}{24} \quad , \quad M(1/2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5/4} + \frac{1}{7/4} \right) = \frac{24}{35} \quad \Rightarrow$$

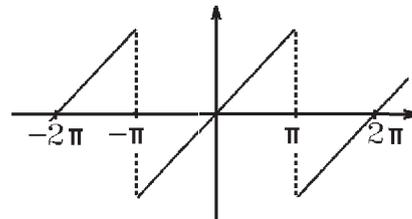
$$S(1/2) = \frac{1}{3}(T(1/2) + 2M(1/2)) = \frac{1}{3} \left(\frac{17}{24} + \frac{48}{35} \right) = 0.69325\bar{4}$$

$$|S(1) - S(1/2)| \leq 0.0012 \quad , \text{ usw.}$$

2. *Fourierkoeffizienten*

$$f(x) = x \quad , \quad x \in (-\pi, \pi) \quad ,$$

f 2π -periodisch fortgesetzt.



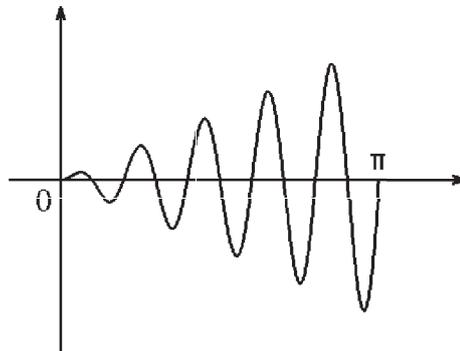
$a_k = 0 \quad \forall k \in N_0$, da f ungerade,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \quad (\text{vgl. Beispiel 3., S.313}).$$

Näherungsweise Berechnung für $b_{10} = -0.2$ (also $k = 10$) ergibt mit Hilfe der Simpson-Formel:

h	$S(h)$	$ S(h) - S(2h) $
π	0	—
$\pi/2$	-1.047197	1.05
$\pi/4$	0.4786811	1.52
$\pi/8$	-0.2291491	$7.1 \cdot 10^{-1}$
$\pi/16$	-0.2011639	$2.8 \cdot 10^{-2}$
$\pi/32$	-0.2000664	$1.1 \cdot 10^{-3}$
$\pi/64$	-0.2000041	$6.2 \cdot 10^{-5}$
$\pi/128$	-0.20000025	$3.8 \cdot 10^{-6}$
$\pi/256$	-0.200000016	$2.3 \cdot 10^{-7}$
$\pi/512$	-0.200000001	$1.5 \cdot 10^{-8}$

Daß man eine sehr kleine Schrittweite h wählen muß, erkennt man am Graphen des Integranden $g(x) = x \sin(10x)$, der sehr stark oszilliert:



Zum Vergleich die Ergebnisse der Trapez-Formel, wo man noch kleinere Schrittweiten benötigt, um auf ähnlich gute Näherungswerte zu kommen:

h	$T(h)$	$ T(h) - T(2h) $
$\pi/512$	-0.199937	$1.9 \cdot 10^{-4}$
$\pi/1024$	-0.199984	$4.7 \cdot 10^{-5}$
$\pi/2048$	-0.1999961	$1.2 \cdot 10^{-5}$
$\pi/4096$	-0.1999990	$2.9 \cdot 10^{-6}$
$\pi/8192$	-0.19999975	$7.3 \cdot 10^{-7}$

Uneigentliche Integrale

Bei unbeschränkten Integralbereichen oder unbeschränkten Funktionen läßt sich die Trapez- oder Simpson-Formel nicht unmittelbar einsetzen. Man verwendet die *Abschneidemethode*, muß aber häufig *vorher* das Integral durch *Substitution* oder *partielle Integration* verändern.

Beispiele

1. Abschneidemethode

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-x^2} dx + R \text{ mit}$$
$$|R| = \left| \int_M^{\infty} e^{-x^2} dx \right| \leq \int_M^{\infty} e^{-Mx} dx = -\frac{e^{-Mx}}{M} \Big|_M^{\infty} = \frac{e^{-M^2}}{M} < 10^{-10}$$

$\Rightarrow Me^{M^2} > 10^{10} \Rightarrow$ für $M = 5$ erfüllt, also

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^5 e^{-x^2} dx + R \text{ mit } |R| < 10^{-10}.$$

Das Integral $\int_0^5 e^{-x^2} dx$ läßt sich einfach mit Hilfe der Simpson-Formel berechnen.

2. Substitution

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_1^M \frac{1}{x^2 + 1} dx + R \text{ mit}$$
$$|R| = \left| \int_M^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \right| \leq \int_M^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_M^{\infty} = \frac{1}{M} < 10^{-10} \Rightarrow M < 10^{10}.$$

Hier wäre M viel zu groß, um $\int_1^M \frac{1}{x^2 + 1} dx$ näherungsweise berechnen zu können.

Deshalb führt man besser vorher eine Substitution durch. In diesem Beispiel kann man sogar mit Hilfe der Substitution $x = 1/t$, $dx = -(1/t^2)dt$ das uneigentliche Integral in ein eigentliches Integral überführen:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_1^0 \frac{1}{(\frac{1}{t})^2 + 1} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt.$$

Dieses eigentliche Integral läßt sich dann einfach mit Hilfe der Simpson-Formel berechnen (in diesem Beispiel kann man natürlich sofort die Stammfunktion \arctan benutzen).

3. Substitution

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} dx = \int_0^{\infty} \frac{2e^{2t}}{\sqrt{e^{6t} + 1}} dt = \int_0^M \frac{2e^{2t}}{\sqrt{e^{6t} + 1}} dt + R \text{ mit}$$

(Substitution $x = e^{2t}$, $dx = 2e^{2t}dt$)

$$|R| \leq \int_M^{\infty} \frac{2e^{2t}}{e^{3t}} dt = 2 \int_M^{\infty} e^{-t} dt = -2e^{-t} \Big|_M^{\infty} = 2e^{-M} < 10^{-8}$$

$$\Rightarrow e^M > 2 \cdot 10^8 \Rightarrow M > \ln(2 \cdot 10^8) \Rightarrow M \geq 19.2.$$

Der Integrand geht nach der Substitution schneller gegen 0 für $t \rightarrow \infty$ als vorher.

4. *partielle Integration*

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Durch mehrmalige partielle Integration kann man erreichen, daß die Potenz von x im Nenner größer wird und damit der Integrand schneller gegen 0 geht für $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sin x dx &= \left. \frac{1}{x} (-\cos x) \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) (-\cos x) dx \\ &= \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

⋮

$$= 23 \cos 1 - 5 \sin 1 - 120 \int_1^M \frac{\cos x}{x^6} dx + R \quad \text{mit}$$

$$|R| \leq 120 \int_M^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^6} dx \leq \left. -\frac{120}{5x^5} \right]_M^{\infty} = \frac{120}{5M^5} = \frac{24}{M^5} < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow M^5 > 24 \cdot 10^4 \Rightarrow M > \sqrt[5]{24 \cdot 10^4} \Rightarrow M = 12 .$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= 23 \cos 1 - 5 \sin 1 - 120 \int_1^{12} \frac{\cos x}{x^6} dx + R \\ &= 23 \cos 1 - 5 \sin 1 - 7.594855 + R = 0.6247431 + R \quad \text{mit } |R| < 10^{-4}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde der Wert des Integrals mit Hilfe der Simpson-Formel berechnet.

Berechnet man auch den Wert des Interals $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0.94608307$ mit Hilfe der Simpson-Formel, so erhält man insgesamt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 1.5708261 + R \quad (\text{exakter Wert: } \pi/2 = 1.5707963 \dots \quad (\text{später})).$$

Numerische Differentiation durch Interpolation

Wir wollen einen Näherungswert für $f^{(n)}(x_0)$ angeben, falls f in x_0 n -mal differenzierbar ist.

Sei also $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$, f n -mal differenzierbar in x_0 .

Mit der Schrittweite h wählen wir zusätzlich zu x_0 n weitere Stützstellen aus $[a, b]$, also $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$. Zu diesen Stützstellen existiert eindeutig das Interpolationspolynom p_n mit

$$p_n(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + B_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Damit gilt: $p^{(n)}(x) = n! B_n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Da die Stützstellen äquidistant sind ($x_{i+1} - x_i = h \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$), gilt

$$B_n = \frac{1}{n! h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x_{n-k}) = \frac{1}{n! h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x_k) \quad (\text{vgl. S.365}).$$

Also für

$$n = 1: \quad B_1 = \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0))$$

$$n = 2: \quad B_2 = \frac{1}{2h^2}(f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0))$$

usw.

11.23 Also gilt

$$f^{(n)}(x_0) \approx \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x_0 + kh)$$

Satz 11.24 : Ist $f \in C^{n-1}[a, b]$ und existiert $f^{(n)}(x_0)$, so gilt

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x_0 + kh) .$$

Beweis :

Es gilt für $m = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^m = \begin{cases} 0 & , \text{falls } 0 \leq m \leq n-1 \\ n! & , \text{falls } m = n \end{cases}$$

denn mit Hilfe der Binomischen Formel gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a) } (x-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k$$

$$\text{mit } x = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0 .$$

Differenzieren wir die Gleichung a), so erhalten wir

$$n(x-1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k x^{k-1} .$$

Multiplikation mit x ergibt

$$\text{b) } nx(x-1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k x^k$$

$$\text{mit } x = 1 \Rightarrow \text{für } n \geq 2: \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k = 0 .$$

Führt man in gleicher Weise fort, so erhält man die obige Aussage.

Durch mehrmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital erhalten wir (da jeweils ein Ausdruck der Form " $\frac{0}{0}$ " entsteht) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x_0 + kh)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k f'(x_0 + kh)}{nh^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^{n-1} f^{(n-1)}(x_0 + kh)}{n!h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n \cdot \frac{f^{(n-1)}(x_0 + kh) - f^{(n-1)}(x_0)}{kh} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^{n-1} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{h} \quad (\text{wobei die letzte Summe} = 0 \text{ ist}) \\
&= \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n \right) \cdot f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \quad (\text{da diese Summe} = n! \text{ ist}).
\end{aligned}$$

Man erhält also für

$$n = 1: \quad f'(x_0) \approx \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$$

$$n = 2: \quad f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0))$$

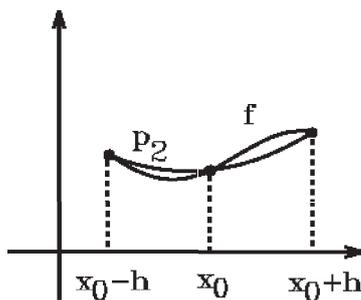
$$n = 3: \quad f'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3}(f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0)) .$$

Häufig wählt man die anderen Stützstellen symmetrisch um x_0 herum. Dann erhält man für

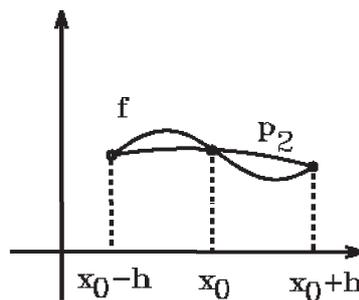
$$n = 2: \quad f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h))$$

$$n = 3: \quad f'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3}(f(x_0 + 2h) - 3f(x_0 + h) + 3f(x_0) - f(x_0 - h)) .$$

Diese Formeln sind numerisch nicht sehr stabil, wie die folgenden Bilder für die Annäherung von $f''(x_0)$ zeigen



gute Annäherung



schlechte Annäherung

Anwendung: Differenzenverfahren bei Randwertaufgaben

Beispiel

$$y'' + y = 1 \quad , \quad y(0) = y(\pi/2) = 0 \quad ,$$

exakte Lösung: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1$

$$y(0) = c_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1 \quad , \quad y(\pi/2) = c_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1$$

$\Rightarrow y(x) = 1 - \cos x - \sin x$ ist die exakte Lösung.

Näherungslösung

Gesucht: $y(x_i)$ mit $x_i = 0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $h = \frac{\pi/2}{n} = \frac{\pi}{2n}$.

Wir schreiben $y_i := y(x_i)$ und ersetzen in der Differentialgleichung $y''(x_i)$ durch den Differenzenquotienten $y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$. Dann erhalten wir näherungsweise anstelle der DGL die folgenden *Differenzgleichungen*

$$\frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + y_i = 1 \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad \Rightarrow$$

$$y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = h^2 \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad ,$$

wobei $y_0 = y(x_0) = y(0) = 0$ und $y_n = y(x_n) = y(\pi/2) = 0$ bekannt sind.

In Matrixschreibweise erhalten wir das lineare GLS

$$\begin{pmatrix} h^2 - 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & h^2 - 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & h^2 - 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & h^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_n \end{pmatrix}$$

Da in diesem Beispiel $y_0 = 0$ und $y_n = 0$, entfällt der letzte Vektor auf der rechten Seite.

Die Koeffizientenmatrix ist eine *symmetrische Tridiagonalmatrix*.

Lösen wir das GLS mit dem Gauß-Algorithmus, so erhalten wir als Lösungen die Werte $y_i \approx y(x_i)$, also Näherungswerte für die Lösung der DGL an den Stellen x_i .

Für $n = 5$ ergibt die Lösung des GLS

$$y_1 = -0.26294 \approx y(x_1) = y(\pi/10) = -0.2600735$$

$$y_2 = -0.40124 \approx y(x_2) = y(2\pi/10) = -0.3968022$$

$$y_3 = -0.40124 \approx y(x_3) = y(3\pi/10) = -0.3968022$$

$$y_4 = -0.26294 \approx y(x_4) = y(4\pi/10) = -0.2600735$$

(Vergleich mit der exakten Lösung; der maximale Fehler beträgt bei diesen Werten $\approx 5 \cdot 10^{-3}$).

Für $n = 100 \Rightarrow$ maximaler Fehler $\approx 2 \cdot 10^{-5}$.

In der Anwendung wird häufig anstelle des *Differenzenverfahrens* die Methode der "Finiten Elemente" benutzt (vgl. Literatur).

XII Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

Wie im eindimensionalen Fall werden wir zunächst das Integral über Intervalle des \mathbb{R}^n definieren. Hierbei wird alles analog zu Kapitel VI verlaufen, so daß wir hier nur einige Definitionen und Sätze angeben:

Definition 12.1 : Sei $I = [\vec{a}, \vec{b}] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}$ ein abgeschlossenes Intervall des \mathbb{R}^n ,

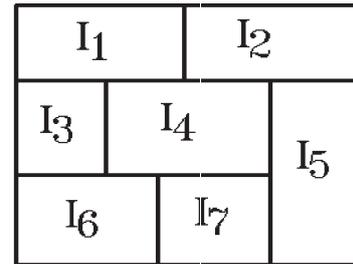
$\delta(I) = |\vec{b} - \vec{a}|$ der Durchmesser von I ,

$\mu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ das Maß von I (Inhalt von I),

$Z = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ eine Zerlegung von I , d.h.:

I_j sind abgeschlossene, sich nicht überlappende

Intervalle mit $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$.



$|Z| = \max_{1 \leq j \leq m} \delta(I_j)$ der Betrag von Z .

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt auf I , dann heißt

$\underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^m \inf_{\vec{x} \in I_k} \{f(\vec{x})\} \mu(I_k)$ Untersumme von f bzgl. Z ,

$\overline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^m \sup_{\vec{x} \in I_k} \{f(\vec{x})\} \mu(I_k)$ Obersumme von f bzgl. Z .

Dann gelten die gleichen Eigenschaften für die Ober- und Untersummen wie im eindimensionalen Fall. Wir können also ganz analog die Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion f über I definieren:

Satz 12.2 : Sei $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt auf I .

Gilt $\sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \overline{S}_Z(f)$, so heißt f integrierbar über I .

In diesem Fall schreiben wir

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \overline{S}_Z(f).$$

Aus dieser Definition ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften:

Satz 12.3 :

a) Ist $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in I , so ist f integrierbar über I .

b) Ist $f(\vec{x}) = c \quad \forall \vec{x} \in I$, also f konstant in I , so gilt

$$\int_I c d\vec{x} = c \int_I d\vec{x} = c\mu(I).$$

Beweis :

a) Analog zum eindimensionalen Fall.

$$b) \underline{S}_Z(f) = \overline{S}_Z(f) = c \sum_{k=1}^m \mu(I_k) = c\mu(I) = c \int_I d\vec{x} .$$

Zur Berechnung des Integrals führen wir das mehrdimensionale Integral auf eindimensionale Integrale zurück:

Zurückführung auf eindimensionale Integrale

Satz 12.4 : Sei $f : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über I mit

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \right\} .$$

a) Für alle $x \in [a, b]$ existiere das Integral $\int_c^d f(x, y) dy$.

Dann existiert auch das iterierte Integral und ist gleich:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_I f(x, y) d(x, y) .$$

b) Für alle $y \in [c, d]$ existiere das Integral $\int_a^b f(x, y) dx$.

Dann existiert auch das iterierte Integral und ist gleich:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_I f(x, y) d(x, y) .$$

c) Ist f stetig in I , so existieren für alle $x \in [a, b]$ und für alle $y \in [c, d]$ die Integrale

$$\int_a^b f(x, y) dx \text{ und } \int_c^d f(x, y) dy, \text{ und es gilt:}$$

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx ,$$

d.h.: Die Reihenfolge der Integration ist vertauschbar.

d) Ist $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ mit $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und $f_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[c, d]$, so gilt:

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy .$$

Beweis :

a) Sei $Z_x = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $Z_y = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ eine Zerlegung von $[c, d]$ \Rightarrow

$Z = \{I_{jk} : 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$ ist Zerlegung von I mit

$$I_{jk} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{k-1} \leq y \leq y_k \right\} .$$

Sei $m_{jk} = \inf_{I_{jk}} \{f(x, y)\}$, $M_{jk} = \sup_{I_{jk}} \{f(x, y)\}$, dann gilt für $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$:

$$\begin{aligned}
m_{jk} &\leq f(\xi_j, y) \leq M_{jk} \quad \forall y \in [y_{k-1}, y_k] \Rightarrow \\
\int_{y_{k-1}}^{y_k} m_{jk} dy &\leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y) dy \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} M_{jk} dy \Rightarrow \\
m_{jk} \Delta y_k &\leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y) dy \leq M_{jk} \Delta y_k \quad \text{mit } \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \Rightarrow \\
\sum_{k=1}^n m_{jk} \Delta y_k &\leq \int_c^d f(\xi_j, y) dy \leq \sum_{k=1}^n M_{jk} \Delta y_k \Rightarrow \\
\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n m_{jk} \Delta y_k \Delta x_j &\leq \sum_{j=1}^m \left(\int_c^d f(\xi_j, y) dy \right) \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n M_{jk} \Delta y_k \Delta x_j.
\end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist gleich $\underline{S}_Z(f)$, die rechte Seite ist gleich $\overline{S}_Z(f)$, die Summe in der Mitte dieser Ungleichung konvergiert gegen das Doppelintegral

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Da f integrierbar, gilt $\int_I f(x, y) d(x, y) = \sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \overline{S}_Z(f)$, also folgt hieraus

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

b) Analog.

c) Da f stetig in I , ist auch f für alle $y \in [c, d]$ als Funktion von x stetig in $[a, b]$, also existiert das Integral $\int_a^b f(x, y) dx$, analog existiert für alle $x \in [a, b]$ das Integral

$\int_c^d f(x, y) dy$. Aus a) und b) folgt dann sofort die Behauptung.

$$\begin{aligned}
\text{d) } \int_I f_1(x) f_2(y) d(x, y) &= \int_a^b \left(\int_c^d f_1(x) f_2(y) dy \right) dx = \int_a^b f_1(x) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) dx \\
&= \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.
\end{aligned}$$

Beispiele

1. $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \right\}$, $f(x, y) = xy$ stetig in I ,

$$\int_I xy d(x, y) = \int_a^b \int_c^d xy dy dx = \int_a^b x dx \cdot \int_c^d y dy = \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_c^d = \frac{1}{4} (b^2 - a^2)(d^2 - c^2).$$

2. $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 1, 0 < a \leq y \leq b \right\}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & \text{falls } x > 0, a \leq y \leq b \\ 0 & \text{falls } x = 0, a \leq y \leq b. \end{cases}$$

f ist stetig in I , denn für $x > 0$ gilt $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ ist stetig für $x > 0, 0 < a \leq y \leq b$.

Für $x = 0$ gilt: falls $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit $0 < a \leq y, y_0 \leq b \Rightarrow$
 $|f(x, y) - f(0, y_0)| = |x^y - 0| = e^{y \ln x} \leq e^{a \ln x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$
 (da für $x \rightarrow 0 \Rightarrow \ln x < 0$, und mit $y \geq a > 0 \Rightarrow y \ln x \leq a \ln x$).

Da also f stetig ist in I , existiert nach c):

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx$$

(Reihenfolge der Integration ist vertauschbar).

Es ist

$$\text{a) } \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1) \Big|_{y=a}^b = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Andererseits ist

$$\text{b) } \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_0^1 \int_a^b e^{y \ln x} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \right]_{y=a}^b dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{b \ln x} - e^{a \ln x}}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Dieses Integral läßt sich nicht weiter ausrechnen, aber wegen a) gilt:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Es ist $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$, denn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} (bx^b - ax^a) = b - a.$$

Allgemeiner Fall $n > 2$: Bereichsintegrale in \mathbb{R}^n .

Für den Fall $n > 2$ gilt ein zu Satz 12.4 analoger Satz.

Hierbei bezeichnen wir für ein j mit $1 \leq j \leq n$ den Vektor, der aus dem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ durch Weglassen der j -ten Koordinate x_j hervorgeht mit

$\vec{x}^j := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ und mit

$I_j := \{ \vec{x}^j \in \mathbb{R}^{n-1} : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n, i \neq j \}$ das entsprechende Intervall in \mathbb{R}^{n-1} .

Satz 12.5 : Sei $f : I = [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über I .

a) Existiert für alle $x_j \in [a_j, b_j]$ das Integral $\int_{I_j} f(\vec{x}) d\vec{x}^j$, so existiert auch das iterierte Integral und ist gleich:

$$\int_{a_j}^{b_j} \left(\int_{I_j} f(\vec{x}) d\vec{x}^j \right) dx_j = \int_I f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

b) Existiert für alle $\vec{x}^j \in I_j$ das Integral $\int_{a_j}^{b_j} f(\vec{x}) dx_j$, so existiert auch das iterierte

Integral und ist gleich:

$$\int_{I_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} f(\vec{x}) dx_j \right) d\vec{x}^j = \int_I f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

c) Ist f stetig in I , so sind die Voraussetzungen von a) und b) erfüllt, also gilt

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_j}^{b_j} \left(\int_{I_j} f(\vec{x}) d\vec{x}^j \right) dx_j = \int_{I_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} f(\vec{x}) dx_j \right) d\vec{x}^j.$$

Beweis : Analog zu Satz 12.4.

Beispiel

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 4 \right\},$$

$f(x, y, z) = x + y + z \Rightarrow f$ ist stetig in I .

Mit $I_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \right\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_I (x + y + z) d(x, y, z) &= \int_2^4 \left(\int_{I_z} (x + y + z) d(x, y) \right) dz \\ &\quad \text{(auf das innere Integral wird Satz 12.4 angewendet)} \\ &= \int_2^4 \left(\int_0^1 \int_0^2 (x + y + z) dx dy \right) dz = \int_2^4 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + (y + z)x \right) \Big|_{x=0}^2 dy dz \\ &= \int_2^4 \int_0^1 (2 + 2y + 2z) dy dz = \int_2^4 (2y + y^2 + 2zy) \Big|_{y=0}^1 dz = \int_2^4 (2 + 1 + 2z) dz \\ &= \int_2^4 (3 + 2z) dz = (3z + z^2) \Big|_{z=2}^4 = 28 - 10 = 18. \end{aligned}$$

Ergebnis: Integrale über *Intervalle* des \mathbb{R}^n können bei *stetigen* Funktionen auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden. Die Reihenfolge der Integrationen ist dabei beliebig.

Integrierbarkeit auf beschränkten Mengen des \mathbb{R}^n

Für die Anwendung reicht es nicht aus, nur über Intervalle des \mathbb{R}^n zu integrieren, man muß auch über andere Teilmengen des \mathbb{R}^n integrieren können (z.B.: Berechnung des Trägheitsmomentes eines Zylinders).

Definition 12.6 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine *beschränkte* Menge, sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf M *beschränkte* Funktion, dann heißt f_M mit

$$f_M(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & , \text{falls } \vec{x} \in M \\ 0 & , \text{falls } \vec{x} \notin M \end{cases}$$

Erweiterung der Funktion f von M auf \mathbb{R}^n , und c_M mit

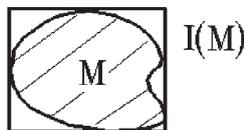
$$c_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & ,\text{falls } \vec{x} \in M \\ 0 & ,\text{falls } \vec{x} \notin M \end{cases}$$

charakteristische Funktion von M .

Zu jeder beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ existiert ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset I$. Das kleinste Intervall dieser Art ist gerade der Durchschnitt über alle abgeschlossenen Intervalle I mit $M \subset I$:

Definition 12.7 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Wir bezeichnen das kleinste abgeschlossene Intervall, das M enthält mit $I(M) = \bigcap_{M \subset I} I$.

Beispiel



Definition 12.8 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf M beschränkt.

f heißt *integrierbar* über $M \Leftrightarrow f_M$ ist integrierbar über $I(M)$.

In diesem Fall gilt

$$\int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{I(M)} f_M(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Bemerkung :

Ist $M = I$ ein Intervall, so stimmt diese Definition mit der Definition 12.2 überein.

Satz 12.9 : *Eigenschaften*

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, seien $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über M und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- a) cf ist integrierbar über M mit $\int_M cf(\vec{x}) \, d\vec{x} = c \int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x}$.
- b) $f + g$ ist integrierbar über M mit $\int_M (f + g)(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_M g(\vec{x}) \, d\vec{x}$.
- a) und b) besagen, daß das Integral ein *linearer Operator* ist.
- c) Ist $f(\vec{x}) \leq g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M$, so gilt $\int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} \leq \int_M g(\vec{x}) \, d\vec{x}$.
- d) $|f|$ ist integrierbar über M mit $\left| \int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} \right| \leq \int_M |f(\vec{x})| \, d\vec{x}$.
- e) $f \cdot g$ ist integrierbar über M .

f) Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, und ist f integrierbar über M_1 und M_2 , so gilt: f ist integrierbar über $M_1 \cup M_2$ mit

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{M_1} f(\vec{x}) \, d\vec{x} + \int_{M_2} f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Beweis : Ähnlich wie im eindimensionalen Fall; man muß jeweils auf $I(M)$ übergehen und die erweiterte Funktion f_M betrachten.

Bemerkung :

Integrierbarkeit hängt nun von zwei Faktoren ab:

- a) von der beschränkten Menge M ,
- b) von der auf M definierten Funktion f .

Im eindimensionalen Fall war M immer ein Intervall, und wir konnten z.B. die Ungleichung zeigen:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \int_a^b dx = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\} (b - a).$$

Insbesondere galt: $\int_a^b dx = b - a \hat{=} \text{Länge des Intervalls.}$

Analog soll nun für $M \subset \mathbb{R}^n$ gelten:

$$\int_M d\vec{x} = \mu(M) \quad (\text{Inhalt von } M) \quad \text{und}$$

$$\int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \int_M d\vec{x} = \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \mu(M).$$

Nun ist aber nicht klar, ob $\int_M d\vec{x}$ überhaupt existiert, wenn M eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Wir wollen i.f. aber nur noch Mengen M zulassen, für die $\int_M d\vec{x}$ existiert. M heißt in diesem Fall *meßbar*, und der Wert $\int_M d\vec{x} = \mu(M)$ heißt das *Maß* von M .

Definition 12.10 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

M heißt *meßbar* $\Leftrightarrow c_M$ ist integrierbar über $I(M)$.

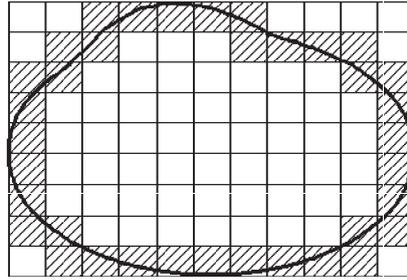
In diesem Fall heißt $\mu(M) := \int_M d\vec{x} = \int_{I(M)} c_M(\vec{x}) \, d\vec{x}$ das *Maß* von M .

Wir wollen nun untersuchen, welche Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar sind. Dazu betrachten wir die Differenz zwischen Ober- und Untersumme der charakteristischen Funktion c_M bzg. einer Zerlegung von $I(M)$:

$$\bar{S}_Z(c_M) - \underline{S}_Z(c_M) = \sum_{k=1}^m \sup_{I_k} \{c_M(\vec{x})\} \mu(I_k) - \sum_{k=1}^m \inf_{I_k} \{c_M(\vec{x})\} \mu(I_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{I_k \cap M \neq \emptyset} \mu(I_k) - \sum_{I_k \subset M} \mu(I_k) \\
&= \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k)
\end{aligned}$$

mit $\partial M = \text{Rand von } M$.



Ist nun M meßbar, so muß bei feiner werdender Zerlegung die Ober- und Untersumme gegen den gleichen Wert konvergieren, also die Differenz

$$\bar{S}_Z(c_M) - \underline{S}_Z(c_M) = \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) \rightarrow 0 \text{ konvergieren. Das bedeutet aber, daß das}$$

Maß des Randes von M , also $\mu(\partial M) = 0$ sein muß, denn es gilt

$$0 \leq \underline{S}_Z(c_{\partial M}) \leq \bar{S}_Z(c_{\partial M}) \leq \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\sup_Z \underline{S}_Z(c_{\partial M}) = \inf_Z \bar{S}_Z(c_{\partial M}) = \mu(\partial M) = 0.$$

Also gilt der folgende Satz:

Satz 12.11 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt

$$M \text{ meßbar} \Leftrightarrow \mu(\partial M) = 0.$$

Satz 12.12 : *Eigenschaften meßbarer Mengen*

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, dann gilt:

a) Gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow M_1 \cup M_2$ ist meßbar mit $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$.

b) Gilt $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_2 \setminus M_1 = \{\vec{x} \in M_2 : \vec{x} \notin M_1\}$ ist meßbar mit $\mu(M_2 \setminus M_1) = \mu(M_2) - \mu(M_1)$.

Beweis : anschaulich klar

a) Man betrachtet die charakteristische Funktion $c_{M_1 \cup M_2}$ und wendet Satz 12.9 f) an.

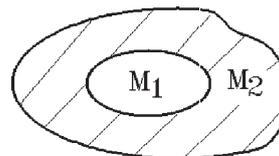
b) Es ist $M_1 \cap (M_2 \setminus M_1) = \emptyset$ und $M_1 \cup (M_2 \setminus M_1) = M_2 \Rightarrow \mu(M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1)$.

Vorher muß noch gezeigt werden, daß $M_2 \setminus M_1$ meßbar ist (vgl. Literatur).

a)



b)



Aus Satz 12.11 folgt, daß eine Menge M genau dann meßbar ist, wenn der Rand eine Nullmenge ist, d.h.: $\mu(\partial M) = 0$ gilt.

Also müssen wir zunächst untersuchen, welche Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ Nullmengen sind, d.h.: für welche Mengen $\mu(M) = 0$ gilt.

Ein erstes Beispiel liefern die folgenden Mengen:

Satz 12.13 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. M liege ganz in einer Hyperebene

$H_j = \{\vec{x} : x_j = \text{konstant}\}$ des \mathbb{R}^n .

Dann gilt: $\mu(M) = 0$.

Beweis :

$$n = 2: M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, y = c \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

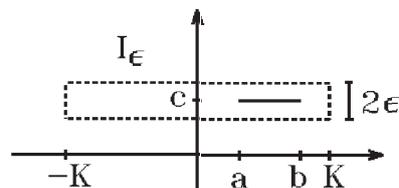
$$I_\epsilon = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -K \leq x \leq K, c - \epsilon \leq y \leq c + \epsilon \right\}$$

mit $\epsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow 0 \leq \mu(M) \leq \mu(I_\epsilon) = 2K \cdot 2\epsilon = \tilde{K}\epsilon,$$

da $\epsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \mu(M) = 0$.

$n > 2$: Analog.



Für die Anwendung besonders wichtig sind folgende Nullmengen

Satz 12.14 : Sei $\varphi : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in D und D kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt). Dann ist der Graph von φ

$$C_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix} : \vec{x} \in D \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ eine Nullmenge des } \mathbb{R}^n.$$

Beweis :

Da φ stetig in D und D kompakt, ist φ in D gleichmäßig stetig. Ist $D \subset I$ und $\epsilon > 0$, so existiert eine Zerlegung $Z = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ von I mit $|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})| < \epsilon \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in I_k \cap D, (1 \leq k \leq m) \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix} : \vec{x} \in I_k \cap D \right\} \subset \tilde{I}_k \text{ mit } \mu(\tilde{I}_k) = 2\epsilon \cdot \mu(I_k).$$

$$\text{Da } \sum_{k=1}^m \mu(\tilde{I}_k) = 2\epsilon \sum_{k=1}^m \mu(I_k) = 2\epsilon \mu(I) \text{ und } C_\varphi \subset \bigcup_{k=1}^m \tilde{I}_k \Rightarrow 0 \leq \mu(C_\varphi) \leq 2\epsilon \mu(I).$$

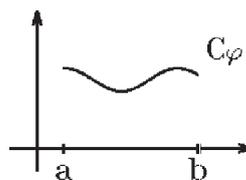
Da $\epsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \mu(C_\varphi) = 0$.

Beispiele

1. $n = 2: \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$

φ stetig in $[a, b]$

$\Rightarrow C_\varphi$ ist Nullmenge des \mathbb{R}^2 .

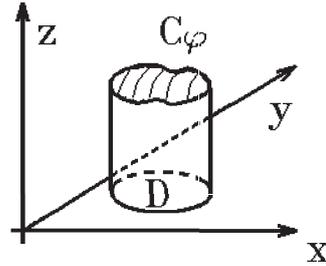


2. $n = 3$: $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

D kompakt,

φ stetig in D

$\Rightarrow C_\varphi$ ist Nullmenge des \mathbb{R}^3 .



Wir wollen noch genauer präzisieren, was man unter dem *Inneren* bzw. dem *Rand* einer Menge M versteht:

Definition 12.15 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$,

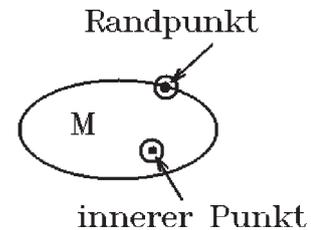
$\overset{\circ}{M} = \{ \vec{x} \in M : \vec{x} \text{ ist innerer Punkt von } M \}$ heißt *Inneres* von M ,

$\partial M = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \text{ ist Randpunkt von } M \}$ heißt *Rand* von M ,

$\bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$ heißt *abgeschlossene Hülle* von M .

Hierbei heißt $\vec{x} \in M$ *innerer Punkt* von M ,
wenn eine Umgebung $U_\epsilon(\vec{x})$ von \vec{x} existiert,
die noch ganz in M liegt, also $\exists \epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(\vec{x}) \subset M$.

\vec{x} heißt *Randpunkt* von M ,
wenn in jeder Umgebung $U(\vec{x})$ von \vec{x}
Punkte von M und $\mathbb{R}^n \setminus M$ liegen.



Beispiel

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < z < 2 \right\}$$

$$\bar{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

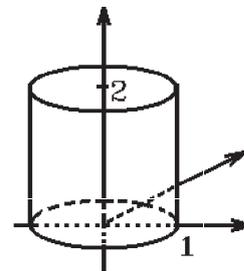
$$\overset{\circ}{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 2 \right\}$$

$\partial M = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ mit

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2 \right\} \text{ Zylindermantel,}$$

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \right\} \text{ Boden,}$$

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, z = 2 \right\} \text{ Deckel.}$$



Aus Satz 12.11 und Satz 12.14 folgt nun sofort das folgende Kriterium für Meßbarkeit von beschränkten Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$:

Satz 12.16 : *Kriterium für Meßbarkeit*

Jede beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, deren Ränder sich als *Graphen stetiger Funktionen* darstellen lassen, ist *meßbar*.

Beispiele

1. Zylinder $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \right\}$ ist meßbar, da $\partial M = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ und F_i lassen sich als Graphen stetiger Funktionen darstellen.

2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2} \right\}$.

Die Grenzen für z sind:

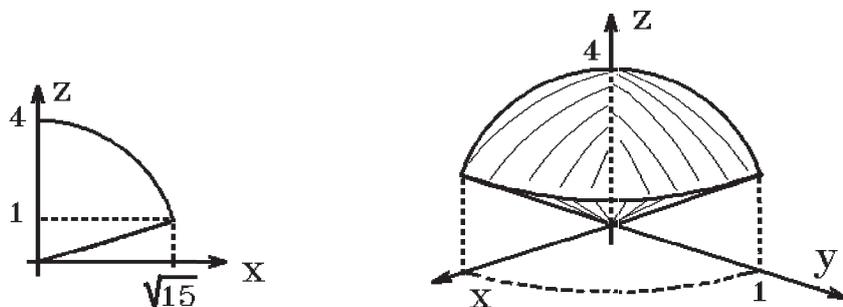
$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0 \text{ (obere Halbkugel),}$$

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \Rightarrow z^2 = \frac{x^2 + y^2}{15}, z \geq 0 \text{ (Kegel mit } z \geq 0),$$

zusätzliche Einschränkung: $x \geq 0, y \geq 0$.

Benutzen wir Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow$ die Grenzen von z sind unabhängig vom Winkel φ , also reicht es, den Schnitt mit der (x, z) -Ebene zu betrachten (also $y = 0$).

$$\text{Für } y = 0, z \geq 0 \Rightarrow z = \frac{|x|}{\sqrt{15}} \text{ bzw. } z = \sqrt{16 - x^2}.$$



Schnitt mit der (x, z) -Ebene

Körper M

Schnittpunkt zwischen $z = \frac{|x|}{\sqrt{15}}$ und $z = \sqrt{16 - x^2}$ ergibt $z = 1, x = \pm\sqrt{15}$.

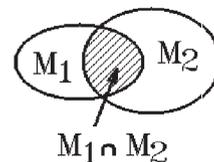
Die Randflächen von M sind der Schnitt mit der (x, z) -Ebene (siehe Bild), der Schnitt mit der (y, z) -Ebene (genauso wie der Schnitt mit der (x, z) -Ebene), die untere Kegelfläche und die obere Kugelfläche. Alle Randflächen sind Graphen stetiger Funktionen $\Rightarrow M$ ist *meßbar*.

Wir wollen noch einige Eigenschaften von meßbaren Mengen angeben:

Satz 12.17 : *Eigenschaften meßbarer Mengen*

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar
 $\Rightarrow \overset{\circ}{M}$ und \bar{M} sind meßbar mit $\mu(M) = \mu(\overset{\circ}{M}) = \mu(\bar{M})$.

b) Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar
 $\Rightarrow M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ sind meßbar mit
 $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$.



c) Ist $M_1 \subset M_2$ und $\mu(M_2) = 0 \Rightarrow \mu(M_1) = 0$.

Beweis :

a) $M, \overset{\circ}{M}, \bar{M}$ haben den gleichen Rand ∂M .

Da $\mu(\partial M) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{M}, \bar{M}$ sind meßbar.

Da $\bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$ und $\overset{\circ}{M} \cap \partial M = \emptyset \Rightarrow \mu(\bar{M}) = \mu(\overset{\circ}{M}) + \mu(\partial M) = \mu(\overset{\circ}{M})$.

Da $\overset{\circ}{M} = M \setminus (\partial M \cap M)$ und $(\partial M \cap M) \subset \partial M \Rightarrow \mu(\overset{\circ}{M}) = \mu(M) - \mu(\partial M \cap M) = \mu(M)$.

b) Anschaulich klar (ausführlicher Beweis siehe Literatur).

c) $0 \leq \mu(M_1) \leq \mu(M_2) = 0 \Rightarrow \mu(M_1) = 0$.

Bevor wir Integrale konkret berechnen, zeigen wir noch den Mittelwertsatz und den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung. Diese Mittelwertsätze können bei der Abschätzung von Integralen benutzt werden:

Satz 12.18 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über M . Dann gilt

a) $\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \mu(M) \leq \int_M f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \mu(M)$.

b) *Mittelwertsatz*

Es existiert ein η mit $\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \leq \eta \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\}$ und

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \eta \mu(M)$$

c) *Erweiterter Mittelwertsatz*

Sei zusätzlich $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über M mit $g(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in M$.

Dann existiert ein η mit $\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \leq \eta \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\}$ und

$$\int_M f(\vec{x})g(\vec{x}) d\vec{x} = \eta \int_M g(\vec{x})d\vec{x}$$

Beweis :

a) Da $\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \leq f(\vec{x}) \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \quad \forall \vec{x} \in M$ und M meßbar \Rightarrow aus Satz 12.9

$$\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \int_M d\vec{x} \leq \int_M f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \int_M d\vec{x} \Rightarrow$$

$$\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \mu(M) \leq \int_M f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \mu(M).$$

b) folgt aus a), indem man durch $\mu(M)$ dividiert.

c) Da $\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \leq f(\vec{x}) \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\}$ und $g(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in M \Rightarrow$

$$\inf_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \int_M g(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_M f(\vec{x})g(\vec{x}) d\vec{x} \leq \sup_{\vec{x} \in M} \{f(\vec{x})\} \int_M g(\vec{x}) d\vec{x} .$$

Division durch $\int_M g(\vec{x}) d\vec{x}$ ergibt c).

Im folgenden Satz geben wir ein hinreichendes Kriterium für Integrierbarkeit an:

Satz 12.19 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in \bar{M}
 $\Rightarrow f$ ist integrierbar über M .

Beweis :

Sei $\epsilon > 0$ beliebig, sei $|f(\vec{x})| \leq K \quad \forall \vec{x} \in M$ und sei $M \subset I$ (Intervall). Dann existiert eine Zerlegung $Z = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ von I so, daß $\sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) < \epsilon$ (da $\mu(\partial M) = 0$) und $\sup_{\vec{x} \in I_k} \{f(\vec{x})\} - \inf_{\vec{x} \in I_k} \{f(\vec{x})\} < \epsilon$ für alle übrigen I_k (da f stetig auf \bar{M} , also gleichmäßig stetig ist) \Rightarrow

$$\bar{S}_Z(f_M) - \underline{S}_Z(f_M) \leq \epsilon \cdot \sum_{I_k \subset M, I_k \cap \partial M = \emptyset} \mu(I_k) + 2K \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) \leq \epsilon \mu(M) + 2K\epsilon .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt hieraus die Behauptung.

Satz 12.20 : Für zwei beschränkte Funktionen $f, g : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit M meßbar, die bis auf eine Nullmenge M_0 auf M übereinstimmen (d.h.: $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M \setminus M_0$, $\mu(M_0) = 0$) gilt:

Mit f ist auch g integrierbar und es gilt $\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_M g(\vec{x}) d\vec{x}$.

Beweis :

Mit $M = (M \setminus M_0) \cup M_0$ und $h = f - g$ gilt: h ist integrierbar über $M \setminus M_0$ (da $h \equiv 0$) und über M_0 (da $\mu(M_0) = 0$), also auch über M mit $\int_M h(\vec{x}) d\vec{x} = 0$.

Bemerkung :

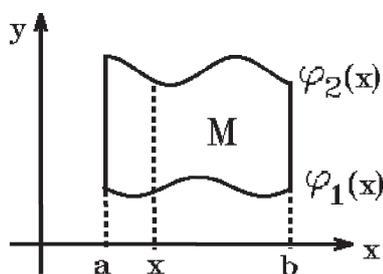
Man kann also eine Funktion auf einer Nullmenge abändern, ohne daß sich dabei der Wert des Integrals verändert.

Wir betrachten i.f. nur noch Mengen M , deren Ränder sich als Graphen stetiger Funktionen darstellen lassen, also meßbar sind, und Funktionen f , die über M integrierbar (z.B. stetig) sind.

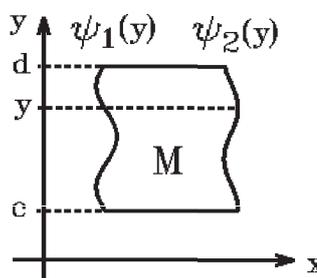
Wie läßt sich dann das Integral $\int_M f(\vec{x}) d\vec{x}$ berechnen ?

Berechnung mehrdimensionaler Integrale durch Zurückführung auf eindimensionale Integrale

1.Fall $n = 2$: Wir betrachten die beiden folgenden Fälle



a) Normalbereich bzgl. y



b) Normalbereich bzgl. x

Definition 12.21 :

a) Gibt es ein Intervall $[a, b]$ und auf $[a, b]$ zwei stetige Funktionen φ_1, φ_2 derart, daß gilt

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

so nennen wir M Normalbereich bzgl. y .

b) Gibt es ein Intervall $[c, d]$ und auf $[c, d]$ zwei stetige Funktionen ψ_1, ψ_2 derart, daß gilt

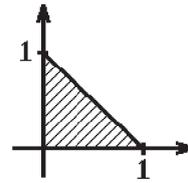
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \right\}$$

so nennen wir M Normalbereich bzgl. x .

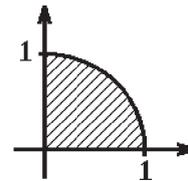
c) Gilt a) und b), so heißt M Normalbereich.

Beispiele

$$\begin{aligned}
 1. \quad M &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \right\} \\
 &\quad \text{(Normalbereich bzgl. } y) \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1-y \right\} \\
 &\quad \text{(Normalbereich bzgl. } x) \\
 &\Rightarrow M \text{ ist Normalbereich.}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2. \quad M &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\} \\
 &\quad \text{(Normalbereich bzgl. } y) \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \right\} \\
 &\quad \text{(Normalbereich bzgl. } x) \\
 &\Rightarrow M \text{ ist Normalbereich.}
 \end{aligned}$$



Satz 12.22 : Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über M .

a) Sei M Normalbereich bzgl. y , und für alle $x \in [a, b]$ existiere das Integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$. Dann existiert auch das iterierte Integral mit

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

b) Sei M Normalbereich bzgl. x , und für alle $y \in [c, d]$ existiere das Integral $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$. Dann existiert auch das iterierte Integral mit

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

c) Ist f stetig in M und M Normalbereich, so gilt a) und b).

Beweis :

a) Sei $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : A \leq x \leq B, C \leq y \leq D \right\}$ mit $M \subset I \Rightarrow$

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_I f_M(x, y) d(x, y).$$

$\forall x \in [a, b]$ gilt: $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_C^D f_M(x, y) dy \Rightarrow$ (nach Satz 12.4)

$$\int_I f_M(x, y) d(x, y) = \int_A^B \int_C^D f_M(x, y) dy dx = \int_A^B \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_M(x, y) dy dx$$

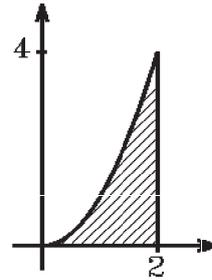
$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx .$$

b) Analog.

c) f stetig in M , M Normalbereich $\Rightarrow M = \bar{M} \Rightarrow f$ integrierbar über $M \Rightarrow$ Voraussetzungen von a) und b) erfüllt \Rightarrow Behauptung.

Beispiele

1. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$
 $\Rightarrow M$ ist Normalbereich bzgl. y
 $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2 \right\}$
 $\Rightarrow M$ ist Normalbereich bzgl. x
 $\Rightarrow M$ ist Normalbereich.



Sei $f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f$ ist stetig in $M \Rightarrow$

$$\int_M (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx$$

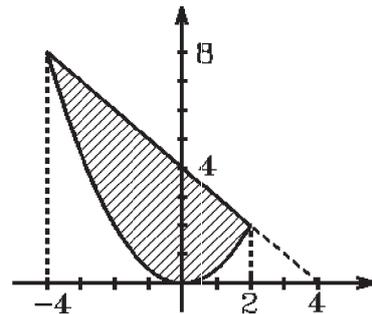
$$= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^2 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^2 = \frac{2^5}{5} + \frac{2^7}{21} = \frac{1312}{105} ,$$

oder:

$$\int_M (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=\sqrt{y}}^2 dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{y^{3/2}}{3} - y^{5/2} \right) dy = \left(\frac{8}{3}y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{15}y^{5/2} - \frac{2}{7}y^{7/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{1312}{105} .$$

2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \frac{x^2}{2} \leq y \leq 4 - x \right\}$
 Schnittpunkte: $\frac{x^2}{2} = 4 - x \Rightarrow x^2 + 2x = 8$
 $\Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = -4, 2 \Rightarrow$
 $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -4 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{2} \leq y \leq 4 - x \right\}$
 $\Rightarrow M$ ist Normalbereich bzgl. y .



Sei $f(x, y) \equiv 1 \Rightarrow f$ ist stetig in $M \Rightarrow$

$$\mu(M) = \int_M 1 d(x, y) = \int_{-4}^2 \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy dx$$

$$= \int_{-4}^2 \left(4 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-4}^2 = \frac{14}{3} + 24 - \frac{32}{3} = 18.$$

2.Fall $n > 2$: Wir betrachten eine meßbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$.

Für $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in M$ sei wieder

$\vec{x}^\nu := (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ (d.h. die ν -te Koordinate fehlt).

Definition 12.23 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

a) Gibt es eine meßbare Menge $M_\nu \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und auf M_ν zwei stetige Funktionen φ_1 und φ_2 derart, daß gilt:

$M = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x}^\nu \in M_\nu, \varphi_1(\vec{x}^\nu) \leq x_\nu \leq \varphi_2(\vec{x}^\nu) \}$, so heißt M *Normalbereich* bzgl. x_ν .

b) Ist M Normalbereich bzgl. aller x_ν , so heißt M *Normalbereich*.

Beispiel: $n = 3$: *Normalbereich bzgl. z*

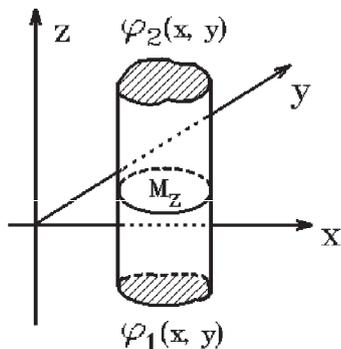
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_z, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\}.$$

Ist M_z Normalbereich bzgl. y , also

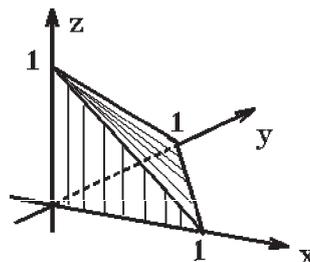
$$M_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x) \right\},$$

so erhalten wir insgesamt:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\}.$$



Normalbereich bzgl. z



Einheitstetraeder

Beispiel hierzu: Einheitstetraeder

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y \right\}.$$

Analog zu Satz 12.22 gilt nun:

Satz 12.24 : Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über M . Sei M Normalbereich bzgl. x_ν . Existiert für alle $\vec{x}^\nu \in M_\nu$ das Integral $\int_{\varphi_1(\vec{x}^\nu)}^{\varphi_2(\vec{x}^\nu)} f(\vec{x}) dx_\nu$, so existiert auch

das iterierte Integral mit

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{M_\nu} \left(\int_{\varphi_1(\vec{x}^\nu)}^{\varphi_2(\vec{x}^\nu)} f(\vec{x}) dx_\nu \right) d\vec{x}^\nu.$$

Beispiel: $n = 3$: M Normalbereich bzgl. z

Ist M Normalbereich bzgl. z und M_z Normalbereich bzgl. y , also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a \leq x \leq b, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x), \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\},$$

und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in M , so erhalten wir

$$\int_M f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{M_z} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y) \Rightarrow$$

$$\int_M f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

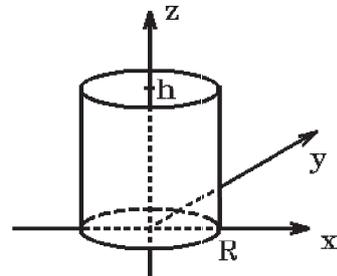
Beispiele hierzu

1. Zylinder

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x$ und

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \right\}$$

$$\Rightarrow M_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$



Also insgesamt

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq z \leq h \right\}.$$

Für das Integral erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_M x d(x, y, z) &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^h x dz dy dx = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} hx dy dx \\ &= \int_{-R}^R 2hx\sqrt{R^2-x^2} dx = 0 \quad (\text{da der Integrand eine ungerade Funktion ist}). \end{aligned}$$

2. *Einheitstetraeder* (vgl. Beispiel S.397)

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x$ und

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y \right\}.$$

Für das Integral erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_M x \, d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left(x(1-x)y - \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x(1-x)^2 - \frac{1}{2}x(1-x)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

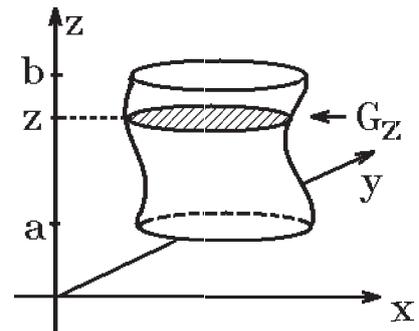
Beispiel: $n = 3$: M Normalbereich bzgl. y

Ist M Normalbereich bzgl. y und M_y Normalbereich bzgl. x , also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a \leq z \leq b, \psi_1(z) \leq x \leq \psi_2(z), \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z) \right\},$$

und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in M , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M f(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ = \int_a^b \int_{\psi_1(z)}^{\psi_2(z)} \int_{\varphi_1(x, z)}^{\varphi_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz, \end{aligned}$$



oder mit $G_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \psi_1(z) \leq x \leq \psi_2(z), \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z) \right\}$

$$\int_M f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_a^b \int_{G_z} f(x, y, z) \, d(x, y) \, dz.$$

Speziell für $f \equiv 1$ erhalten wir für das Volumen des Körpers M

$$\mu(M) = \int_M d(x, y, z) = \int_a^b \int_{G_z} d(x, y) \, dz = \int_a^b \mu(G_z) \, dz$$

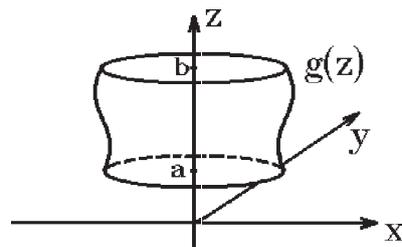
Diese Formel ist das *Prinzip des Cavalieri*, das folgendes besagt:

Man kann das Volumen eines Körpers M so berechnen, daß man zu jedem z den Inhalt der Grundfläche G_z , also $\mu(G_z)$, bestimmt und diesen über die Höhe (also z) integriert.

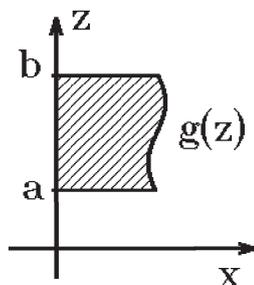
Beispiel hierzu: *Rotationskörper*

Sei M ein Rotationskörper um die z -Achse, also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a \leq z \leq b, 0 \leq x^2 + y^2 \leq g^2(z) \right\}$$



mit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.



Der Graph von g ist die Begrenzungslinie der Schnittfläche des Rotationskörpers mit der (x, z) -Ebene, $x \geq 0$.

Also gilt für die Grundfläche G_z in der Höhe z

$$G_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq g^2(z) \right\}, \text{ also Kreisfläche mit Radius } g(z) \text{ und}$$

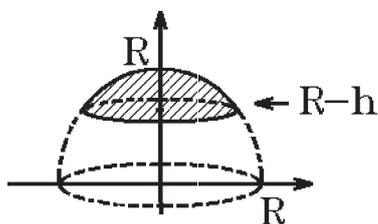
Inhalt $\mu(G_z) = \pi g^2(z)$.

Damit erhalten wir das *Volumen des Rotationskörpers*

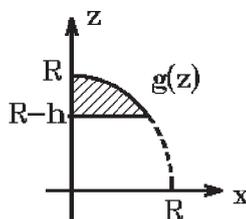
$$\mu(M) = \pi \int_a^b g^2(z) dz$$

Beispiele hierzu

1. Volumen einer *Kugelkappe* der Höhe h , also $R - h \leq z \leq R$



Kugelkappe



Schnitt mit der (x, z) -Ebene, $x \geq 0$

Da $x^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow g(z) = \sqrt{R^2 - z^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \pi \int_{R-h}^R (R^2 - z^2) dz = \pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{R-h}^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{1}{3}(R-h)^3 \right) \\ &= \pi \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right). \end{aligned}$$

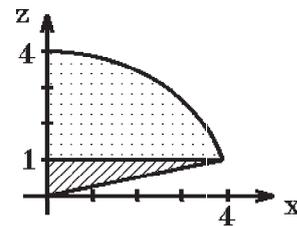
2.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z \geq 0, \frac{x^2 + y^2}{15} \leq z^2 \leq 16 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Aufteilen in zwei Rotationskörper ergibt:

a) Kegel: $g(z) = \sqrt{15z}$
 $(0 \leq z \leq 1),$

b) Kugelabschnitt: $g(z) = \sqrt{16 - z^2}$
 $(1 \leq z \leq 4).$



Schnitt mit der (x, z) -Ebene, $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \pi \int_0^1 15z^2 dz + \pi \int_1^4 (16 - z^2) dz \\ &= \pi \left(5 + 16 \cdot 3 - \frac{1}{3}(4^3 - 1) \right) = 32\pi. \end{aligned}$$

Oft ist es einfacher, einen Körper des \mathbb{R}^3 oder einen Bereich des \mathbb{R}^2 mit Hilfe anderer (als den kartesischen) Koordinaten zu beschreiben. Dann muß man bei der Integration eine *Substitution* vornehmen.

Substitution

Im eindimensionalen Fall galt

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}([a,b])} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar in $[\alpha, \beta]$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ in $[\alpha, \beta]$ (damit φ^{-1} existiert).

Eine ähnliche Aussage werden wir auch für den mehrdimensionalen Fall erhalten. Aber zunächst müssen wir definieren, was wir unter einer Koordinatentransformation verstehen wollen.

Anstelle der kartesischen Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n wollen wir neue Koordinaten u_1, u_2, \dots, u_n einführen, genauer sollen folgende Eigenschaften gelten:

Definition 12.25 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $\vec{g} : N \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

- a) $\vec{g} : N \rightarrow M$ *bijektiv* (d.h. \vec{g}^{-1} existiert),
- b) N *offen*,
- c) $\vec{g} \in C^1(N)$ mit $\det\left(\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}}(\vec{u})\right) \neq 0 \quad \forall \vec{u} \in N$.

Dann heißt \vec{g} *Koordinatentransformation* mit

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2 &= g_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Man sagt auch: Auf M werden durch \vec{g} *neue Koordinaten* u_1, u_2, \dots, u_n eingeführt.

Satz 12.26 : *Substitution*

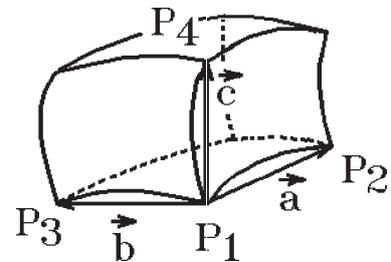
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt* und *meßbar*. Auf M mit $K \subset M \subset \mathbb{R}^n$ seien durch die Funktion $\vec{g} : N \rightarrow M$ *neue Koordinaten* eingeführt. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ *stetig*. Dann gilt

$$\int_K f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\vec{g}^{-1}(K)} f(\vec{g}(\vec{u})) \, |\det\left(\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}}(\vec{u})\right)| \, d\vec{u}$$

Beweisidee für den \mathbb{R}^3

Seien x, y, z die alten und u, v, w die neuen Koordinaten. Das Volumenelement bzgl. der alten Koordinaten ist $dV = dx \, dy \, dz$. Wir berechnen nun das Volumenelement bzgl. der neuen Koordinaten. Dazu zeichnen wir an einem Punkt $P_1(u, v, w)$ die drei Koordinatenlinien und berechnen das Volumen eines kleinen Volumenelementes ΔV mit den Eckpunkten

- $P_1(u, v, w)$,
- $P_2(u + \Delta u, v, w)$,
- $P_3(u, v + \Delta v, w)$,
- $P_4(u, v, w + \Delta w)$, ...



Wir definieren die Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{r}(u + \Delta u, v, w) - \vec{r}(u, v, w) \\ \vec{b} &= \vec{r}(u, v + \Delta v, w) - \vec{r}(u, v, w) \\ \vec{c} &= \vec{r}(u, v, w + \Delta w) - \vec{r}(u, v, w) \end{aligned}$$

mit $\vec{r}(u, v, w)$ ist der Ortsvektor des Punktes $P(u, v, w)$ usw.

Dann gilt für das Volumen ungefähr

$$\Delta V \approx | \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle | = | \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) | .$$

Da $\vec{a} = \vec{r}(u + \Delta u, v, w) - \vec{r}(u, v, w) \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \Delta u$ und analog

$$\vec{b} \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \Delta v, \quad \vec{c} \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \Delta w \Rightarrow$$

$$\Delta V \approx \left| \det \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| \Delta u \Delta v \Delta w = \left| \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Im Grenzwert erhalten wir dann für das Volumenelement in den neuen Koordinaten

$$dV = d(x, y, z) = \left| \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| d(u, v, w)$$

oder vektoriell geschrieben:

$$dV = \left| \det \left(\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}}(\vec{u}) \right) \right| d\vec{u}$$

ist das *Volumenelement* in den neuen Koordinaten u, v, w .

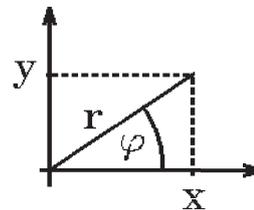
Ausführlicher Beweis siehe Literatur.

Beispiele

1. Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2

$$x = r \cos \varphi = g_1(r, \varphi)$$

$$y = r \sin \varphi = g_2(r, \varphi).$$



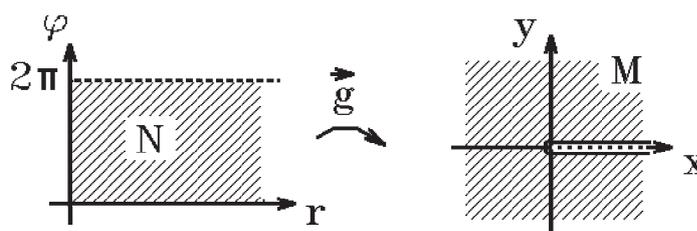
$$\vec{g}: N \rightarrow M$$

\vec{g} bijektiv und $\vec{g} \in C^1(N)$ mit

$$N = D(\vec{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi \right\} \quad \text{offen}$$

$$M = \vec{g}(N) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}$$

(also \mathbb{R}^2 ohne die x -Achse mit $x \geq 0$).



$$\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir die Funktionaldeterminante

$$\left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right) \right| = r \neq 0 \quad \text{in } N$$

Beispiel hierzu

Gesucht: $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$ mit

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\} \quad (\text{Kreisring}).$$

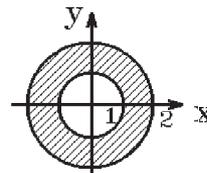
K ist kompakt und meßbar, f stetig in \mathbb{R}^2 .

Führen wir Polarkoordinaten ein, so erhalten wir

$$\vec{g}^{-1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Also erhalten wir für das Integral

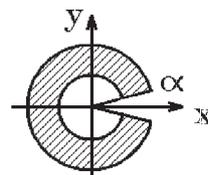
$$\int_K \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r \cdot r d\varphi dr = 2\pi \int_1^2 r^2 dr = 2\pi \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{14}{3}\pi.$$



Hierbei haben wir nicht ganz exakt gearbeitet, denn $K \not\subset M = \vec{g}(N)$. Bei M fehlt ja die positive x -Achse. Wir müssen eigentlich folgendermaßen vorgehen:

Wir betrachten K_α mit

$$\vec{g}^{-1}(K_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 1 \leq r \leq 2, \alpha \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha \right\}$$



$\Rightarrow K_\alpha \subset M$, K_α kompakt und meßbar mit

$$\int_{K_\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) = \int_1^2 \int_\alpha^{2\pi - \alpha} r^2 d\varphi dr = (2\pi - 2\alpha) \int_1^2 r^2 dr = \frac{14}{3}(\pi - \alpha) \Rightarrow$$

$$\int_K \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{K_\alpha} \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{14}{3}(\pi - \alpha) = \frac{14}{3}\pi.$$

Man kann in der Praxis auf diese Grenzbetrachtungen verzichten.

2. Zylinderkoordinaten in \mathbb{R}^3

$$x = r \cos \varphi = g_1(r, \varphi, z)$$

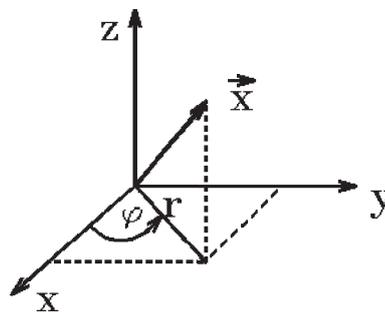
$$y = r \sin \varphi = g_2(r, \varphi, z)$$

$$z = z = g_3(r, \varphi, z).$$

$$\vec{g}: N \rightarrow M$$

\vec{g} bijektiv und $\vec{g} \in C^1(N)$ mit

$$N = D(\vec{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty \right\} \quad \text{offen}$$



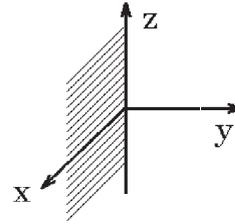
$$M = \vec{g}(N) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}$$

(also \mathbb{R}^3 ohne die (x, z) -Ebene mit $x \geq 0$).

$$\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir die Funktionaldeterminante

$$\left| \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) \right| = r \neq 0 \quad \text{in } N$$



Beispiele hierzu

a) Gesucht: $\int_K x^2 y \, d(x, y, z)$ mit

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Führen wir Zylinderkoordinaten ein, so erhalten wir

$$\vec{g}^{-1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

$$\begin{aligned} \int_K x^2 y \, d(x, y, z) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

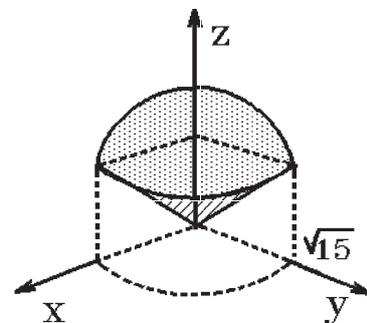
Auch hier haben wir auf die Grenzbetrachtungen verzichtet.

b) $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x^2 + y^2}{15} \leq z^2 \leq 16 - x^2 - y^2 \right\}$ (vgl. **S.391**).

Gesucht: $\mu(K)$.

In Zylinderkoordinaten erhalten wir die Grenzen für K :

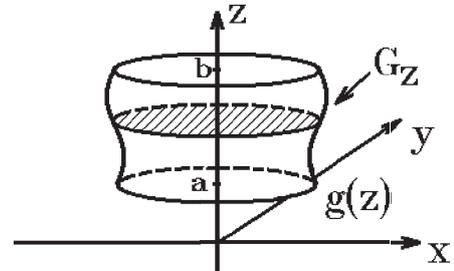
$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq \sqrt{15} \\ 0 &\leq \varphi \leq \pi/2 \\ \frac{r}{\sqrt{15}} &\leq z \leq \sqrt{16 - r^2}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mu(K) &= \int_K d(x, y, z) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{15}} \int_{\frac{r}{\sqrt{15}}}^{\sqrt{16-r^2}} r \, dz \, dr \, d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{15}} \left(r\sqrt{16-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{15}} \right) dr = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3\sqrt{15}} \right]_0^{\sqrt{15}} \\
&= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{3} - \frac{15\sqrt{15}}{3\sqrt{15}} + \frac{4^3}{3} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{3} \right) = 8\pi .
\end{aligned}$$

c) Integral über Rotationskörper um z-Achse

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a \leq z \leq b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G_z \right\}$$



$$\text{mit } G_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq g^2(z) \right\} .$$

In Zylinderkoordinaten erhalten wir die Grenzen

$$a \leq z \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq g(z) \quad \Rightarrow$$

$$\int_K f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{g(z)} f(r, \varphi, z) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz .$$

Spezialfall: $f \equiv 1 \Rightarrow$

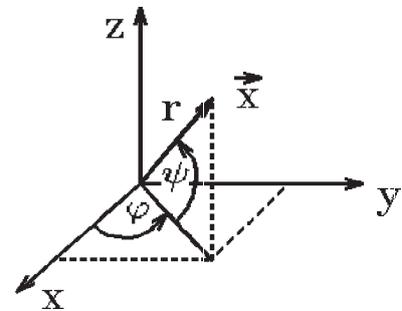
$$\mu(K) = \int_a^b 2\pi \cdot \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{g(z)} dz = \pi \int_a^b g^2(z) \, dz \quad (\text{vgl. S.400}).$$

3. Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^3

$$x = r \cos \varphi \cos \psi = g_1(r, \varphi, \psi)$$

$$y = r \sin \varphi \cos \psi = g_2(r, \varphi, \psi)$$

$$z = r \sin \psi = g_3(r, \varphi, \psi).$$



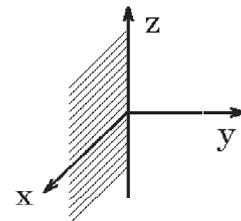
$$\vec{g} : N \rightarrow M$$

\vec{g} bijektiv und $\vec{g} \in C^1(N)$ mit

$$N = D(\vec{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} : 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\pi/2 < \psi < \pi/2 \right\} \quad \text{offen}$$

$$M = \vec{g}(N) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = 0, \quad x \geq 0 \right\}$$

(also \mathbb{R}^3 ohne die (x, z) -Ebene mit $x \geq 0$).



$$\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir die Funktionaldeterminante (vgl. S.289)

$$|\det(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)})| = r^2 \cos \psi \neq 0 \text{ in } N$$

Beispiele hierzu

a) Gesucht: Volumen einer Kugel mit Radius R

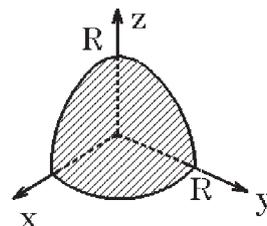
Führen wir Kugelkoordinaten ein, so erhalten wir für die Kugel die Grenzen

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^R r^2 \, dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \\ &= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} R^3 \pi. \end{aligned}$$

b) Gesucht: Die Masse des Kugeloktanten K mit

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$



und der Dichte $\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Führen wir Kugelkoordinaten ein, so erhalten wir die Grenzen

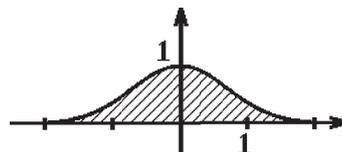
$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x, y, z) &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r \cdot r^2 \cos \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^R r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{8} R^4. \end{aligned}$$

Auch bei diesen Beispielen haben wir auf die Grenzwertbetrachtungen verzichtet.

Anwendungen

1. Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$.



Dieses Integral ist wichtig z.B. für die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Gaußsche Normalverteilung). Da eine Stammfunktion in einfacher Form nicht existiert, kann das Integral nicht elementar berechnet werden. Die Konvergenz des Integrals haben wir bereits gezeigt (vgl. Beispiel 2, S.220).

Wir werden nun den Wert des Integrals berechnen, indem wir einen Umweg über zweidimensionale Integrale wählen:

Sei $R > 0$

$$K_R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

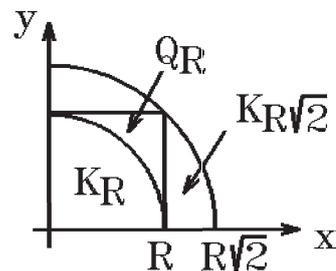
(Viertelkreis mit Radius R),

$$Q_R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R \right\}$$

(Quadrat mit Kantenlänge R),

$$K_{R\sqrt{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2R^2 \right\}$$

(Viertelkreis mit Radius $R\sqrt{2}$).



Da $e^{-(x^2+y^2)} > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ und $K_R \subset Q_R \subset K_{R\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \leq \int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \leq \int_{K_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \quad \forall R > 0.$$

Nun gilt für das 2.Integral

$$\int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Mit Polarkoordinaten erhalten wir für das 1.Integral

$$\begin{aligned} \int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^R r e^{-r^2} dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^R r e^{-r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für das 3.Integral

$$\int_{K_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

Damit erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

Für $R \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{4} \leq \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Da der Integrand gerade $\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, also

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

2. Berechnung von Schwerpunkten

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ meßbar mit der Dichte $\varrho(\vec{x})$. Dann hat M die *Masse* m mit

$$m = \int_M \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

Der *Schwerpunkt* \vec{x}_s von M läßt sich dann folgendermaßen berechnen

$$\vec{x}_s = \frac{1}{m} \int_M \vec{x} \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

Dieses Integral wird koordinatenweise ausgewertet, also

$$(\vec{x}_s)_1 = \frac{1}{m} \int_M x \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z), \text{ usw.}$$

Für den Schwerpunkt \vec{x}_s gilt:

$$\int_M (\vec{x} - \vec{x}_s) \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{Denn: } \int_M (\vec{x} - \vec{x}_s) \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_M \vec{x} \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x} - \vec{x}_s \int_M \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_M \vec{x} \varrho(\vec{x}) \, d\vec{x} - m \vec{x}_s = \vec{0}.$$

Beispiel Schwerpunkt des Kugeloktanten M mit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

mit der Dichte $\varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\text{Masse } m = \int_M \varrho(x, y, z) \, d(x, y, z) = \frac{\pi}{8} R^4 \quad (\text{vgl. Beispiel b), S.407}).$$

$$\begin{aligned} m(\vec{x}_s)_1 &= \int_M x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x, y, z) \\ &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r \cos \varphi \cos \psi \cdot r \cdot r^2 \cos \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^R r^4 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi \, d\psi \\ &= \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^R \cdot \left. \sin \varphi \right|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2\psi)) \, d\psi = \frac{R^5}{5} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20} R^5. \\ \Rightarrow (\vec{x}_s)_1 &= \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{20} R^5 = \frac{8}{\pi R^4} \cdot \frac{\pi R^5}{20} = \frac{2}{5} R. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen sind die anderen Koordinaten des Schwerpunktes gleich der 1. Koordinate, also

$$(\vec{x}_s)_1 = (\vec{x}_s)_2 = (\vec{x}_s)_3 = \frac{2}{5} R.$$

3. Berechnung von Trägheitsmomenten

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ meßbar mit der Dichte $\rho(\vec{x})$.

Sei $g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{r}, |\vec{r}| = 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade (mit normiertem Richtungsvektor \vec{r}).

Dann ist das *Trägheitsmoment* von M bzgl. der Geraden g gleich

$$T_g = \int_M |(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

Denn: Der Abstand eines Punktes P mit Ortsvektor \vec{x} von der Geraden g ist $|(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{r}|$ (vgl. Beispiel 3, S.39).

Spezialfälle

Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse

x-Achse: $\vec{x} = \vec{0} + \lambda \vec{e}_1 \Rightarrow |(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 = |(\vec{x} - \vec{0}) \times \vec{e}_1|^2 = |\vec{x} \times \vec{e}_1|^2 = y^2 + z^2$.

Denn: $\vec{x} \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$.

Also erhalten wir für das *Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse*

$$T_x = \int_M (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

Analog gilt für das *Trägheitsmoment T_y bzgl. der y-Achse* und für das *Trägheitsmoment T_z bzgl. der z-Achse*

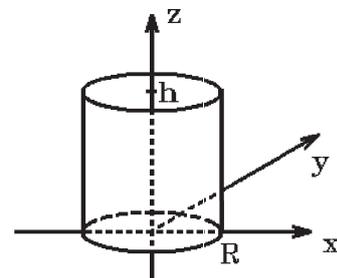
$$T_y = \int_M (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z) \quad , \quad T_z = \int_M (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

Beispiel hierzu

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \right\}$$

Kreiszylinder mit Radius R und Höhe h .

M habe die Dichte $\rho \equiv 1$, dann erhalten wir für das *Trägheitsmoment bzgl. der z-Achse*



$$T_z = \int_M (x^2 + y^2) d(x, y, z) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 \cdot r dz d\varphi dr = 2\pi h \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi h R^4}{2}$$

Satz 12.27 : *Satz von Steiner*

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ meßbar mit der Dichte $\rho(\vec{x})$, sei \vec{x}_s der Schwerpunkt.

s sei eine Gerade durch den Schwerpunkt: $s = \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{x}_s + \lambda \vec{r}, |\vec{r}| = 1\}$.

g sei eine Parallelgerade zu s , also: $g = \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{r}, |\vec{r}| = 1\}$.

Dann gilt

$$T_g = T_s + m \cdot |(\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2$$

wobei m die Masse von M und $|(\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|$ der Abstand zwischen der Geraden s und der Geraden g ist.

Beweis :

$$\begin{aligned} T_g &= \int_M |(\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} = \int_M |(\vec{x} - \vec{x}_s + \vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_M |(\vec{x} - \vec{x}_s) \times \vec{r} + (\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_M |(\vec{x} - \vec{x}_s) \times \vec{r}|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} + \int_M |(\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 \rho(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\quad + 2 \int_M \langle (\vec{x} - \vec{x}_s) \times \vec{r}, (\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r} \rangle \rho(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

(das letzte Integral ist $= 0$, da $\int_M (\vec{x} - \vec{x}_s) \rho(\vec{x}) d\vec{x} = \vec{0}$ (vgl. S.409))

$$= T_s + |(\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 \int_M \rho(\vec{x}) d\vec{x} = T_s + m \cdot |(\vec{x}_s - \vec{x}_0) \times \vec{r}|^2 .$$

Hierbei haben wir folgende Eigenschaft benutzt:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2 .$$

Uneigentliche mehrdimensionale Integrale

Wie im eindimensionalen Fall können auch im mehrdimensionalen Fall zwei Fälle auftreten:

- a) Das Integrationsgebiet M ist *unbeschränkt*.
- b) Die zu integrierende Funktion f ist in einem Punkt \vec{c} des Integrationsgebietes M *unbeschränkt*. \vec{c} heißt dann *singulärer Punkt*.

In beiden Fällen werden wir die Menge M durch eine Folge von beschränkten, meßbaren, zusammenhängenden Teilmengen von M ausschöpfen.

Definition 12.28 : *Ausschöpfungsfolge*

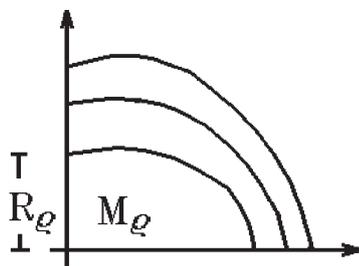
- a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ unbeschränkt und zusammenhängend.

Seien $M_\rho \subset M$ *beschränkt*, meßbar, zusammenhängend mit $R_\rho = \inf_{\vec{x} \in M \setminus M_\rho} \{|\vec{x}|\} \rightarrow \infty$,

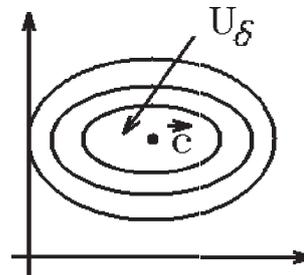
dann heißt $\{M_\rho\}$ eine *Ausschöpfungsfolge* von M .

- b) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und meßbar mit $\vec{c} \in M$.

Seien $U_\delta \subset M$ Umgebungen des Punktes \vec{c} mit $R_\delta = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in U_\delta} \{|\vec{x} - \vec{y}|\} \rightarrow 0$,
dann heißt $\{M_\delta\}$ mit $M_\delta = M \setminus U_\delta$ eine *Ausschöpfungsfolge* von M .



M unbeschränkt



Singularität \vec{c}

Sei nun im Fall a) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. im Fall b) $f : M \setminus \{\vec{c}\} \rightarrow \mathbb{R}$, so definieren wir:

Definition 12.29 : *Uneigentliche Integrierbarkeit*

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ unbeschränkt und zusammenhängend und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über jeder beschränkten, meßbaren, zusammenhängenden Teilmenge von M .

Hat dann $\lim_{R_\rho \rightarrow \infty} \int_{M_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}$ einen *endlichen Grenzwert unabhängig von der Wahl der Ausschöpfungsfolge* $\{M_\rho\}$, so heißt f *uneigentlich integrierbar* über M und wir schreiben

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{R_\rho \rightarrow \infty} \int_{M_\rho} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

b) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und meßbar und $f : M \setminus \{\vec{c}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Singularität in $\vec{c} \in M$. Für jede Umgebung U_δ sei f integrierbar über $M_\delta = M \setminus U_\delta$.

Hat dann $\lim_{R_\delta \rightarrow 0} \int_{M_\delta} f(\vec{x}) d\vec{x}$ einen *endlichen Grenzwert unabhängig von der Wahl der Ausschöpfungsfolge* $\{M_\delta\}$, so heißt f *uneigentlich integrierbar* über M und wir schreiben

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{R_\delta \rightarrow 0} \int_{M_\delta} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Für Funktionen f , die in M (bzw. $M \setminus \{\vec{c}\}$) *nichtnegativ* sind, gilt nun der folgende wichtige Satz:

Satz 12.30 :

Für $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f : M \setminus \{\vec{c}\} \rightarrow \mathbb{R}$) gelte $f(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in M$ (bzw. $\forall \vec{x} \in M \setminus \{\vec{c}\}$).

Dann ist f uneigentlich integrierbar über M *genau dann*, wenn für eine *spezielle* Ausschöpfungsfolge $\{M_\varrho\}$ (bzw. $\{M_\delta\}$) ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{R_\varrho \rightarrow \infty} \int_{M_\varrho} f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{R_\delta \rightarrow 0} \int_{M_\delta} f(\vec{x}) d\vec{x}) \quad \text{existiert.}$$

In diesem Fall ist $\int_M f(\vec{x}) d\vec{x}$ gleich diesem Grenzwert.

Beweis :

Sei $\{M_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine spezielle Ausschöpfungsfolge mit $I = \lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{M_n} f(\vec{x}) d\vec{x}$.

Sei $\epsilon > 0$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq I - \int_{M_{n_0}} f(\vec{x}) d\vec{x} < \epsilon$.

Für eine beliebige Ausschöpfungsfolge $\{M_\varrho\}$ mit genügend großem R_ϱ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $M_{n_0} \subset M_\varrho \subset M_{n_1}$. Da $f(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in M \Rightarrow$

$$\int_{M_{n_0}} f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_{M_\varrho} f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_{M_{n_1}} f(\vec{x}) d\vec{x} \leq I \Rightarrow$$

$$0 \leq I - \int_{M_\varrho} f(\vec{x}) d\vec{x} < \epsilon \quad \text{für alle genügend großen } R_\varrho \Rightarrow$$

I ist gemeinsamer Grenzwert unabhängig von der Wahl der Ausschöpfungsfolge $\{M_\varrho\}$.

Beweis analog für Singularität.

Für Funktionen, die verschiedene Vorzeichen annehmen, gilt der folgende Satz

Satz 12.31 : Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend mit $n \geq 2$. Dann gilt:

f ist *uneigentlich integrierbar* über $M \Leftrightarrow |f|$ ist *uneigentlich integrierbar* über M .

Beweis : siehe Literatur (z.B.: Fichtenholz, Diff.-und Integr.-Rechnung III, **S.210 ff**).

Bemerkung :

Dieser Satz gilt nicht in \mathbb{R} , also für $n = 1$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ist konvergent, aber} \quad \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \quad \text{ist divergent} \quad (\text{vgl. S.216}).$$

Bemerkung :

Auch bei uneigentlichen Integralen kann man *Koordinatentransformation* durchführen.

Es gilt

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{g}^{-1}(M)} f(\vec{g}(\vec{u})) \left| \det \left(\frac{d\vec{g}}{d\vec{u}}(\vec{u}) \right) \right| d\vec{u}$$

falls eine Seite konvergiert. In diesem Fall konvergiert auch die andere Seite.

Beispiele

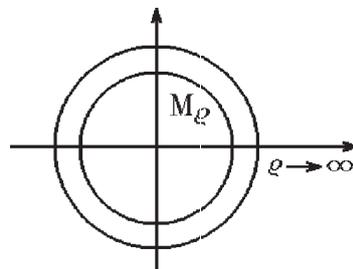
1.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \pi \quad \text{ist konvergent, denn}$$

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{eine spezielle Ausschöpfungsfolge genügt.}$$

$$\text{Wir wählen } M_\varrho = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq \varrho^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{M_\varrho} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr \\ &= 2\pi \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^\varrho = 2\pi \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-\varrho^2}) = \pi. \end{aligned}$$



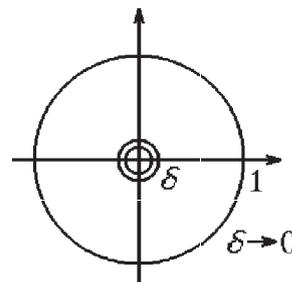
2.

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d(x, y) \quad \text{mit} \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 0 \text{ in } M \setminus \{\vec{0}\} \Rightarrow \text{eine spezielle Ausschöpfungsfolge genügt.}$$

$$\text{Wir wählen } M_\delta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_\delta} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d(x, y) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{r} d\varphi dr \\ &= 2\pi \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 dr = 2\pi \lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - \delta) = 2\pi \\ &\Rightarrow \int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d(x, y) = 2\pi \quad \text{ist konvergent.} \end{aligned}$$



3.

$$\int_M \frac{x}{(x^2+y^2)^2} d(x, y) \quad \text{mit} \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

$$\int_M \frac{x}{(x^2+y^2)^2} d(x, y) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int_M \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2} d(x, y) \text{ konvergent.}$$

Wir wählen die gleiche Ausschöpfungsfolge wie in Beispiel 2) und erhalten

$$\int_M \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2} d(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{r |\cos \varphi|}{r^4} \cdot r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{r^2} dr$$

divergent, da $\int_0^1 \frac{1}{r^2} dr$ divergent (vgl. S.215)

$$\Rightarrow \int_M \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} d(x, y) \text{ ist divergent.}$$

Es wäre falsch, folgendermaßen vorzugehen:

$$\int_{\delta}^1 \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \varphi}{r^4} \cdot r d\varphi dr = \int_{\delta}^1 \frac{1}{r^2} dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \text{ da } \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \int_M \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} d(x, y) = 0. \text{ Das kann nicht sein, da das Integral divergent ist.}$$

4.

$$\int_M \sin x e^{-xy} d(x, y) \text{ mit } M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

Wir untersuchen $|f|$ und wählen dabei die spezielle Ausschöpfungsfolge

$$M_{n,m} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq m \right\}.$$

$$\begin{aligned} \int_M |\sin x| e^{-xy} d(x, y) &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^m |\sin x| e^{-xy} dy dx \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_0^n |\sin x| \left[-\frac{e^{-xy}}{x} \right]_{y=0}^m dx = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} (1 - e^{-mx}) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ divergent (vgl. Beispiel 4, S.216)} \\ &\Rightarrow \int_M \sin x e^{-xy} d(x, y) \text{ ist divergent.} \end{aligned}$$

5.

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{r^\alpha(1+r^\alpha)} d(x, y)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ konvergent?

Da das Integrationsgebiet \mathbb{R}^2 unbeschränkt und der Integrand bei $\vec{0}$ eine Singularität hat, müssen wir zunächst das Integral aufspalten in

$$\text{a) } \int_{M_1} \frac{1}{r^\alpha(1+r^\alpha)} d(x, y) \text{ mit } M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \text{ und}$$

$$\text{b) } \int_{M_2} \frac{1}{r^\alpha(1+r^\alpha)} d(x, y) \text{ mit } M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

Zu a): Da $f(\vec{x}) \geq 0 \forall \vec{x} \in M_1 \setminus \{\vec{0}\}$, reicht eine spezielle Ausschöpfungsfolge.

Wir wählen $M_\delta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \Rightarrow$

$$\int_{M_1} \frac{1}{r^\alpha(1+r^\alpha)} d(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\delta^1 \frac{r}{r^\alpha(1+r^\alpha)} dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}(1+r^\alpha)} dr$$

ist konvergent $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$.

(Denn: Für kleine r verhält sich der Integrand \approx wie $\frac{1}{r^{\alpha-1}}$ und es gilt:

$\int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} dr$ ist konvergent $\Leftrightarrow \alpha < 1$ (vgl. Beispiel 1., S.215)).

Zu b) Da $f(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in M_2$, reicht eine spezielle Ausschöpfungsfolge.

Wir wählen $M_\varrho = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 1 \leq x^2 + y^2 \leq \varrho^2 \right\} \Rightarrow$

$$\int_{M_2} \frac{1}{r^\alpha(1+r^\alpha)} d(x,y) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_1^\varrho \frac{r}{r^\alpha(1+r^\alpha)} dr d\varphi = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r^{\alpha-1}(1+r^\alpha)} dr$$

ist konvergent $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

(Denn: Für große r verhält sich der Integrand \approx wie $\frac{1}{r^{2\alpha-1}}$ und es gilt:

$\int_1^\infty \frac{1}{r^\alpha} dr$ ist konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$ (vgl. Beispiel 2., S.216)).

Zusammen erhalten wir dann:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{r^\alpha(1+r^\alpha)} d(x,y) \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2.$$

6.

$$\int_M \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} d(x,y,z) \text{ mit } M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

Da der Integrand f verschiedene Vorzeichen in M annimmt, untersuchen wir zu-

nächst $|f|$. Wir wählen die Ausschöpfungsfolge $M_\delta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \delta^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$

$$\begin{aligned} & \int_M \frac{|xyz|}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} d(x,y,z) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_\delta^2 \frac{|r \cos \varphi \cos \psi \cdot r \sin \varphi \cos \psi \cdot r \sin \psi|}{r^4} \cdot r^2 \cos \psi dr d\psi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos^2 \psi \sin \psi| \cos \psi d\psi \cdot \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^2 r dr \right) \text{ konvergent, da} \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^2 r dr = \int_0^2 r dr \text{ konvergent.}$$

Damit ist auch das ursprüngliche Integral konvergent, und wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_M \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} d(x,y,z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr d\psi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi \cdot \int_0^2 r dr = 0, \text{ da das 1. Integral} = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

XIII Vektoranalysis, Integralsätze

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Kurven und Flächen in \mathbb{R}^n . Da Kurven und Flächen des \mathbb{R}^n das n -dimensionale Maß 0 haben, ist das Integral über diese Gebilde = 0. Wir werden aber in diesem Kapitel zwei weitere Integraltypen einführen: a) das Integral entlang einer Kurve und b) das Integral über eine Fläche des \mathbb{R}^n (z.B. Oberfläche eines Körpers). Zunächst definieren wir Kurven in \mathbb{R}^n , die in Parameterform gegeben sind:

Definition 13.1 : Sei $\vec{\varphi} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$.

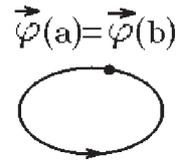
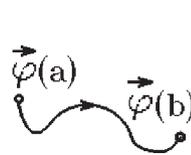
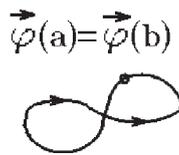
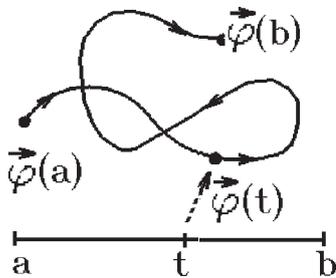
Die Punktmenge $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in [a, b]\}$ heißt *Kurve* in \mathbb{R}^n , $(\vec{\varphi}, [a, b])$ heißt *Parameterdarstellung* von K , t ist der Parameter, $[a, b]$ das Parameterintervall.

$\vec{\varphi}(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $\vec{\varphi}(b)$ heißt *Endpunkt* von K .

K heißt *geschlossen*, wenn $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$.

K heißt *Jordan-Kurve*, wenn K keine Doppelpunkte (bis auf evt. Anfangs- und Endpunkt) hat, d.h.: $\vec{\varphi}$ ist eineindeutig in $[a, b]$.

Beispiele



geschlossene Kurve

Jordan-Kurve

geschlossene

Jordan-Kurve

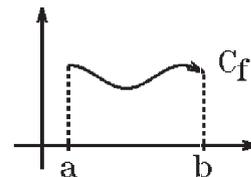
Beispiele

1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \Rightarrow

Der Graph von f ist eine Kurve in \mathbb{R}^2 mit

$$C_f = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\}.$$

C_f ist eine nicht-geschlossene Jordan-Kurve.



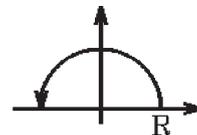
$(\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b])$ ist Parameterdarstellung von C_f .

2. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, \pi] \right\}$

K ist *Halbkreis* mit Radius R .

$(\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, \pi])$

ist Parameterdarstellung von K .

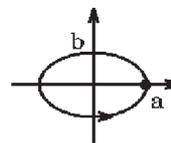


3. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = t, y = \sqrt{R^2 - t^2}, t \in [-R, R] \right\}$

ist ebenfalls Halbkreis mit Radius R , aber der Durchlaufungssinn ist umgekehrt wie bei 2).

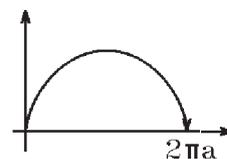
4. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi] \right\}$

Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



5. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi] \right\}$

Zykloidenbogen (vgl. Beispiel 2., S.226)



6. $K = \{ \vec{x} : \vec{x} = \vec{\varphi}(t) = \vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), t \in [0, 1] \}$

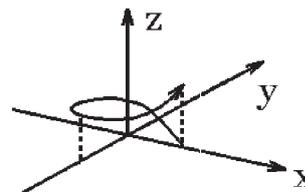
Geradenstück zwischen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 .



7. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = R \cos t, y = R \sin t, z = ct, t \in [0, 2\pi] \right\}$

Schraubenlinie mit Radius R und Ganghöhe $2\pi c$.

K ist nicht-geschlossene Jordan-Kurve in \mathbb{R}^3 .

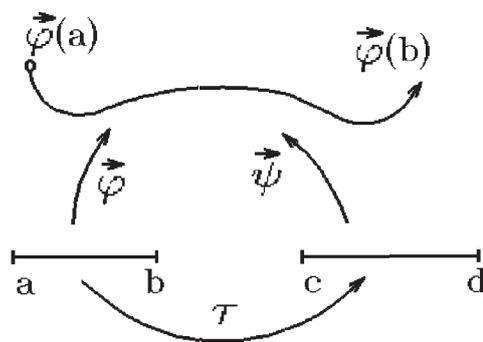


Eine Kurve kann verschiedene Parameterdarstellungen haben (vgl.: bei Beispiel 2. und 3. liefern die Parameterdarstellungen bis auf den Durchlaufungssinn die gleiche Kurve). Wir definieren deshalb, was wir unter äquivalenten Parameterdarstellungen verstehen wollen:

Definition 13.2 : Seien $(\vec{\varphi}, [a, b])$ und $(\vec{\psi}, [c, d])$ Parameterdarstellungen einer Kurve K . Existiert eine Abbildung $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$ mit

- a) $\tau \in C^1[a, b]$, $\tau'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$,
- b) $\tau(a) = c$, $\tau(b) = d$,
- c) $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(\tau(t)) \quad \forall t \in [a, b]$,

so nennen wir die Parameterdarstellungen *äquivalent*. In diesem Fall stellen sie die gleiche Kurve mit gleichem Durchlaufungssinn dar.



Beispiel

$$\left(\vec{\varphi}(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right), t \in [-1, 1] \right) \hat{=} \left(\vec{\psi}(t) = \left(\frac{t-1}{\sqrt{1-(t-1)^2}} \right), t \in [0, 2] \right)$$

sind äquivalent und stellen den oberen Halbkreis mit Radius 1 dar. Es ist $\tau(t) = t+1$.

Definition 13.3 : Tangentenvektor

Sei K eine durch $(\vec{\varphi}, [a, b])$ dargestellte Kurve in \mathbb{R}^n .

- a) Existiert $\vec{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \vdots \\ \varphi'_n(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, so heißt

$$T_{\vec{\varphi}(t)} = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|} \text{ der Tangentenvektor von } K \text{ im Punkt } \vec{\varphi}(t).$$

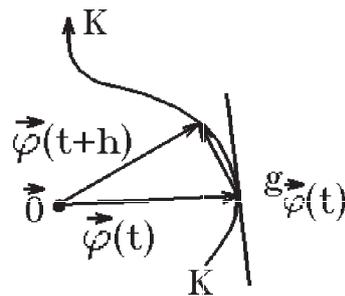
- b) Die Gerade $g_{\vec{\varphi}(t)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{\varphi}(t) + \lambda \vec{\varphi}'(t), \lambda \in \mathbb{R} \}$ heißt *Tangente* an die Kurve K im Punkt $\vec{\varphi}(t)$.

$$\vec{\varphi}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\varphi}(t+h) - \vec{\varphi}(t)}{h}$$

ist Richtung der Tangente,

$$T_{\vec{\varphi}(t)} = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|}$$

ist normiert, d.h.: $|T_{\vec{\varphi}(t)}| = 1$.



Beispiele

1. $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ mit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

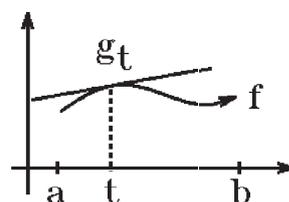
$$C_f = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in [a, b] \}$$

Graph von f ,

$$\vec{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

Tangente im Punkt $\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$.



Koordinatenweise ausgeschrieben erhalten wir:

$$x = t + \lambda, y = f(t) + \lambda f'(t) \Rightarrow \text{(mit } \lambda = x - t \text{)}$$

$$y = f(t) + f'(t)(x - t) \text{ ist Tangente an den Graphen von } f \text{ im Punkt } \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

(vgl. S.153).

2. $K = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi] \}$ Kreis um $\vec{0}$ mit Radius R ,

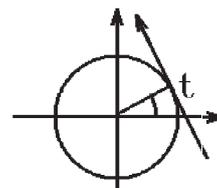
$$\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, \vec{\varphi}'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}, |\vec{\varphi}'(t)| = R$$

$$\Rightarrow T_{\vec{\varphi}(t)} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ Tangentenvektor,}$$

$$\text{z.B.: } t = 0 \Rightarrow T_{(R,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = \pi/4 \Rightarrow T_{(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g_{\vec{\varphi}(t)} : \vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ Tangente in } \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}.$$



Bemerkung :

Der Tangentenvektor hängt nicht von der Parameterdarstellung ab.

D.h.: Sind $(\vec{\varphi}, [a, b])$ und $(\vec{\psi}, [c, d])$ zwei äquivalente Parameterdarstellungen mit

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(\tau(t)) \quad \forall t \in [a, b], \text{ so gilt } T_{\vec{\varphi}(t)} = T_{\vec{\psi}(\tau(t))} \quad \forall t \in [a, b].$$

$$\text{Denn: } T_{\vec{\varphi}(t)} = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|} = \frac{\vec{\psi}'(\tau(t))\tau'(t)}{|\vec{\psi}'(\tau(t))\tau'(t)|} = \frac{\vec{\psi}'(\tau(t))\tau'(t)}{|\vec{\psi}'(\tau(t))|\tau'(t)} = T_{\vec{\psi}(\tau(t))}, \quad (\text{da } \tau'(t) > 0).$$

Definition 13.4 : Sei K eine durch $(\vec{\varphi}, [a, b])$ dargestellte Kurve in \mathbb{R}^n .

- a) K heißt *glatt*, wenn $\vec{\varphi} \in C^1[a, b]$ (d.h.: stetig differenzierbar in $[a, b]$) mit $\vec{\varphi}'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [a, b]$ (d.h.: in jedem Punkt existiert der Tangentenvektor).
- b) K heißt *stückweise glatt*, wenn sich K aus glatten Stücken zusammensetzt, d.h.: es existiert eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ von $[a, b]$ mit: K ist glatt in jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$.



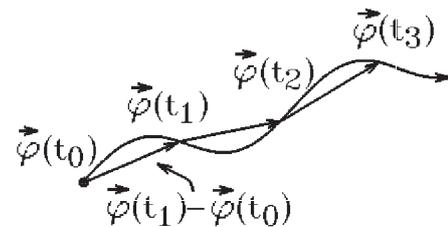
glatte Kurve



stückweise glatte Kurve

Wir wollen nun für glatte Kurven definieren, was wir unter der *Bogenlänge* verstehen. K habe die Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, [a, b])$, $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ sei eine Zerlegung von $[a, b]$. Ersetzen wir K durch den Polygonzug durch die Punkte $\vec{\varphi}(t_0), \vec{\varphi}(t_1), \dots, \vec{\varphi}(t_m)$, so erhalten wir als Bogenlänge für den Polygonzug p_m :

$$\begin{aligned} L(p_m) &= \sum_{k=1}^m |\vec{\varphi}(t_k) - \vec{\varphi}(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1}))^2} \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi'_i(\xi_{ki}))^2 (t_k - t_{k-1})} \\ &\quad (\text{Mittelwertsatz mit } t_{k-1} < \xi_{ki} < t_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi'_i(\xi_{k1}))^2 (t_k - t_{k-1})} + R_m \end{aligned}$$



Diese Summe ist eine Riemannsche Summe und konvergiert für $m \rightarrow \infty$ gegen das

$$\text{Integral } \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varphi'_i(t))^2} dt.$$

Für $m \rightarrow \infty \Rightarrow R_m \rightarrow 0$, denn $|t_k - t_{k-1}|$ wird beliebig klein, und damit nähern sich die Werte $\vec{\varphi}'(\xi_{ki})$ und $\vec{\varphi}'(\xi_{k1})$ beliebig an.

Also gilt: $\lim_{m \rightarrow \infty} L(p_m) = \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)| dt$.

Da $p_m \rightarrow K$ für $m \rightarrow \infty$, definieren wir:

Definition 13.5 : Sei K eine durch $(\vec{\varphi}, [a, b])$ dargestellte glatte Jordan-Kurve in \mathbb{R}^n . Dann ist

$$L(K) = \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)| dt$$

die *Bogenlänge* von K .

Ist K stückweise glatt, so ist die Bogenlänge von K gleich der Summe der Bogenlängen der einzelnen glatten Kurvenstücke.

Ist $a < c < b \Rightarrow L(K) = \int_a^c |\vec{\varphi}'(t)| dt + \int_c^b |\vec{\varphi}'(t)| dt$
 (Kurvenlänge von $\vec{\varphi}(a)$ bis $\vec{\varphi}(c)$ + Kurvenlänge von $\vec{\varphi}(c)$ bis $\vec{\varphi}(b)$).

Beispiele

1. $K = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} : t \in [a, b] \right\}$ Graph von $f \in C^1[a, b]$

$$\Rightarrow L(K) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \quad (\text{vgl. S.224}).$$

2. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b] \right\}$, $\varphi, \psi \in C^1[a, b]$

$$\Rightarrow L(K) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (\text{vgl. S.225}).$$

3. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = r(t) \cos t, y = r(t) \sin t, t \in [\alpha, \beta] \right\}$, $r \in C^1[\alpha, \beta]$,

Kurve in *Polarkoordinatendarstellung*.

Hierfür schreiben wir kürzer: $K = \{\vec{x} : r = r(t), t \in [\alpha, \beta]\}$.

Es gilt $x(t) = r(t) \cos t, y(t) = r(t) \sin t \Rightarrow$
 $x'(t) = r'(t) \cos t - r(t) \sin t, y'(t) = r'(t) \sin t + r(t) \cos t \Rightarrow$
 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (r'(t))^2 + r^2(t) \Rightarrow$

$$L(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(t))^2 + r^2(t)} dt$$

ist die Länge einer in Polarkoordinaten-Darstellung $r = r(t), t \in [\alpha, \beta]$, gegebenen Kurve.

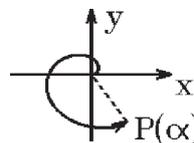
Beispiele hierzu

a) $r = R$, $t \in [0, 2\pi]$ Kreis um $\vec{0}$ mit Radius R

$$\Rightarrow L(K) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R \quad \text{Umfang eines Kreises mit Radius } R.$$

b) $r = at$, $t \in [0, \alpha]$, ($a > 0$ fest), Spirale,

$$\begin{aligned} L(K) &= \int_0^\alpha \sqrt{a^2 + a^2 t^2} dt = a \int_0^\alpha \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{a}{2} (\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})). \end{aligned}$$



4. Beispiel Kurve in \mathbb{R}^3

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a, b] \right\}, \quad x(t), y(t), z(t) \in C^1[a, b]$$

$$\Rightarrow L(K) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Beispiel hierzu Schraubenlinie (vgl. Beispiel 7, S.418)

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = R \cos t, y = R \sin t, z = ct, t \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$L(K) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + c^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + c^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + c^2}$$

($c = 0 \Rightarrow$ Umfang des Kreises $= 2\pi R$).

Inhaltsberechnung von Bereichen, die von glatten Kurven berandet werden.

Beispiele

1. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b] \right\}$

mit $y(t) \geq 0$, $x'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

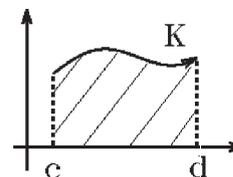
(oder $x'(t) < 0 \quad \forall t \in [a, b]$).

M sei der Bereich zwischen der x -Achse, der Kurve K und den Geraden $x = c$ und $x = d$

$\Rightarrow c = x(a)$, $d = x(b)$ (oder umgekehrt),

$$\mu(M) = \int_c^d y(x) dx = \int_a^b y(t)x'(t) dt$$

Substitution $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$, $y(x) = y(t)$.



Beispiel hierzu: *Fläche unter dem Zykloidenbogen*

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi] \right\} \quad (\text{vgl. S.418}),$$

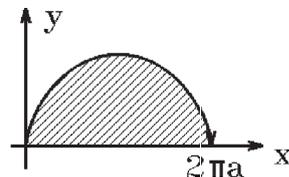
$$x'(t) = a(1 - \cos t) > 0 \text{ in } (0, 2\pi),$$

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \int_0^{2a\pi} y(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt \end{aligned}$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} dt = 3a^2\pi$$

$$(\text{da } \int_0^{2\pi} \cos nt dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$



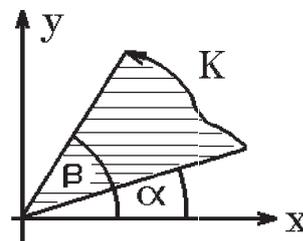
2. Fläche zwischen zwei Winkelstrahlen und einer Kurve in Polarkoordinatendarstellung

$$K : r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta],$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi) \right\}.$$

$$\mu(M) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{r(\varphi)} r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi \Rightarrow$$

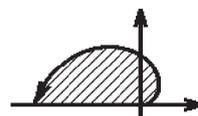
$$\boxed{\mu(M) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi}$$



ist der Inhalt der Fläche zwischen den zwei Winkelstrahlen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ und der Kurve $K: r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$.

Beispiel hierzu: *Spirale* $r = a\varphi, \varphi \in [0, \pi]$,

$$\mu(M) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2 \pi^3}{6}.$$



Bemerkung :

Natürlich ist auch die Bogenlänge *unabhängig* von der gewählten Parameterdarstellung, denn es gilt:

$$\int_c^d |\vec{\psi}'(\tau)| d\tau = \int_a^b |\vec{\psi}'(\tau(t))| \tau'(t) dt = \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)| dt$$

Substitution $\tau = \tau(t)$, $d\tau = \tau'(t)dt$

(da für $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(\tau(t))$ gilt: $\vec{\varphi}'(t) = \vec{\psi}'(\tau(t))\tau'(t)$ und da $\tau'(t) > 0$).

Bevor wir nun Kurven- und Flächenintegrale behandeln, benötigen wir noch einige Eigenschaften über *Vektorfelder*:

Definition 13.6 : *Vektorfeld*

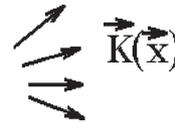
$\vec{V} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} V_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ V_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$ heißt *Vektorfeld*, d.h.: jedem Vektor $\vec{x} \in M$ wird der Bildvektor $\vec{V}(\vec{x})$ zugeordnet.

Beispiele

1. Kraftfeld

In jedem Punkt des Raumes wirkt eine Kraft

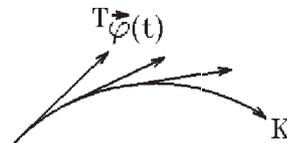
z.B.: Elektrische- und Magnetische Felder



2. Sei K eine durch $(\vec{\varphi}, [a, b])$ dargestellte glatte Kurve in \mathbb{R}^n

$\Rightarrow T_{\vec{\varphi}(t)} = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|}$ ist ein Vektorfeld (jedem Punkt $\vec{\varphi}(t)$ der Kurve wird der

Tangentenvektor zugeordnet).



3. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^1(M)$

$\Rightarrow \text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)^T$ ist ein Vektorfeld (jedem Vektor aus M wird der Gradientenvektor zugeordnet).

Definition 13.7 : *Divergenz*

Sei $\vec{V} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(M)$. Dann heißt

$$\text{div } \vec{V}(\vec{x}) := \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}(\vec{x})$$

die *Divergenz* von \vec{V} an der Stelle \vec{x} .

$\text{div } \vec{V}$ ist die Spur (Summe der Diagonalelemente) der Funktionalmatrix von \vec{V} .

In \mathbb{R}^3 können wir auch die *Rotation* eines Vektorfeldes definieren:

Definition 13.8 : *Rotation*

Sei $\vec{V} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld in \mathbb{R}^3 mit $\vec{V} \in C^1(M)$. Dann heißt der Vektor

$$\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) := \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)_{(\vec{x})}^T$$

die *Rotation* von \vec{V} an der Stelle \vec{x} .

Bemerkung : Formal können wir schreiben:

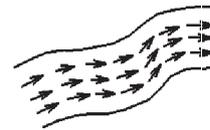
$$\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x})}$$

(Entwicklung nach der 1. Zeile).

Physikalische Bedeutung von $\text{div } \vec{V}$ und $\text{rot } \vec{V}$:

Beispiel

strömende Flüssigkeit,
 Vektoren $\hat{=}$ Geschwindigkeitsvektoren,
 also \vec{V} Vektorfeld (Geschwindigkeitsfeld).



Gilt $\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow$ an dieser Stelle \vec{x} ist *kein* Wirbel.

Gilt $\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) \neq \vec{0} \Rightarrow$ an dieser Stelle \vec{x} ist *ein* Wirbel.

\vec{x} ist das Zentrum des Wirbels,
 $\text{rot } \vec{V}(\vec{x})$ gibt die Richtung
 der Achse an, um den der Wirbel rotiert.



Gilt $\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in M \Rightarrow \vec{V}$ ist ein *wirbelfreies* Feld in M .

$\text{div } \vec{V}(\vec{x})$ beschreibt die Änderung des Massenflusses pro Volumeneinheit.

Gilt $\text{div } \vec{V}(\vec{x}) > 0 \Rightarrow$ Quelle in \vec{x} (Massenfluß nimmt zu).

Gilt $\text{div } \vec{V}(\vec{x}) < 0 \Rightarrow$ Senke in \vec{x} (Massenfluß nimmt ab).

Gilt $\text{div } \vec{V}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in M \Rightarrow \vec{V}$ ist *quellenfreies* (und senkenfreies) Feld in M .

Führen wir die *Differentialoperatoren*

$$\text{a) } \nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ Nabla-Operator, b) } \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ Laplace-Operator}$$

ein, so gilt für $\vec{V} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{V} \in C^1(M)$, $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(M)$:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f \\ \text{div } \vec{V} &= \langle \nabla, \vec{V} \rangle \\ \text{rot } \vec{V} &= \nabla \times \vec{V} \\ \Delta f &= \text{div}(\nabla f) = \langle \nabla, \nabla \rangle f \end{aligned}$$

Im folgenden Satz fassen wir einige wichtige Eigenschaften dieser Differentialoperatoren zusammen. Hierbei seien die beteiligten Vektorfelder und skalaren Funktionen entsprechend oft (d.h. 1- oder 2-mal) stetig differenzierbar in M .

Satz 13.9 : *Eigenschaften*

Seien $\vec{V}, \vec{W} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, M offen, $\vec{V}, \vec{W} \in C^1(M)$ bzw. $\in C^2(M)$.
 Sei $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(M)$ bzw. $\in C^2(M)$, $c \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

- a) $\text{div}(c\vec{V}) = c \text{div}(\vec{V})$, $\text{div}(\vec{V} + \vec{W}) = \text{div}(\vec{V}) + \text{div}(\vec{W})$ *Linearität*
- b) $\text{rot}(c\vec{V}) = c \text{rot}(\vec{V})$, $\text{rot}(\vec{V} + \vec{W}) = \text{rot}(\vec{V}) + \text{rot}(\vec{W})$ *Linearität*
- c) $\text{div}(f\vec{V}) = f \text{div} \vec{V} + \langle \text{grad } f, \vec{V} \rangle$
- d) $\text{rot}(f\vec{V}) = f \text{rot} \vec{V} + (\text{grad } f) \times \vec{V}$
- e) $\text{div}(\text{rot } \vec{V}) = 0$ (*Wirbelfeld ist quellenfrei*)
- f) $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ (*Gradientenfeld ist wirbelfrei*)
- g) $\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$
- h) $\text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) = \langle \vec{W}, \text{rot } \vec{V} \rangle - \langle \vec{V}, \text{rot } \vec{W} \rangle$
- i) $\text{rot}(\vec{V} \times \vec{W}) = \langle \vec{W}, \nabla \rangle \vec{V} - \vec{W} \text{div } \vec{V} - \langle \vec{V}, \nabla \rangle \vec{W} + \vec{V} \text{div } \vec{W}$.

Beweis :

Durch einfaches Nachrechnen. Wenn man die Eigenschaften des Skalar- bzw. Vektorprodukts (vgl. S.29, S.38, S.41) benutzen will, muß man sehr sorgfältig vorgehen, da ∇ ein Differentialoperator ist.

Zu a),b): Linearität, weil die partiellen Ableitungen linear sind.

Zu c),d),e),f): Übungsaufgabe.

Zu g) Wir benutzen den Entwicklungssatz (vgl. S.41)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}, \text{ also gilt:}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \langle \nabla, \vec{V} \rangle - \langle \nabla, \nabla \rangle \vec{V} = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V} .$$

Zu h) $\text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) = \langle \nabla, \vec{V} \times \vec{W} \rangle$ (Produktregel benutzen)

$$= \underbrace{\langle \nabla, \vec{V} \times \vec{W} \rangle} - \underbrace{\langle \nabla, \vec{W} \times \vec{V} \rangle}$$

(Die 1. geschweifte Klammer bedeutet, daß ∇ nur auf \vec{V} angewendet wird, die 2. bedeutet analog, daß ∇ nur auf \vec{W} angewendet wird.)

$$= \langle \underbrace{\nabla \times \vec{V}}_1, \vec{W} \rangle - \langle \underbrace{\nabla \times \vec{W}}_2, \vec{V} \rangle \quad (\text{Eigenschaft des Spatprodukts, vgl. S.41})$$

$$= \langle \text{rot } \vec{V}, \vec{W} \rangle - \langle \text{rot } \vec{W}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{W}, \text{rot } \vec{V} \rangle - \langle \vec{V}, \text{rot } \vec{W} \rangle .$$

Zu i) $\text{rot}(\vec{V} \times \vec{W}) = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{W})$ (Produktregel benutzen)

$$= \underbrace{\nabla \times (\vec{V} \times \vec{W})} - \underbrace{\nabla \times (\vec{W} \times \vec{V})}$$

(Bedeutung der geschweiften Klammern wie oben)

$$= \langle \vec{W}, \nabla \rangle \vec{V} - \langle \nabla, \vec{V} \rangle \vec{W} - \langle \vec{V}, \nabla \rangle \vec{W} + \langle \nabla, \vec{W} \rangle \vec{V} \quad (\text{Entwicklungssatz})$$

$$= \langle \vec{W}, \nabla \rangle \vec{V} - \vec{W} \text{div } \vec{V} - \langle \vec{V}, \nabla \rangle \vec{W} + \vec{V} \text{div } \vec{W} .$$

Beispiele

$$1. \vec{V}(\vec{x}) = \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div } \vec{V}(\vec{x}) = 3 > 0 \Rightarrow \vec{V} \text{ ist Quellenfeld,}$$

$$\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{V} \text{ ist wirbelfrei.}$$

$$2. \vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div } \vec{V}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{V} \text{ ist quellenfrei,}$$

$$\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{V} \text{ ist Wirbelfeld.}$$

$$3. \vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3} \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(elektrostatische Anziehungskraft eines Elektrons).

$$\text{Es gilt: } \vec{V} = f \vec{W} \quad \text{mit } f(\vec{x}) = \frac{1}{r^3}, \quad \vec{W}(\vec{x}) = \vec{x} .$$

Also gilt nach c)

$$\text{div } \vec{V} = \text{div}(f \vec{W}) = \frac{1}{r^3} \text{div } \vec{W} + \langle \text{grad } \frac{1}{r^3}, \vec{W} \rangle .$$

$$\text{Es gilt: } \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial x} = -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{3x}{r^5} ,$$

$$\text{analog gilt: } \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial y} = -\frac{3y}{r^5} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\frac{1}{r^3})}{\partial z} = -\frac{3z}{r^5}$$

$$\Rightarrow \text{grad}(\frac{1}{r^3}) = -\frac{3}{r^5} \vec{x} .$$

Da $\text{div } \vec{W} = 3$ (vgl. Beispiel 1.), folgt insgesamt

$$\text{div } \vec{V}(\vec{x}) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \quad (\text{da } \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = |\vec{x}|^2 = r^2)$$

$\Rightarrow \vec{V}$ ist *quellenfrei* in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Nach d) gilt:

$$\text{rot } \vec{V} = \text{rot}(f\vec{W}) = \frac{1}{r^3} \text{rot } \vec{W} + \left(\text{grad } \frac{1}{r^3}\right) \times \vec{W}.$$

Da $\text{rot } \vec{W}(\vec{x}) = \vec{0}$ in \mathbb{R}^3 (vgl. Beispiel 1.) \Rightarrow

$$\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \left(\text{grad } \frac{1}{r^3}\right) \times \vec{W} = -\frac{3}{r^5}(\vec{x} \times \vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \quad (\text{da } \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0})$$

$\Rightarrow \vec{V}$ ist *wirbelfrei* in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Damit ist $\vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3}$ ein *wirbel- und quellenfreies* Feld in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Anwendung: Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten

$$\text{rot } \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0} \quad , \quad \text{rot } \vec{H} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \sigma \vec{E} = \vec{0}$$

Mit $\text{div } \vec{H} = 0 \quad \forall t \geq 0$ gehen die Maxwell'schen Gleichungen über in die partielle Differentialgleichung für \vec{H}

$$\Delta \vec{H} = (\epsilon\mu) \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + (\sigma\mu) \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

(Die Differentialoperatoren div und rot werden nur auf die Ortsvariablen \vec{x} angewendet.)

Denn: Nach g) gilt: $\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}$ (da $\text{div } \vec{H} = 0$).

Aus der 2. Maxwell'schen Gleichung folgt: $\text{rot } \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \Rightarrow$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \epsilon \frac{\partial(\text{rot } \vec{E})}{\partial t} + \sigma \text{rot } \vec{E} = -\Delta \vec{H}.$$

Aus der 1. Maxwell'schen Gleichung folgt: $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow$

$$\Delta \vec{H} = (\epsilon\mu) \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + (\sigma\mu) \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Für $\sigma = 0$ (isolierendes Medium) folgt hieraus:

$$\Delta \vec{H} = (\epsilon\mu) \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

(3-dimensionale Wellengleichung, siehe später: Kap. XV).

Ist $\text{div } \vec{E} = 0$, so folgt analog $\Delta \vec{E} = (\epsilon\mu) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + (\sigma\mu) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Kurvenintegrale

Motivation: Ein Einheitskörper durchlaufe eine Kurve K unter Einfluß eines Kraftfeldes $\vec{V}(\vec{x})$,

d.h.: in jedem Punkt $\vec{\varphi}(t)$ der Kurve K wirke die Kraft $\vec{V}(\vec{\varphi}(t))$.

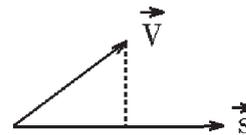
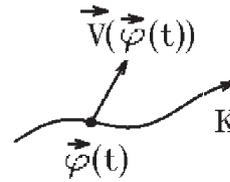
Dann wird eine *Arbeit* verrichtet, die wir bestimmen wollen.

Ist der Weg ein Stück Gerade und die

Kraft \vec{V} konstant, so erhält man

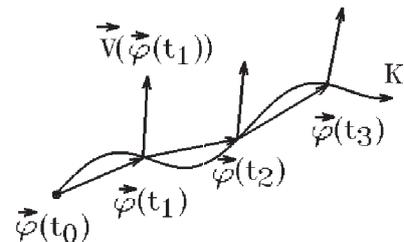
für die *Arbeit*: $A = \langle \vec{V}, \vec{s} \rangle$,

wobei \vec{V} der Kraftvektor und \vec{s} der Wegvektor ist.



Ist K eine *glatte* Kurve mit der Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, [a, b])$, so ersetzen wir wieder K durch einen Polygonzug p_m , der durch die Punkte $\vec{\varphi}(t_0), \vec{\varphi}(t_1), \dots, \vec{\varphi}(t_m)$ geht. Dann erhalten wir für die *Arbeit* den Näherungswert

$$A \approx \sum_{k=1}^m \langle \vec{V}(\vec{\varphi}(t_k)), \vec{\varphi}(t_k) - \vec{\varphi}(t_{k-1}) \rangle .$$



Nach Anwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir ähnlich wie bei der Berechnung der Bogenlänge (vgl. [S.421](#))

$$A \approx \sum_{k=1}^m \langle \vec{V}(\vec{\varphi}(t_k)), \vec{\varphi}'(t_k)(t_k - t_{k-1}) \rangle + R_m \quad \text{mit } R_m \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty .$$

Die Summe ist eine Riemannsche Summe und konvergiert für $m \rightarrow \infty$ gegen das Integral

$$A = \int_a^b \langle \vec{V}(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n V_i(\vec{\varphi}(t)) \varphi'_i(t) dt .$$

Also definieren wir dies als Kurvenintegral von \vec{V} entlang der Kurve K :

Definition 13.10 : Sei K eine durch $(\vec{\varphi}, [a, b])$ dargestellte *glatte* Kurve in \mathbb{R}^n .

Sei $\vec{V} = (V_1, \dots, V_n)^T$ ein *stetiges Vektorfeld* auf K . Dann heißt

$$\int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_K (V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \dots + V_n dx_n) = \int_a^b \langle \vec{V}(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle dt$$

das *Kurvenintegral* von \vec{V} entlang der Kurve K .

Ausgeschrieben lautet das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle &= \int_K (V_1(\vec{x})dx_1 + V_2(\vec{x})dx_2 \dots + V_n(\vec{x})dx_n) \\ &= \int_a^b \langle \vec{V}(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n V_i(\vec{\varphi}(t))\varphi'_i(t) dt \\ &= \int_a^b (V_1(\vec{\varphi}(t))\varphi'_1(t) + V_2(\vec{\varphi}(t))\varphi'_2(t) + \dots + V_n(\vec{\varphi}(t))\varphi'_n(t)) dt . \end{aligned}$$

Bemerkung :

Um also das Integral $\int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle$ zu berechnen, muß man zunächst für K eine geeignete Parameterdarstellung ($x_i = \varphi_i(t)$, $t \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$) wählen, diese Parameterdarstellung in die Koordinaten V_i des Vektorfeldes \vec{V} einsetzen, dx_i durch $dx_i = \varphi'_i(t)dt$ ersetzen und dann über den Parameterbereich integrieren.

Bemerkung :

Wie bei der Bogenlänge hängt auch der Wert des Kurvenintegrals nicht von der gewählten Parameterdarstellung ab. Dies sieht man, wenn man $\vec{\varphi}$ durch eine äquivalente Parameterdarstellung $\vec{\psi}$ ersetzt.

Der Durchlaufungssinn darf nicht verändert werden. Wird der Durchlaufungssinn umgekehrt, so erhält man ein umgekehrtes Vorzeichen.

Bemerkung :

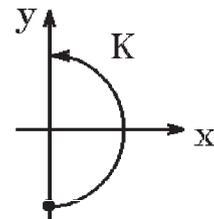
Bei *stückweise glatten* Kurven werden die Kurvenintegrale entlang der glatten Teilkurven addiert.

Beispiele

1. $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = \cos t, y = \sin t, t \in [-\pi/2, \pi/2] \right\}$ (Halbkreis),

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad x = x(t) = \cos t, \quad y = y(t) = \sin t, \quad x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t,$$

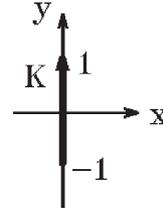
$$\begin{aligned} \int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle &= \int_K (V_1 dx + V_2 dy) \\ &= \int_K (y dx - x dy) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \cdot x'(t) - x \cdot y'(t)) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t \cdot (-\sin t) - \cos t \cdot (\cos t)) dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = -\pi . \end{aligned}$$



2.

K : Geradenstück von $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ (wie in Beispiel 1.).



Die Kurve K hat den gleichen Anfangs- und Endpunkt wie die Kurve in Beispiel 1.

Parameterdarstellung für K : $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - 1 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

oder einfacher:

$$x = 0, y = t, t \in [-1, 1] \Rightarrow dx = 0 \cdot dt, dy = 1 \cdot dt \Rightarrow$$

$$\int_K (y dx - x dy) = \int_{-1}^1 (t \cdot 0 - 0 \cdot 1) dt = \int_{-1}^1 0 dt = 0.$$

Die Beispiele 1. und 2. zeigen, daß der Wert des Kurvenintegrals (bei gleichem Vektorfeld) i.a. vom Integrationsweg abhängig ist (bei gleichem Anfangs- und Endpunkt).

Bei bestimmten Vektorfeldern ist aber das Kurvenintegral *wegunabhängig*. Diese Vektorfelder wollen wir i.f. behandeln:

Definition 13.11 : *Gradientenfeld, Potentialfeld*

Sei $\vec{V} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, M offen.

Existiert zu \vec{V} eine reellwertige Funktion $u : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u \in C^1(M)$ und

$$\vec{V}(\vec{x}) = \text{grad } u(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M$$

so heißt \vec{V} ein *Potentialfeld* (oder *Gradientenfeld*) in M und die Funktion u ein Potential von \vec{V} .

Beispiele

1. $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Es gilt mit $u(\vec{x}) = \frac{r^2}{2}$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\text{grad } u(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{V}$ ist ein Potentialfeld in \mathbb{R}^3 mit dem Potential $u(\vec{x}) = \frac{r^2}{2}$.

Denn: $u_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(r^2)}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} = x$, analog $u_y = y$, $u_z = z$

$\Rightarrow \text{grad } u(x, y, z) = (x, y, z)^T = \vec{x} = \vec{V}(\vec{x})$ in \mathbb{R}^3 .

$$2. \vec{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x > 0 \right\}.$$

Für $u(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ gilt in M : $\text{grad } u(x, y) = \vec{V}(x, y) \Rightarrow \vec{V}$ ist Potentialfeld in M mit dem Potential $u(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, denn in M gilt:

$$u_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = V_1(x, y), \quad u_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = V_2(x, y).$$

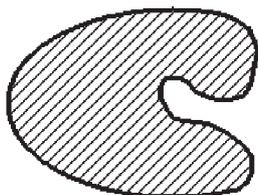
Da in \mathbb{R}^3 gilt: $\text{rot}(\text{grad } u(\vec{x})) = \vec{0}$ (vgl. Satz 13.9 f), S.427), gilt also für ein Potentialfeld \vec{V} : $\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \vec{0}$ (Potentialfeld ist wirbelfrei).

Unter gewissen Voraussetzungen an den Definitionsbereich von \vec{V} gilt auch die Umkehrung dieser Aussage. Um das zu zeigen, benötigen wir zunächst die folgenden Definitionen:

Definition 13.12 : *Gebiet*

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet* $\Leftrightarrow M$ ist *offen* und *zusammenhängend*.

D.h.: M besitzt keine Randpunkte und je zwei Punkte von M lassen sich in M durch einen Polygonzug verbinden.



zusammenhängend



nicht zusammenhängend

Definition 13.13 : *einfach zusammenhängendes Gebiet*

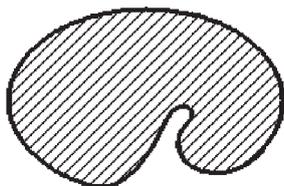
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängendes Gebiet*

$\Leftrightarrow M$ ist *Gebiet* und *einfach zusammenhängend*.

Hierbei heißt M *einfach zusammenhängend*, wenn sich jede geschlossene Kurve in M auf einen Punkt in M zusammenziehen läßt.

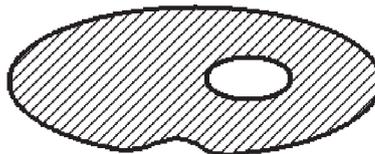
Beispiele

1.



einfach zusammenhängend

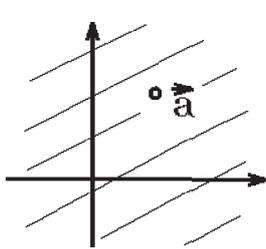
2.



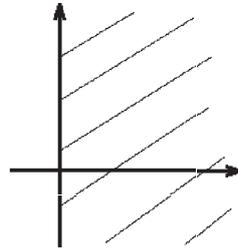
nicht einfach zusammenhängend

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{a}\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

4. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \right\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet.



$\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{a}\}$



$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

5. $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{a}\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet.

6. $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Gerade}\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

7. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z > 0 \right\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet.

Für einfach zusammenhängende Gebiete gilt nun folgender Satz:

Satz 13.14 :

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(M)$. Dann gilt:

$$\vec{V} \text{ ist Potentialfeld in } M \Leftrightarrow \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y} \text{ in } M \quad (\text{einf. zushg. Gebiet})$$

b) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(M)$. Dann gilt:

$$\vec{V} \text{ ist Potentialfeld in } M \Leftrightarrow \text{rot } \vec{V} = \vec{0} \text{ in } M \quad (\text{einf. zushg. Gebiet})$$

Bemerkung :

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{3y} = V_{2z} \\ V_{1z} = V_{3x} \\ V_{2x} = V_{1y} \end{cases}$$

Ist $V_3 \equiv 0$ und V_1, V_2 unabhängig von z , so bleibt nur die Gleichung $V_{2x} = V_{1y}$ übrig. $\text{rot } \vec{V}$ reduziert sich also in \mathbb{R}^2 auf die Gleichung $V_{2x} = V_{1y}$.

Bemerkung : $V_{2x} = V_{1y}$ bzw. $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ heißen auch *Integrabilitätsbedingungen*.

Beweis : zu Satz 13.14

Wir machen einen konstruktiven Beweis für den Spezialfall, daß $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader mit achsenparallelen Seiten ist.

Sei $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in M$ fest und $\vec{x} = (x, y, z)^T \in M$ beliebig. Wir berechnen das Kurvenintegral von \vec{V} entlang des folgenden Weges von \vec{x}_0 nach \vec{x} :

$K = K_1 + K_2 + K_3$ mit

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} : x_0 \leq t \leq x \right\}$$

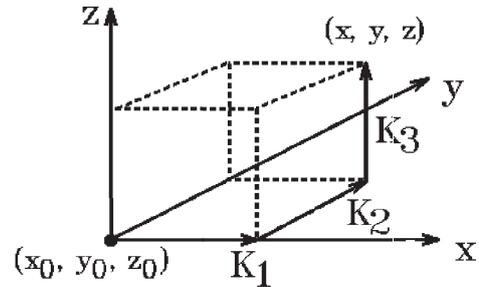
$$\Rightarrow dx = dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0,$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \\ z_0 \end{pmatrix} : y_0 \leq t \leq y \right\}$$

$$\Rightarrow dx = 0, \quad dy = dt, \quad dz = 0,$$

$$K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} : z_0 \leq t \leq z \right\}$$

$$\Rightarrow dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt.$$



Dann erhalten wir für das Kurvenintegral von \vec{V} entlang K :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_K (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) \\ &= \int_{K_1} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) + \int_{K_2} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) + \int_{K_3} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) \\ &= \int_{x_0}^x V_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y V_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z V_3(x, y, t) dt. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß diese Funktion u Potential von \vec{V} ist, falls $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ in M gilt:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= V_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y V_{2x}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z V_{3x}(x, y, t) dt \\ &= V_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y V_{1y}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z V_{1z}(x, y, t) dt \quad (\text{da } V_{2x} = V_{1y} \text{ und } V_{3x} = V_{1z}) \\ &= V_1(x, y_0, z_0) + V_1(x, y, z_0) - V_1(x, y_0, z_0) + V_1(x, y, z) - V_1(x, y, z_0) \\ &\Rightarrow u_x(x, y, z) = V_1(x, y, z) \quad \forall \vec{x} \in M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y, z) &= V_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z V_{3y}(x, y, t) dt = V_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z V_{2z}(x, y, t) dt \\ &\quad (\text{da } V_{3y} = V_{2z}) \\ &= V_2(x, y, z_0) + V_2(x, y, z) - V_2(x, y, z_0) = V_2(x, y, z) \quad \forall \vec{x} \in M. \end{aligned}$$

$$u_z(x, y, z) = V_3(x, y, z) \quad \forall \vec{x} \in M$$

$\Rightarrow \text{grad } u(\vec{x}) = \vec{V}(\vec{x})$ in M . Also ist folgende Funktion u Potential von \vec{V} in M :

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x V_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y V_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z V_3(x, y, t) dt$$

Beweis für allgemeines einfach zusammenhängendes Gebiet siehe Literatur.

Beispiel

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2ye^z \\ y^2e^z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also } V_1(x, y, z) = 2xy, \quad V_2(x, y, z) = x^2 + 2ye^z, \quad V_3(x, y, z) = y^2e^z.$$

$$\text{rot } \vec{V}(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + 2ye^z & y^2e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ye^z - 2ye^z \\ 0 - 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

\mathbb{R}^3 ist einfach zusammenhängendes Gebiet \Rightarrow existiert für \vec{V} ein Potential u in \mathbb{R}^3 mit (wir wählen $\vec{x}_0 = \vec{0} \in M = \mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x V_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y V_2(x, t, 0) dt + \int_0^z V_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y (x^2 + 2t) dt + \int_0^z y^2 e^t dt = x^2y + y^2 + y^2e^z - y^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = x^2y + y^2e^z + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

2. Berechnungsmöglichkeit

Es muß gelten: $u_x(x, y, z) = V_1(x, y, z) \Rightarrow$

$$u(x, y, z) = \int V_1(x, y, z) dx + h(y, z) = F(x, y, z) + h(y, z)$$

(Integrationskonstante hängt von y und z ab).

Nun muß noch die unbekannte Funktion h bestimmt werden. Es muß gelten:

$$u_y(x, y, z) = V_2(x, y, z) \Rightarrow u_y(x, y, z) = F_y(x, y, z) + h_y(y, z) = V_2(x, y, z)$$

$$\Rightarrow h_y(y, z) = V_2(x, y, z) - F_y(x, y, z) = G(y, z) \Rightarrow$$

$$h(y, z) = \int G(y, z) dy + g(z) = H(y, z) + g(z) \quad (\text{Integrationskonstante hängt von } z \text{ ab})$$

Nun muß noch die unbekannte Funktion g bestimmt werden. Es muß gelten:

$$u_z(x, y, z) = V_3(x, y, z) \Rightarrow u_z(x, y, z) = F_z(x, y, z) + H_z(y, z) + g'(z) = V_3(x, y, z).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Funktion g bestimmen.

Beispiel hierzu:

$$\vec{V}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2ye^z, y^2e^z)^T.$$

$$u(x, y, z) = \int V_1(x, y, z) dx + h(y, z) = \int 2xy dx + h(y, z) = x^2y + h(y, z),$$

$$u_y(x, y, z) = x^2 + h_y(y, z) = V_2(x, y, z) = x^2 + 2ye^z \Rightarrow h_y(y, z) = 2ye^z$$

$$\Rightarrow h(y, z) = \int 2ye^z dy + g(z) = y^2e^z + g(z)$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = x^2y + y^2e^z + g(z),$$

$$u_z(x, y, z) = y^2e^z + g'(z) = V_3(x, y, z) = y^2e^z \Rightarrow g'(z) = 0 \Rightarrow g(z) = c$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = x^2y + y^2e^z + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

3. Berechnungsmöglichkeit

Es muß gelten:

$$u_x(x, y, z) = V_1(x, y, z) \Rightarrow u(x, y, z) = \int V_1(x, y, z) dx + h_1(y, z),$$

$$u_y(x, y, z) = V_2(x, y, z) \Rightarrow u(x, y, z) = \int V_2(x, y, z) dy + h_2(x, z),$$

$$u_z(x, y, z) = V_3(x, y, z) \Rightarrow u(x, y, z) = \int V_3(x, y, z) dz + h_3(x, y)$$

mit den unbekanntenen Funktionen h_1, h_2, h_3 .

Alle Terme des Potentials u , die von x, y oder z abhängig sind, müssen in einer der 3 Gleichungen auftreten, denn:

Annahme: Es fehlt ein von x abhängiger Term. Dieser Term steckt nicht in der unbekanntenen Funktion $h_1(y, z)$, da diese von x unabhängig ist. Also muß dieser Term in der 1. Gleichung auftreten. Analog Terme, die von y oder z abhängig sind.

Beispiel hierzu:

$$\vec{V}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2ye^z, y^2e^z)^T,$$

$$u(x, y, z) = \int 2xy dx + h_1(y, z) = x^2y + h_1(y, z),$$

$$u(x, y, z) = \int (x^2 + 2ye^z) dy + h_2(x, z) = x^2y + y^2e^z + h_2(x, z),$$

$$u(x, y, z) = \int y^2e^z dz + h_3(x, y) = y^2e^z + h_3(x, y)$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = x^2y + y^2e^z + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

Weitere Beispiele

$$1. \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow V_{2x} = 0 = V_{1y} \text{ in } \mathbb{R}^2,$$

\mathbb{R}^2 ist einfach zusammenhängendes Gebiet $\Rightarrow \vec{V}$ besitzt in \mathbb{R}^2 ein Potential u mit

$$u_x(x, y) = V_1(x, y) = x \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + h_1(y),$$

$$u_y(x, y) = V_2(x, y) = y \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + h_2(x)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

$$2. \vec{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T,$$

$$V_{2x}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad V_{1y}(x, y) = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow V_{2x}(x, y) = V_{1y}(x, y) \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\},$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

Aber z.B. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \right\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet mit $V_{2x}(x, y) = V_{1y}(x, y) \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M$. Also besitzt \vec{V} in M ein Potential u :

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow u(x, y) = \int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + h_1(y) \\ &= -y \cdot \frac{1}{y} \arctan \frac{x}{y} + h_1(y) = \arctan \frac{y}{x} + \tilde{h}_1(y) \quad (\text{da } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{konst}), \\ u_y(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow u(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + h_2(x) \\ \Rightarrow u(x, y) &= x \cdot \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} + h_2(x) = \arctan \frac{y}{x} + h_2(x) \\ \Rightarrow u(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential von } \vec{V} \text{ in } M. \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ existiert *kein* Potential.

3. $\vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$

rot $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{0}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ (vgl. Beispiel 3., S.428/429),

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet mit rot $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}$ besitzt in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ein Potential u :

$$u_x(x, y, z) = \frac{x}{r^3} \Rightarrow u(x, y, z) = \int \frac{x}{r^3} dx + h_1(y, z) = -\frac{1}{r} + h_1(y, z)$$

$$(\text{da } \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}).$$

Analog erhalten wir

$$u_y(x, y, z) = \frac{y}{r^3} \Rightarrow u(x, y, z) = \int \frac{y}{r^3} dy + h_2(x, z) = -\frac{1}{r} + h_2(x, z),$$

$$u_z(x, y, z) = \frac{z}{r^3} \Rightarrow u(x, y, z) = \int \frac{z}{r^3} dz + h_3(x, y) = -\frac{1}{r} + h_3(x, y)$$

$$\Rightarrow u(x, y, z) = -\frac{1}{r} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

Führt man eine Translation um $(-\vec{a}) \in \mathbb{R}^3$ durch, so erhält man analog (da die Ableitungen von \vec{a} gleich 0 sind):

$$\vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3} = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{r^3}, \quad r = |\vec{x} - \vec{a}|, \text{ ist Potentialfeld in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{a}\} \text{ mit dem allgemeinen Potential } u(\vec{x}) = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nun gilt für Potentialfelder in einem einfach zusammenhängenden Gebiet die wichtige Eigenschaft, daß das Kurvenintegral von \vec{V} längs einer Kurve $K(P_1, P_2)$ von P_1 nach P_2 *wegunabhängig* ist mit $\int_{K(P_1, P_2)} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = u(P_2) - u(P_1)$ (Potentialdifferenz),

wenn u ein Potential von \vec{V} in M , also $\text{grad } u = \vec{V}$ in M ist. Dies wird im nächsten Satz gezeigt:

Satz 13.15 : *Wegunabhängigkeit*

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, M einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(M)$. Dann gilt:

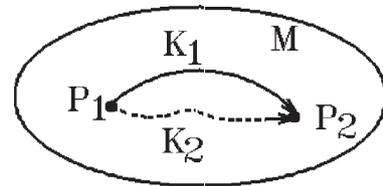
$$\vec{V} \text{ ist Potentialfeld in } M \Leftrightarrow \text{Das Kurvenintegral von } \vec{V} \text{ ist wegunabhängig in } M$$

In diesem Fall gilt, falls u Potential von \vec{V} :

$$\int_{K(P_1, P_2)} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = u(P_2) - u(P_1)$$

Ist K eine geschlossene Kurve, so gilt: $\int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = 0$.

Hierbei verstehen wir unter "wegunabhängig", daß das Kurvenintegral entlang aller Kurven gleich ist, die zwei gegebene Punkte $P_1, P_2 \in M$ in M verbinden.



Beweis :

" \Rightarrow " : $\text{grad } u = \vec{V}$ in M , $K(P_1, P_2)$ werde durch $(\vec{\varphi}, [a, b])$ dargestellt \Rightarrow

$$\int_{K(P_1, P_2)} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_a^b \langle \vec{V}(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \text{grad } u(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle dt$$

$$= \int_a^b \frac{du}{dt}(\vec{\varphi}(t)) dt = u(\vec{\varphi}(b)) - u(\vec{\varphi}(a)) = u(P_2) - u(P_1).$$

(Kettenregel)

" \Leftarrow " : siehe Literatur.

Bemerkung :

Da man im Falle eines *Potentialfeldes* (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) mit Hilfe des *Potentials* das Kurvenintegral berechnen kann, heißen die Bedingungen $V_{2x} = V_{1y}$ (in \mathbb{R}^2) bzw. $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ (in \mathbb{R}^3) *Integrabilitätsbedingungen*.

Beispiele

1. $\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ in \mathbb{R}^3
 \Rightarrow existiert Potential $u(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c$ in \mathbb{R}^3 .

a) Sei K eine Kurve von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, so gilt

$$\int_K (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) = u(1, 1, 2) - u(1, 0, 1) = 3 - 1 = 2.$$

b) Sei K geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \int_K (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) = 0.$

2.

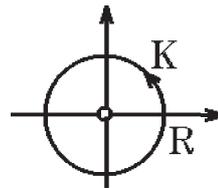
$$\vec{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T \Rightarrow V_{2x} = V_{1y} \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \quad (\text{vgl. S.437}).$$

a) Sei $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$
(Kreis um $\vec{0}$ mit Radius R , positiv orientiert)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_K (V_1 dx + V_2 dy) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2} \cdot (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} \cdot (R \cos t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

K ist geschlossen, aber \vec{V} besitzt im Innern von K eine *Singularität*.

K liegt nicht in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, in dem die Integrierbarkeitsbedingung erfüllt ist.

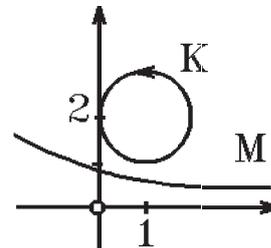


b) Sei $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 1 + \cos t, y = 2 + \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$
(Kreis um $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Radius 1, positiv orientiert).

K ist geschlossen und liegt in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $M \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

Die *Singularität* von \vec{V} liegt im Äußeren von K .

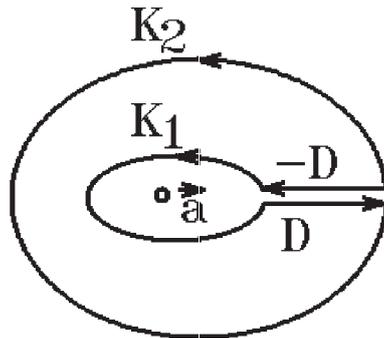
$$\Rightarrow \int_K (V_1 dx + V_2 dy) = 0.$$



Für Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven in \mathbb{R}^2 , die im Innern eine Singularität von \vec{V} besitzen, gilt folgender Satz:

Satz 13.16 : Sei $M \subset \mathbb{R}^2$, M einfach zusammenhängendes Gebiet, $\vec{a} \in M$, $\vec{V} : M \setminus \{\vec{a}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(M \setminus \{\vec{a}\})$. Für \vec{V} gelte in $M \setminus \{\vec{a}\}$ die Integrabilitätsbedingung $V_{2x} = V_{1y}$. Seien K_1 und K_2 zwei geschlossene stückweise glatte, positiv orientierte Jordan-Kurven in $M \setminus \{\vec{a}\}$ mit \vec{a} im Inneren von K_1 und K_2 , dann gilt:

$$\int_{K_1} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_{K_2} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle .$$



Beweis :

Wir verbinden die Kurven K_1 und K_2 durch eine Kurve D (schneiden also die Menge M an dieser Kurve auf) und integrieren dann über die geschlossene Kurve K mit $K = K_1 + D - K_2 - D$. Diese geschlossene Kurve K liegt samt ihrem Inneren ganz in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset M \setminus \{\vec{a}\}$ (die Singularität \vec{a} liegt im Äußeren von K). Da die Kurvenintegrale längs D und $-D$ sich wegheben und das Kurvenintegral längs $-K_2$ nur ein anderes Vorzeichen hat als das Kurvenintegral längs K_2 , folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_{K_1 + D - K_2 - D} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle \\ &= \int_{K_1} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle + \int_D \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle - \int_{K_2} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle - \int_D \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle \\ &= \int_{K_1} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle - \int_{K_2} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle \\ &\Rightarrow \int_{K_1} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_{K_2} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle . \end{aligned}$$

Hierbei heißt "positiv orientiert":

Definition 13.17 : Eine geschlossene Jordan-Kurve heißt *positiv orientiert*, wenn das Innere der Kurve zur Linken liegt.



positiv orientiert



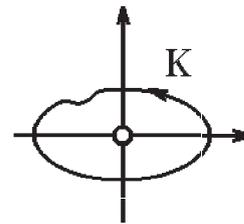
negativ orientiert

Beispiel

$$\vec{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T \Rightarrow V_{2x} = V_{1y} \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \quad (\text{vgl. S.440}).$$

$\int_K (V_1 dx + V_2 dy) = 2\pi$ für alle geschlossenen, stückweise glatten, positiv orientierten Jordan-Kurven, die den Nullpunkt enthalten.

Denn: $\int_{K_R(0)} (V_1 dx + V_2 dy) = 2\pi$ (vgl. S.440).

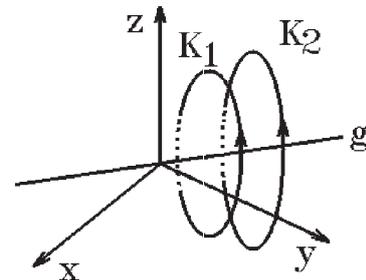


Bemerkung :

Ein analoger Satz gilt in \mathbb{R}^3 , falls für \vec{V} in $M \setminus \{\text{Gerade}\}$ gilt: $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ (M einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{R}^3).

Dann ist der Wert des Kurvenintegrals für jede geschlossene, stückweise glatte, gleich-orientierte Jordan-Kurve, die einmal um diese Gerade verläuft, gleich.

$$\int_{K_1} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_{K_2} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle .$$



Definition 13.18 : solenoidal

Ein Vektorfeld $\vec{V} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *solenoidal* in M , wenn ein Vektorfeld \vec{W} in M existiert mit

$$\vec{V}(\vec{x}) = \text{rot } \vec{W}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in M$$

\vec{W} heißt dann *Vektorpotential* von \vec{V} in M .

Satz 13.19 : Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ *sternförmig* (d.h. es existiert ein Punkt $\vec{x}_0 \in M$, der sich in M mit allen anderen Punkten $\vec{x} \in M$ geradlinig verbinden läßt).

Sei $\vec{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(M)$. Dann gilt:

$$\vec{V} \text{ ist solenoidal in } M \Leftrightarrow \text{div } \vec{V} = 0 \text{ in } M$$

Beweis :

” \Rightarrow ”: $\vec{V} = \text{rot } \vec{W}$ in $M \Rightarrow \text{div } \vec{V} = \text{div}(\text{rot } \vec{W}) = 0$ in M (vgl. S.427).

” \Leftarrow ”: siehe Literatur.

Bemerkung : *solenoidal $\hat{=}$ quellenfrei*

Konstruktion eines Vektorpotentials

$$\text{rot } \vec{W} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} W_{3y} - W_{2z} = V_1 \\ W_{1z} - W_{3x} = V_2 \\ W_{2x} - W_{1y} = V_3 \end{cases}$$

Man kann eine Koordinate von \vec{W} gleich 0 setzen, z.B.: setze $W_3 = 0 \Rightarrow W_{1z} = V_2, W_{2z} = -V_1, W_{2x} - W_{1y} = V_3 \Rightarrow$

$$W_1 = \int V_2 dz + h_1(x, y), \quad W_2 = - \int V_1 dz + h_2(x, y).$$

Man kann $h_1(x, y)$ oder $h_2(x, y)$ gleich 0 setzen, z.B.: setze $h_2(x, y) = 0$.
Aus der letzten Gleichung $W_{2x} - W_{1y} = V_3$ erhält man dann $h_1(x, y)$.

Beispiel

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div } \vec{V} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

\mathbb{R}^3 ist sternförmig \Rightarrow existiert Vektorpotential in \mathbb{R}^3 .

Setze $W_3 = 0 \Rightarrow$

$$W_1(x, y, z) = \int V_2(x, y, z) dz + h_1(x, y) = \int x dz + h_1(x, y) = xz + h_1(x, y),$$

$$W_2(x, y, z) = - \int V_1(x, y, z) dz + h_2(x, y) = - \int z dz + h_2(x, y) = -\frac{z^2}{2} + h_2(x, y).$$

$$\text{Setze } h_2(x, y) = 0 \Rightarrow W_2(x, y, z) = -\frac{z^2}{2}.$$

$$W_{2x} - W_{1y} = V_3 \Rightarrow -h_{1y} = y \Rightarrow h_1(x, y) = - \int y dy + g(x) = -\frac{y^2}{2} + g(x).$$

$$\text{Setze } g(x) = 0 \Rightarrow W_1(x, y, z) = xz - \frac{y^2}{2}$$

$\Rightarrow \vec{W}(x, y, z) = \left(xz - \frac{y^2}{2}, -\frac{z^2}{2}, 0\right)^T$ ist Vektorpotential von \vec{V} in \mathbb{R}^3 , d.h. es gilt: $\text{rot } \vec{W} = \vec{V}$ in \mathbb{R}^3 .

Da $\text{rot}(\text{grad } u) = \vec{0}$ für $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ (vgl. S.427) \Rightarrow

$\Rightarrow \vec{W}(x, y, z) = \left(xz - \frac{y^2}{2}, -\frac{z^2}{2}, 0\right)^T + \text{grad } u, u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, ist allgemeines Vektorpotential von \vec{V} in \mathbb{R}^3 .

Man könnte in diesem Beispiel auch anders vorgehen, um ein Vektorpotential von \vec{V} zu bestimmen:

$$W_{3y} - W_{2z} = V_1 = z \Rightarrow W_2 = -\frac{z^2}{2}, \text{ falls } W_3 \text{ unabhängig von } y,$$

$$W_{1z} - W_{3x} = V_2 = x \Rightarrow W_3 = -\frac{x^2}{2}, \text{ falls } W_1 \text{ unabhängig von } z,$$

$$W_{2x} - W_{1y} = V_3 = y \Rightarrow W_1 = -\frac{y^2}{2}, \text{ falls } W_2 \text{ unabhängig von } x.$$

Die obigen Bedingungen sind alle erfüllt, also gilt:

$$\vec{W}(x, y, z) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix} \text{ ist Vektorpotential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \vec{W}(x, y, z) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix} + \text{grad } u, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^3), \text{ ist allgemeines Vektorpotential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

Flächen in \mathbb{R}^3 , Flächenintegrale

Definition 13.20 : *Fläche in \mathbb{R}^3*

Sei $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \\ \varphi_3(u, v) \end{pmatrix}$, so heißt die Punktmenge

$$F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \vec{\varphi}(u, v), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v), z = \varphi_3(u, v), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D \right\}$$

eine *Fläche* in \mathbb{R}^3 . $(\vec{\varphi}, D)$ heißt *Parameterdarstellung* von F und D heißt *Parameterbereich*.

Definition 13.21 : *glatte Fläche*

Sei $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \vec{\varphi}(u, v), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D \right\}$ eine

Fläche in \mathbb{R}^3 . Ist $\vec{\varphi} \in C^1(D)$ und gilt $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \neq \vec{0}$ in D (d.h. $\vec{\varphi}_u$ und $\vec{\varphi}_v$ sind linear unabhängig in D), so heißt F eine *glatte Fläche*.

Im folgenden betrachten wir nur noch *glatte Flächen*, wir lassen also i.f. den Zusatz "glatte" oft weg.

Beispiele

$$1. F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = \psi(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\} \text{ mit } \psi \in C^1(D) \Rightarrow$$

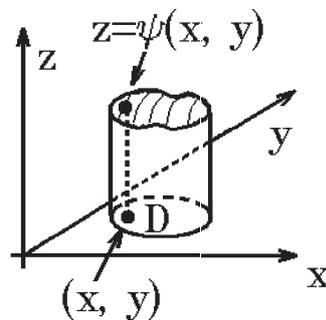
$$\vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D,$$

ist Parameterdarstellung von F mit

$$\vec{\varphi}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \psi_x \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \psi_y \end{pmatrix},$$

$$\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} -\psi_x \\ -\psi_y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

$$|\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y| = \sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2}$$



Beispiel hierzu

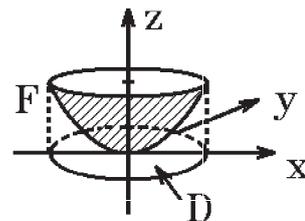
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

(Paraboloidfläche)

$$\Rightarrow \vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$\vec{\varphi}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

$$|\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}.$$



2. Kugelfläche

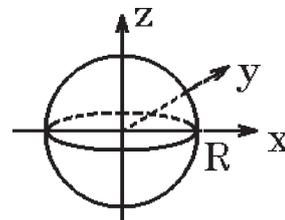
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$$

Parameterdarstellung in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\varphi}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \psi \\ R \sin \varphi \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix},$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\vec{\varphi}_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \psi \\ R \cos \varphi \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\varphi}_\psi = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \psi \\ -R \sin \varphi \sin \psi \\ R \cos \psi \end{pmatrix},$$



$$\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi = \begin{pmatrix} R^2 \cos \varphi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \varphi \cos^2 \psi \\ R^2 \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix} = R \cos \psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{für } -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},$$

$$|\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi| = R^2 \cos \psi$$

3. Zylindermantel

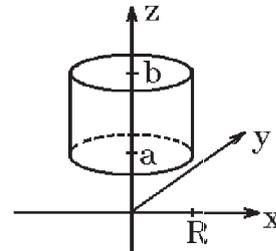
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, a \leq z \leq b \right\}$$

Parameterdarstellung in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\varphi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad a \leq z \leq b,$$

$$\vec{\varphi}_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

$$|\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z| = R$$

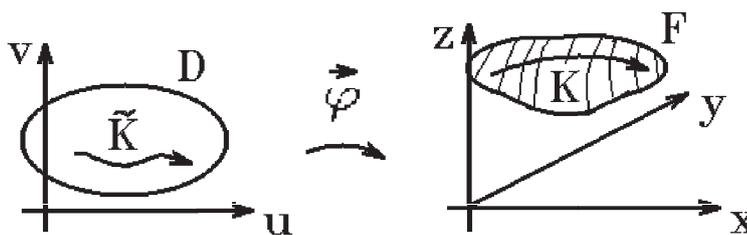


Flächenkurven, Tangentialebenen, Normalenvektoren

Satz 13.22 : Sei F eine durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte glatte Fläche in \mathbb{R}^3 .

Sei \tilde{K} eine durch $(\vec{\psi}, [a, b])$ dargestellte glatte Kurve in D .

Dann stellt $(\vec{\varphi}(\vec{\psi}(t)), [a, b])$ eine glatte Kurve K in \mathbb{R}^3 dar, die ganz auf der Fläche F verläuft.



Beweis :

$$\text{Sei } \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_u = \begin{pmatrix} \varphi_{1u} \\ \varphi_{2u} \\ \varphi_{3u} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \varphi_{1v} \\ \varphi_{2v} \\ \varphi_{3v} \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\varphi}(\psi_1(t), \psi_2(t))) = \vec{\varphi}_u(\vec{\psi}(t)) \cdot \psi_1'(t) + \vec{\varphi}_v(\vec{\psi}(t)) \cdot \psi_2'(t).$$

Da \tilde{K} glatt $\Rightarrow (\psi'_1(t), \psi'_2(t)) \neq (0, 0)$.

Da $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v$ sind linear unabhängig in D

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{\varphi}(\vec{\psi}(t))) \neq \vec{0} \Rightarrow K$ ist glatte Kurve, die ganz in F verläuft.

Der Tangentenvektor im Punkte $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ an die Kurve K , die ganz in F verläuft, ist also Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{\varphi}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{\varphi}_v(u_0, v_0)$. Diese beiden Vektoren spannen also die *Tangentialebene* im Punkte $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ an die durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte Fläche F auf. Deshalb definieren wir:

Definition 13.23 : *Tangentialebene*

Sei F eine durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte glatte Fläche in \mathbb{R}^3 . Sei $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ ein Punkt von F . Die Ebene, die durch die Vektoren

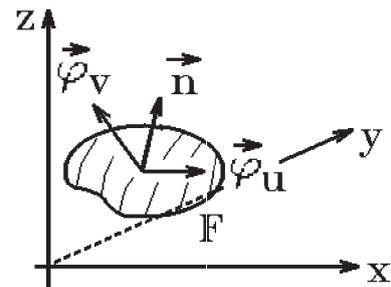
$$\vec{\varphi}_u(u_0, v_0) \text{ und } \vec{\varphi}_v(u_0, v_0)$$

aufgespannt wird, heißt *Tangentialebene* im Punkte $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ an die Fläche F .

Die Gleichung der Tangentialebene lautet:

$$E_{\vec{\varphi}(u_0, v_0)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \vec{\varphi}(u_0, v_0) + \lambda \vec{\varphi}_u(u_0, v_0) + \mu \vec{\varphi}_v(u_0, v_0) \text{ , } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Der Vektor $\vec{\varphi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\varphi}_v(u_0, v_0)$ steht senkrecht auf $\vec{\varphi}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{\varphi}_v(u_0, v_0)$, also senkrecht auf der Tangentialebene $E_{\vec{\varphi}(u_0, v_0)}$. Er wird (nach Normierung) *Normalenvektor* genannt.



Definition 13.24 : *Normalenvektor*

Sei F eine durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte glatte Fläche in \mathbb{R}^3 . Der Vektor

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \frac{\vec{\varphi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\varphi}_v(u_0, v_0)}{|\vec{\varphi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\varphi}_v(u_0, v_0)|}$$

heißt *Normalenvektor* von F an der Stelle $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$.

Die Gleichung der Normalen an der Stelle $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ lautet

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(u_0, v_0) + \lambda \vec{n}(u_0, v_0) \text{ , } \lambda \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $\vec{\varphi}(u_0, v_0)$ lautet in Hessescher Normalform

$$\langle \vec{x}, \vec{n}(u_0, v_0) \rangle = \langle \vec{\varphi}(u_0, v_0), \vec{n}(u_0, v_0) \rangle$$

Beispiele (vgl. Beispiele S.445/446)

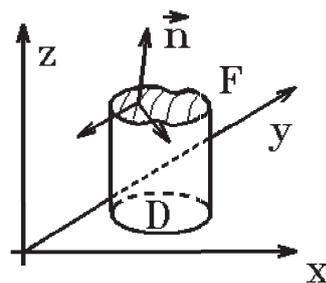
$$1. F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = \psi(x, y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\}$$

$$\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} -\psi_x \\ -\psi_y \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y| = \sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2},$$

$$\vec{n}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2}} \begin{pmatrix} -\psi_x \\ -\psi_y \\ 1 \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)},$$

$\vec{n}(x_0, y_0)$ weist nach oben, da die z -Koordinate > 0 ist.



Beispiel hierzu

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

(Paraboloidmantelfläche)

$$\vec{n}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{4(x_0^2 + y_0^2) + 1}} \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Tangentialebene:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow -2x_0x - 2y_0y + z = -2x_0^2 - 2y_0^2 + x_0^2 + y_0^2$$

$$\Rightarrow 2x_0x + 2y_0y - z = x_0^2 + y_0^2.$$

2. *Kugelfläche*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$$

$$\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi = R \cos \psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \psi \\ R \sin \varphi \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix},$$

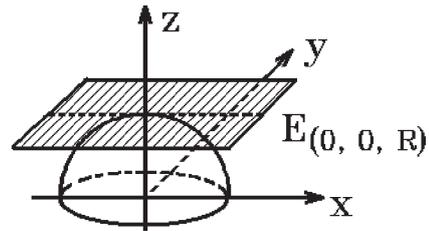
$$|\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi| = R^2 \cos \psi \Rightarrow \vec{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

Tangentialebene in $(x_0, y_0, z_0)^T$ mit $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2,$$

$$\text{z.B.: } x_0 = y_0 = 0, z_0 = R \Rightarrow z = R.$$



3. Zylindermantel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, a \leq z \leq b \right\}$$

$$\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z| = R \Rightarrow \vec{n}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Tangentialebene: } x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2 = R^2.$$

4. Ist die Fläche F in \mathbb{R}^3 durch die Gleichung

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0 \right\}$$

gegeben (also als Nullstellenmenge der Funktion F), so gilt:

$\text{grad } F(x, y, z) \perp$ auf der Tangentialebene im Punkt $(x, y, z)^T$ mit $F(x, y, z) = 0$, also

$$\text{grad } F(x, y, z) \text{ zeigt in Richtung der Normalen}$$

Denn: Sei $(\vec{\varphi}, D)$ eine Parameterdarstellung von F , so gilt

$$F(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = F_x \cdot \varphi_{1u} + F_y \cdot \varphi_{2u} + F_z \cdot \varphi_{3u} = \langle \text{grad } F, \vec{\varphi}_u \rangle = 0.$$

$$\text{Analog gilt: } \langle \text{grad } F, \vec{\varphi}_v \rangle = 0 \Rightarrow \text{grad } F \perp \vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v$$

$$\Rightarrow \text{grad } F \perp \text{Tangentialebene.}$$

Beispiele hierzu (vgl. Beispiele [S.448/449](#))

a) Paraboloidmantel: $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0,$

$$\text{grad } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

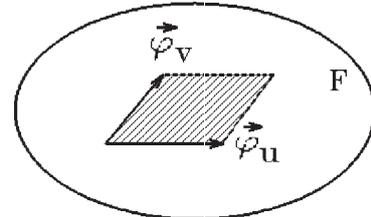
b) Kugeloberfläche: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$

$$\text{grad } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(x, y, z) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

c) Zylindermantel: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$,
 $\text{grad } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}(x, y, z) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} .$

Inhalt von Flächen

Wollen wir den *Inhalt* einer in \mathbb{R}^3 durch die Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, D)$ gegebenen glatte Fläche F bestimmen, so ist es sinnvoll, folgendermaßen vorzugehen:



Bestimmt man an der Stelle $\vec{\varphi}(u, v)$ den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{\varphi}_u$ und $\vec{\varphi}_v$ gebildeten Stückes der

Tangentialebene, so erhält man: $|\vec{\varphi}_u(u, v) \times \vec{\varphi}_v(u, v)|$.

Addiert man über endlich viele solcher Stücke von Tangentialebenen und geht dann zum Grenzwert über, so erhält man: $\int_D |\vec{\varphi}_u(u, v) \times \vec{\varphi}_v(u, v)| d(u, v)$.

Also definieren wir:

Definition 13.25 : Flächeninhalt

Sei F eine durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte glatte Fläche in \mathbb{R}^3 .

Dann heißt der Wert des Integrals

$$\int_F d\sigma = \int_D |\vec{\varphi}_u(u, v) \times \vec{\varphi}_v(u, v)| d(u, v)$$

der *Flächeninhalt* der Fläche F .

$$d\sigma = |\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v| d(u, v)$$

heißt das *Flächenelement*.

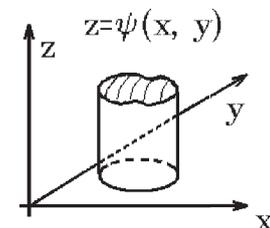
Bemerkung : Tangentialebene, Normalenvektor und Flächeninhalt sind unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung.

Beispiele (vgl. Beispiele [S.445/446](#))

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = \psi(x, y) , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\}$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2} d(x, y) \quad (\text{Flächenelement})$$

$$\Rightarrow \int_F d\sigma = \int_D \sqrt{1 + \psi_x^2 + \psi_y^2} d(x, y) \quad (\text{Flächeninhalt}).$$



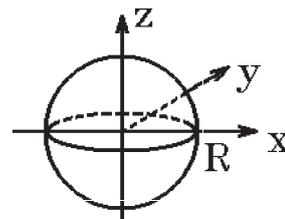
Beispiel hierzu

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \quad (\text{Paraboloidmantelfläche})$$

$$\begin{aligned} \int_F d\sigma &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{4(x^2+y^2)+1} d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{4r^2+1} d\varphi dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{12} (4r^2+1)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{6} (\sqrt{5}^3 - 1). \end{aligned}$$

2. *Kugelfläche*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$$

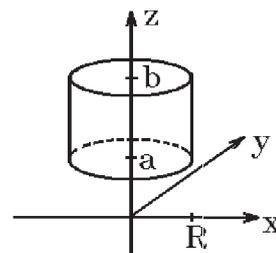


$$\boxed{d\sigma = R^2 \cos \psi d(\varphi, \psi)} \quad (\text{Flächenelement})$$

$$\int_F d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos \psi d\psi d\varphi = 2\pi R^2 \cdot 2 \sin \psi \Big|_0^{\pi/2} = 4\pi R^2 \quad (\text{Kugeloberfläche}).$$

3. *Zylindermantel*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, a \leq z \leq b \right\}$$

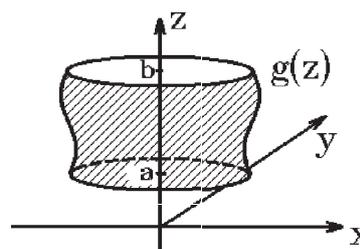


$$\boxed{d\sigma = R d(\varphi, z)} \quad (\text{Flächenelement})$$

$$\int_F d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_a^b R dz d\varphi = 2\pi R(b-a) \quad (\text{Zylindermantel}).$$

4. *Mantelfläche eines Rotationskörpers*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, x^2 + y^2 = g^2(z) \right\}$$



Parameterdarstellung:

$$\vec{\varphi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} g(z) \cos \varphi \\ g(z) \sin \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq z \leq b,$$

$$\vec{\varphi}_\varphi = \begin{pmatrix} -g(z) \sin \varphi \\ g(z) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_z = \begin{pmatrix} g'(z) \cos \varphi \\ g'(z) \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z = \begin{pmatrix} g(z) \cos \varphi \\ g(z) \sin \varphi \\ -g(z)g'(z) \end{pmatrix},$$

$$|\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z| = \sqrt{g^2(z) + g^2(z)g'^2(z)} = g(z)\sqrt{1+g'^2(z)} \quad (\text{falls } g(z) \geq 0) \Rightarrow$$

$$\boxed{d\sigma = g(z)\sqrt{1+g'^2(z)} d(\varphi, z)} \quad (\text{Flächenelement})$$

$$\int_F d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_a^b g(z)\sqrt{1+g'^2(z)} dz d\varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_F d\sigma = 2\pi \int_a^b g(z)\sqrt{1+g'^2(z)} dz}$$

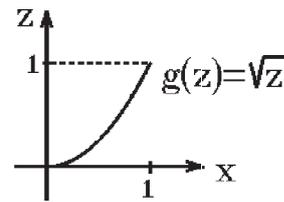
ist der Inhalt der Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotation um die z -Achse).

Beispiel hierzu

Paraboloidmantel: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq z \leq 1, \quad g(z) = \sqrt{z},$$

$$\begin{aligned} g(z)\sqrt{1+g'^2(z)} &= \sqrt{z}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2} \\ &= \sqrt{z}\sqrt{1+\frac{1}{4z}} = \frac{1}{2}\sqrt{4z+1}, \end{aligned}$$



$$\int_F d\sigma = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{4z+1} dz = \pi \cdot \left[\frac{1}{6}(4z+1)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(\sqrt{5}^3 - 1).$$

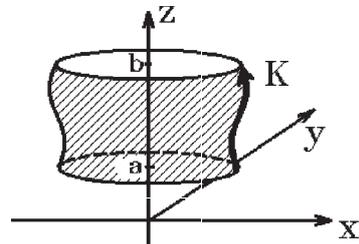
Ist die rotierende Kurve in Parameterform gegeben:

$$x = x(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

$$\text{mit } x(t) \geq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta],$$

so gilt für den Inhalt der Mantelfläche des Rotationskörpers

$$\boxed{\int_F d\sigma = 2\pi \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+z'^2(t)} dt}$$



$$\text{Denn: } \int_a^b g(z)\sqrt{1+g'^2(z)} dz = \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{1+\left(\frac{x'(t)}{z'(t)}\right)^2} z'(t) dt$$

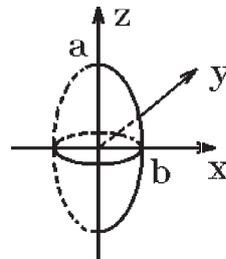
Substitution $z = z(t)$, $dz = z'(t)dt$, $x(t) = g(z(t))$, $x'(t) = g'(z(t))z'(t)$

(falls $z'(t) > 0$). (Ist $z'(t) < 0 \Rightarrow$ analog, sonst Integral für den Beweis aufspalten).

Beispiel hierzu Rotationsellipsoid

$$z(t) = a \cos t, \quad x(t) = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\begin{aligned} \int_F d\sigma &= 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi b \int_0^\pi \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2\pi ab \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \quad \text{mit } \epsilon = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{numerische Exzentrizität}) \\
&= 2\pi ab \cdot \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^\epsilon \sqrt{1 - u^2} du \quad (\text{Substitution } u = -\epsilon \cos t, du = \epsilon \sin t dt) \\
&= \frac{2\pi ab}{\epsilon} (u\sqrt{1 - u^2} + \arcsin u) \Big|_0^\epsilon = \frac{2\pi ab}{\epsilon} (\epsilon\sqrt{1 - \epsilon^2} + \arcsin \epsilon).
\end{aligned}$$

Flächenintegrale, Fluß durch eine Fläche

Ist nun zusätzlich auf der Fläche F eine stetige Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, so erhalten wir das Flächenintegral: $\int_F f(\vec{x}) d\sigma$.

Definition 13.26 : Flächenintegral

Sei F eine durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte glatte Fläche und $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf F stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_F f(\vec{x}) d\sigma = \int_D f(\vec{\varphi}(u, v)) |\vec{\varphi}_u(u, v) \times \vec{\varphi}_v(u, v)| d(u, v)$$

das *Flächenintegral* von f über F .

Bemerkung : Um das Flächenintegral von f über F zu berechnen, muß man für die Fläche F eine Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, D)$ angeben, das Flächenelement $d\sigma = |\vec{\varphi}_u(u, v) \times \vec{\varphi}_v(u, v)| d(u, v)$ berechnen, die Parameterdarstellung in die Funktion f einsetzen und dann über den Parameterbereich D integrieren.

Beispiel

Sei F der Paraboloidmantel: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ und $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Parameterdarstellung für F :

$$\vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

Flächenelement: $d\sigma = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} d(x, y)$ (vgl. S.451) \Rightarrow

$$\begin{aligned}
\int_F (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_D (x^2 + y^2) \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} d(x, y) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} \cdot r dr d\varphi \quad (\text{Substitution } s = \sqrt{4r^2 + 1}) \\
&= 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{16} s^2 (s^2 - 1) ds = \frac{(25\sqrt{5} + 1)\pi}{60}.
\end{aligned}$$

Ein für die Anwendung besonders wichtiges Flächenintegral ist der Fluß eines Vektorfeldes \vec{V} durch eine Fläche F in Richtung des Normalenvektors \vec{n} :

Definition 13.27 : Fluß von \vec{V} durch F

Sei F eine glatte Fläche in \mathbb{R}^3 und $\vec{V} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein auf F stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_F \langle \vec{V}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle d\sigma$$

der Fluß von \vec{V} durch die Fläche F in Richtung des Normalenvektors \vec{n} .

Ist $(\vec{\varphi}, D)$ eine Parameterdarstellung von F , so gilt:

$$d\sigma = |\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v| d(u, v) \quad \text{und} \quad \vec{n} = \pm \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v|}, \quad \text{also erhalten wir}$$

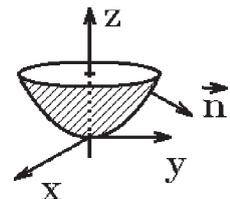
$$\int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \int_D \langle \vec{V}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \rangle d(u, v)$$

Das Vorzeichen richtet sich nach der vorgegebenen Richtung des Normalenvektors \vec{n} .

Beispiele

1. Sei F Paraboloidmantelfläche: $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$,

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \text{ mit negativer } z\text{-Koordinate.}$$



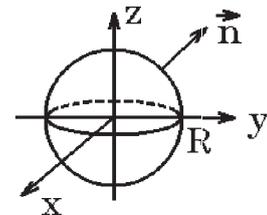
$$\text{Mit } \vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{vgl. S.445})$$

$\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y$ hat positive z -Koordinate $\Rightarrow -(\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y)$ benutzen,

$$\begin{aligned} \int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle_{z=x^2+y^2} d(x, y) \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2) d(x, y) = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Sei F die Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \text{ die äußere Normale.}$$



Parameterdarstellung: $\vec{\varphi}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \psi \\ R \sin \varphi \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.

Es gilt: $\vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi = R \cos \psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (nach Außen gerichtet), (vgl. S.446)

$$\Rightarrow \langle \vec{V}, \vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi \rangle = R \cos \psi (x^2 + y^2 + z^2) = R^3 \cos \psi$$

$$\Rightarrow \int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 \cos \psi d\psi d\varphi = 2\pi R^3 \cdot 2 \sin \psi \Big|_0^{\pi/2} = 4\pi R^3.$$

Zusammenfassung der bisher behandelten Integrale

1. *Bereichs- bzw. Volumenintegral* in \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3

\mathbb{R}^2 : $\int_M f dV$ mit $dV = d(x, y)$ in (x, y) Koordinaten,

$$dV = \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right| d(u, v) \text{ in anderen Koordinaten } u, v.$$

\mathbb{R}^3 : $\int_M f dV$ mit $dV = d(x, y, z)$ in (x, y, z) Koordinaten,

$$dV = \left| \det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) \right| d(u, v, w) \text{ in anderen Koordinaten } u, v, w.$$

dV heißt *Volumenelement*.

2. *Länge einer Kurve* mit Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, [a, b])$

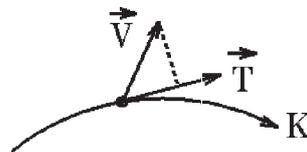
$$L(K) = \int_K ds = \int_a^b |\vec{\varphi}'(t)| dt \text{ mit dem Längenelement } ds = |\vec{\varphi}'(t)| dt.$$

3. *Kurvenintegral*: K habe die Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, [a, b])$

$$\int_K \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle = \int_a^b \langle \vec{V}, \vec{\varphi}'(t) \rangle dt = \int_a^b \left\langle \vec{V}, \frac{\vec{\varphi}'(t)}{|\vec{\varphi}'(t)|} \right\rangle |\vec{\varphi}'(t)| dt$$

$$= \int_K \langle \vec{V}, \vec{T} \rangle ds \text{ mit dem}$$

Tangentenvektor \vec{T} und dem Längenelement $ds = |\vec{\varphi}'(t)| dt$.



4. *Flächenintegral*: F habe die Parameterdarstellung $(\vec{\varphi}, D)$

$$\int_F f d\sigma = \int_D f \cdot |\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v| d(u, v) \text{ mit dem Flächenelement } d\sigma = |\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v| d(u, v).$$

Für den *Fluß* durch die Fläche F gilt

$$\int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pm \int_D \langle \vec{V}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \rangle d(u, v).$$

Integralsätze von Green, Stokes und Gauß

Wir kommen nun zu den für die Anwendung sehr wichtigen Integralsätzen, bei denen Beziehungen hergestellt werden zwischen

- Bereichsintegral in \mathbb{R}^2 und zugehörigem Randkurvenintegral (Satz von *Green*),
- Flächenintegral in \mathbb{R}^3 und zugehörigem Randkurvenintegral (Satz von *Stokes*),
- Volumenintegral in \mathbb{R}^3 und zugehörigem Oberflächenintegral (Satz von *Gauß*).

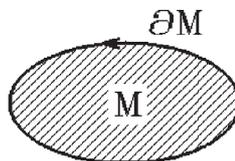
Satz 13.28 : *Satz von Green*

Sei $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit $\vec{V} \in C^1(G)$, G offen.

Sei $M \subset G$ Normalbereich (vgl. S.394). Dann gilt

$$\int_{\partial M} (V_1 dx + V_2 dy) = \int_M \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) d(x, y)$$

Hierbei wird die Randkurve ∂M von M so durchlaufen, daß das Innere von M links liegt, also positiv orientiert.



Beweis :

∂M kann aufgeteilt werden in

K_1 Kurve entlang $\varphi_1(x)$ von $a \rightarrow b$,

K_2 Kurve entlang $\varphi_2(x)$ von $b \rightarrow a$.

Parameterdarstellung von

$$K_1 : \vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}, \quad a \leq x \leq b,$$

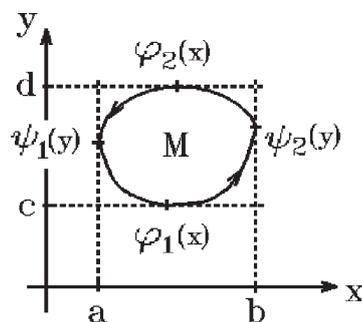
$$-K_2 : \vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}, \quad a \leq x \leq b.$$

Für das Vektorfeld $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt dann:

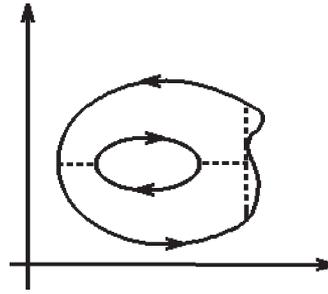
$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial V_1}{\partial y} d(x, y) &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial V_1}{\partial y} dy dx = \int_a^b (V_1(x, \varphi_2(x)) - V_1(x, \varphi_1(x))) dx \\ &= - \int_a^b V_1(x, \varphi_1(x)) dx - \int_b^a V_1(x, \varphi_2(x)) dx = - \int_{K_1} V_1 dx - \int_{K_2} V_1 dx \\ &= - \int_{\partial M} V_1 dx. \end{aligned}$$

Analog erhält man für das Vektorfeld $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2 \end{pmatrix}$

$$\int_M \frac{\partial V_2}{\partial x} d(x, y) = \int_{\partial M} V_2 dy. \quad \text{Zusammen folgt hieraus die Behauptung.}$$



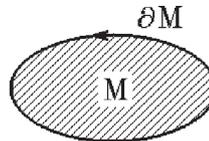
Bemerkung : Der Integralsatz von *Green* gilt auch noch, wenn M aus endlich vielen Normalbereichen besteht. Einen solchen Bereich nennt man *Greenschen Bereich*.



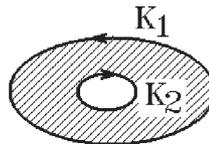
Da man den Rand von M immer so durchlaufen muß, daß das Innere von M links liegt, werden die "inneren Ränder" 2-mal durchlaufen, und zwar einmal in umgekehrter Richtung, so daß sich ihre Integrale wegheben.

Bemerkung : Ist die *Integrabilitätsbedingung* $V_{2x} = V_{1y}$ in M erfüllt, so folgt aus dem Greenschen Satz: $\int_{\partial M} (V_1 dx + V_2 dy) = 0$.

Ist M einfach zusammenhängend \Rightarrow
 ∂M ist geschlossene Kurve \Rightarrow
das Integral über die geschlossene Kurve ∂M ist $= 0$ (vgl. S.439).



Hat M ein "Loch" \Rightarrow
 ∂M besteht aus zwei geschlossenen Kurven K_1 und K_2 . Hierbei ist K_1 positiv orientiert und K_2 negativ orientiert und es gilt:



$$\int_{K_1+K_2} (V_1 dx + V_2 dy) = 0 \Rightarrow \int_{K_1} \langle \vec{V}, \vec{dx} \rangle = \int_{-K_2} \langle \vec{V}, \vec{dx} \rangle \quad (\text{vgl. S.441}).$$

Beispiele

1. $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ (Kreisfläche), (M ist Greenscher Bereich),

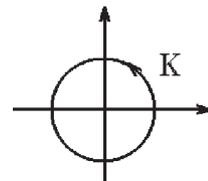
$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}. \quad \text{Gesucht: } \int_{\partial M} (V_1 dx + V_2 dy).$$

Da $V_{2x} - V_{1y} = 6xy^2 - 6xy^2 = 0$ in $M \Rightarrow$

$$\int_{\partial M} (2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy) = \int_M (V_{2x} - V_{1y}) d(x, y) = 0.$$

2. $K : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
 (positiv orientierte Kreislinie),

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x^4 - y^3 \\ x^3 - y^4 \end{pmatrix}. \quad \text{Gesucht: } \int_K (V_1 dx + V_2 dy).$$



Da $K = \partial M$ mit $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ und

$$V_{2x} - V_{1y} = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$\int_K (V_1 dx + V_2 dy) = \int_M 3(x^2 + y^2) d(x, y) = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\varphi = 6\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi .$$

3. Sei K einfach geschlossene, positiv orientierte, glatte Kurve.
 M sei der von der Kurve eingeschlossene Bereich.

Gesucht: $\mu(M)$ Inhalt von M .

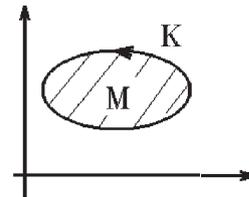
Wähle $\vec{V}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$V_{2x} - V_{1y} = 1 \text{ in } M \Rightarrow$$

$$\mu(M) = \int_M d(x, y) = \int_M (V_{2x} - V_{1y}) d(x, y) = \int_K (V_1 dx + V_2 dy)$$

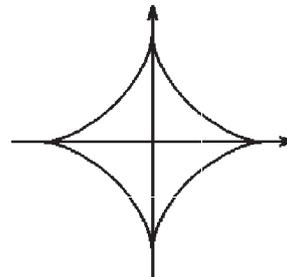
$$= \int_K \left(-\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy \right) \Rightarrow$$

$$\mu(M) = -\frac{1}{2} \int_{\partial M} (y dx - x dy)$$



Beispiel hierzu

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 \varphi , \\ K: y &= \sin^3 \varphi , \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi . \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mu(M) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^3 \varphi (-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi) - \cos^3 \varphi (3 \sin^2 \varphi \cos \varphi)) d\varphi \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 2\varphi \right) d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \right) d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\pi = \frac{3}{8}\pi \\ & \text{(da } \int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{).} \end{aligned}$$

Für den \mathbb{R}^3 gilt ein entsprechender Satz:

Satz 13.29 : *Satz von Stokes*

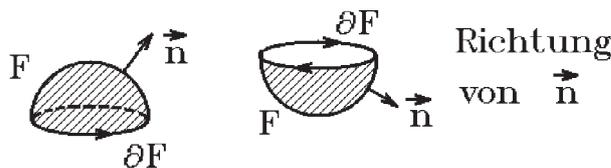
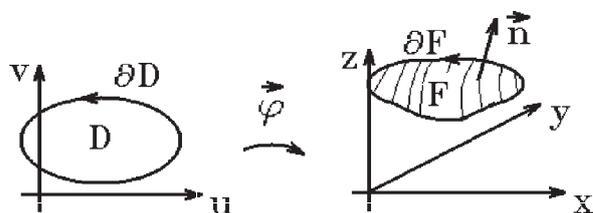
Sei $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{V} \in C^1(G)$, G offen.

Sei F eine durch $(\vec{\varphi}, D)$ dargestellte glatte Fläche in G mit $\vec{\varphi} \in C^2(D)$ und D ein *Greenscher Bereich*. Dann gilt

$$\int_{\partial F} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) = \int_F \langle \text{rot } \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Hierbei ist \vec{n} auf F so gerichtet, daß beim Durchlaufen von ∂F die Fläche F *links* liegt.

Beweis :



$$\begin{aligned} \int_{\partial F} V_1 dx &= \int_{\partial D} V_1(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))(\varphi_{1u} du + \varphi_{1v} dv) \\ &\quad (\text{da } x = \varphi_1(u, v), dx = \varphi_{1u} du + \varphi_{1v} dv) \\ &= \int_{\partial D} ((V_1 \varphi_{1u}) du + (V_1 \varphi_{1v}) dv) = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u} (V_1 \varphi_{1v}) - \frac{\partial}{\partial v} (V_1 \varphi_{1u}) \right) d(u, v) \\ &\quad (\text{nach Satz von Green}) \\ &= \int_D (V_{1x} \varphi_{1u} \varphi_{1v} + V_{1y} \varphi_{2u} \varphi_{1v} + V_{1z} \varphi_{3u} \varphi_{1v} + V_1 \varphi_{1uv} - V_{1x} \varphi_{1v} \varphi_{1u} - V_{1y} \varphi_{2v} \varphi_{1u} \\ &\quad - V_{1z} \varphi_{3v} \varphi_{1u} - V_1 \varphi_{1uv}) d(u, v) \\ &= \int_D (V_{1z} \cdot (\varphi_{3u} \varphi_{1v} - \varphi_{3v} \varphi_{1u}) - V_{1y} \cdot (\varphi_{2v} \varphi_{1u} - \varphi_{2u} \varphi_{1v})) d(u, v) \\ &= \int_D (V_{1z} \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)_2 - V_{1y} \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)_3) d(u, v). \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\int_{\partial F} V_2 dy = \int_D (V_{2x} \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)_3 - V_{2z} \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)_1) d(u, v) \text{ und}$$

$$\int_{\partial F} V_3 dz = \int_D (V_{3y} \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)_1 - V_{3x} \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)_2) d(u, v).$$

Zusammen folgt dann

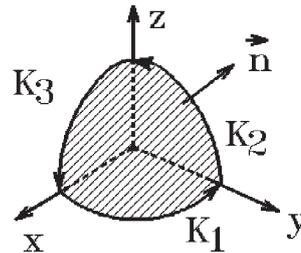
$$\int_{\partial F} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) = \int_D \langle \text{rot } \vec{V}, \vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \rangle d(u, v) = \int_F \langle \text{rot } \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma.$$

Beispiel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

(Kugelfläche des Kugeloktanten),

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$



Gesucht: $\int_{\partial F} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz)$.

Parameterdarstellung für F :

$$\vec{\varphi}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \psi \\ R \sin \varphi \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi = R \cos \psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{vgl. S.446}),$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \psi \leq \pi/2.$$

$$\text{rot } \vec{V}(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\langle \text{rot } \vec{V}, \vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_\psi \rangle = -R(\cos \psi)xz = -R^3 \cos \varphi \cos^2 \psi \sin \psi.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle &= \int_F \langle \text{rot } \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= - \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^3 \cos \varphi \cos^2 \psi \sin \psi d\psi d\varphi = -R^3 \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \psi \right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{R^3}{3}. \end{aligned}$$

Man kann das Kurvenintegral $\int_{\partial F} \langle \vec{V}, d\vec{x} \rangle$ natürlich auch direkt über die drei Randkurven $K_1 + K_2 + K_3$ berechnen.

Satz 13.30 : Satz von Gauß

Sei $\vec{V} : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{V} \in C^1(G)$, G offen.

Sei $M \subset G$ Normalbereich und \vec{n} der äußere Normaleneinheitsvektor auf ∂M (Oberfläche von M). Dann gilt

$$\int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_M \text{div } \vec{V}(x, y, z) d(x, y, z)$$

D.h.: Der Fluß durch die Oberfläche ∂M des Körpers M in Richtung der äußeren Normalen ist gleich dem Integral der Divergenz von \vec{V} über M .

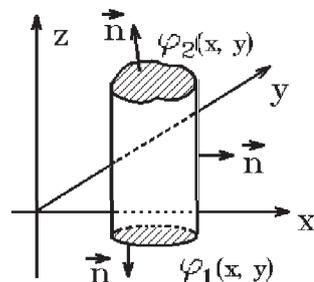
Beweis :

Da M Normalbereich, existieren

φ_1, φ_2 und M_z mit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_z, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\}.$$

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial V_3}{\partial z} d(x, y, z) &= \int_{M_z} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial V_3}{\partial z} dz \right) d(x, y) \\ &= \int_{M_z} (V_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - V_3(x, y, \varphi_1(x, y))) d(x, y). \end{aligned}$$



Auf der Bodenfläche F_B gilt: $\vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_1(x, y) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} -\varphi_{1x} \\ -\varphi_{1y} \\ 1 \end{pmatrix}$

(Vorzeichen ändern, da \vec{n} nach unten zeigt).

Mit $\vec{V}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3 \end{pmatrix}$ gilt dann

$$\int_{F_B} \langle \vec{V}_3, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_{M_z} V_3(x, y, \varphi_1(x, y)) d(x, y).$$

Analog erhält man für die Deckfläche F_D

$$\int_{F_D} \langle \vec{V}_3, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{M_z} V_3(x, y, \varphi_2(x, y)) d(x, y).$$

Auf der Mantelfläche F_M von M ist die z -Koordinate von \vec{n} gleich 0, also

$$\int_{F_M} \langle \vec{V}_3, \vec{n} \rangle d\sigma = 0. \text{ Damit erhalten wir insgesamt}$$

$$\int_{\partial M} \langle \vec{V}_3, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_M \frac{\partial V_3}{\partial z} d(x, y, z).$$

Analog gilt: $\int_{\partial M} \langle \vec{V}_2, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_M \frac{\partial V_2}{\partial y} d(x, y, z)$

und $\int_{\partial M} \langle \vec{V}_1, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_M \frac{\partial V_1}{\partial x} d(x, y, z).$

Addition dieser 3 Gleichungen ergibt: $\int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_M \operatorname{div} \vec{V} d(x, y, z).$

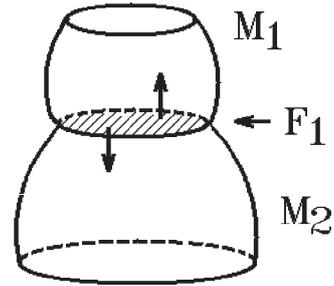
Bemerkung : Der Satz von Gauß gilt auch noch, wenn sich M aus endlich vielen Normalbereichen zusammensetzt.

Z.B.:

Der Körper M setze sich aus zwei Normalbereichen M_1 und M_2 zusammen (mit "innerer" Fläche F_1).

Wir spalten den Körper M auf in M_1 (oberer Teil) und M_2 (unterer Teil).

∂M_1 enthält die "innere" Fläche F_1 mit \vec{n} nach unten gerichtet,
 ∂M_2 enthält die "innere" Fläche F_1 mit \vec{n} nach oben gerichtet. Also fällt der Fluß durch die innere Fläche F_1 weg, da die Integrale über F_1 verschiedene Vorzeichen haben.

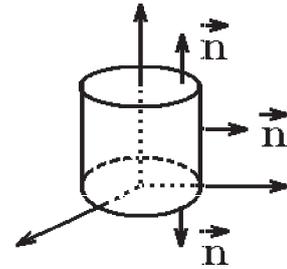


Beispiele

1.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h \right\} \quad (\text{Zylinder}),$$

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \\ z - x \end{pmatrix}.$$



Gesucht: $\int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma$ Fluß durch die Oberfläche des Zylinders in Richtung der äußeren Normalen \vec{n} .

Da $\text{div } \vec{V}(x, y, z) = y + 2y + 1 = 3y + 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_M (3y + 1) d(x, y, z) \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R (3r \sin \varphi + 1) r dr d\varphi dz = 2\pi h \int_0^R r dr = \pi h R^2 \quad (\text{da } \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0). \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Direkte Berechnung

$\partial M = F_B \cup F_D \cup F_M$ (F_B Boden-, F_D Deckel-, F_M Mantelfläche),

F_B und F_D sind Parallelflächen zur (x, y) -Ebene mit Parameterdarstellung:

$$\vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \quad \Rightarrow \quad \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(c konstant)

$d\sigma = |\vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y| d(x, y) = d(x, y)$. Also gilt

$$d\sigma = d(x, y)$$

für Parallelflächen zur (x, y) -Ebene.

Analog: $d\sigma = d(y, z)$ für Parallelflächen zur (y, z) -Ebene

und $d\sigma = d(x, z)$ für Parallelflächen zur (x, z) -Ebene.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist Normalenvektor auf } F_B, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Normalenvektor auf } F_D \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{F_B} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \left. -(z-x) \right]_{z=0} d(x,y) = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} x d(x,y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos \varphi dr d\varphi = 0 \quad (\text{da } \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0). \\ \int_{F_D} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \left. (z-x) \right]_{z=h} d(x,y) \\ &= h \int_{x^2+y^2 \leq R^2} d(x,y) - \int_{x^2+y^2 \leq R^2} x d(x,y) = h\pi R^2 \quad (\text{da } \int_{x^2+y^2 \leq R^2} x d(x,y) = 0). \end{aligned}$$

$$F_M \text{ Zylindermantel} \Rightarrow \vec{\varphi}_\varphi \times \vec{\varphi}_z = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vgl. S.446}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{F_M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^h (R^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot R \cos \varphi + R^3 \sin^2 \varphi \sin \varphi) dz d\varphi \\ &= hR^3 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Insgesamt erhalten wir: } \int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \pi h R^2.$$

Beispiel

2.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

(Paraboloidmantelfläche),

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \text{ mit negativer } z\text{-Koordinate.}$$

$$\text{Gesucht: } \int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma.$$

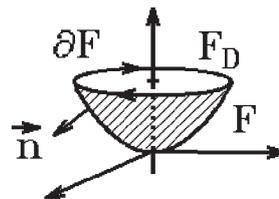
a) direkte Berechnung

Parameterdarstellung

$$\vec{\varphi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{vgl. S.445}),$$

$x^2 + y^2 \leq 1$, (Vorzeichen ändern, da \vec{n} negative z -Koordinate).

$$\begin{aligned} \int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= - \int_{x^2+y^2 \leq 1} \langle \vec{V}, \vec{\varphi}_x \times \vec{\varphi}_y \rangle d(x,y) \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left. (2xz + 2xy - y^2) \right]_{z=x^2+y^2} d(x,y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r \cos \varphi \cdot r^2 + 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \, dr \, d\varphi \\
&\text{(da } \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi = 0 \text{ und } \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = 0) \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\varphi = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{4} .
\end{aligned}$$

b) mit Satz von Gauß

Da F keine geschlossene Fläche ist, müssen wir, um den Satz von Gauß anwenden zu können, zunächst die Hilfsfläche F_D (Deckelfläche des Paraboloiden) hinzufügen und am Schluß wieder subtrahieren.

$$\begin{aligned}
\int_{F+F_D} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma &= \int_M \operatorname{div} \vec{V} \, d(x, y, z) = 0 \quad (\text{da } \operatorname{div} \vec{V} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3) \\
\Rightarrow \int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma &= - \int_{F_D} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma .
\end{aligned}$$

Für F_D gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d\sigma = d(x, y)$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1 \Rightarrow$

$$\int_{F_D} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 \, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{4} \quad (\text{vgl. oben}).$$

$$\text{Also erhalten wir: } \int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = -\frac{\pi}{4} .$$

c) mit Satz von Stokes

Da $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ in \mathbb{R}^3 ist, können wir auch den Satz von Stokes benutzen, denn es existiert ein Vektorpotential \vec{W} mit $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{W}$ in \mathbb{R}^3 . Also gilt

$$\begin{aligned}
\int_F \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma &= \int_F \langle \operatorname{rot} \vec{W}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial F} \langle \vec{W}, \vec{dx} \rangle \quad (\text{nach Satz von Stokes}) \\
&= \int_{\partial F} (W_1 \, dx + W_2 \, dy + W_3 \, dz)
\end{aligned}$$

mit $(-\partial F)$: $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Da $z = 1 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow$ wir wählen zur Berechnung des Vektorpotentials \vec{W} nicht $W_3 = 0$ sondern $W_1 = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{W} = \begin{pmatrix} W_{3y} - W_{2z} \\ W_{1z} - W_{3x} \\ W_{2x} - W_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y^2 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow (mit $W_1 = 0$) $W_2 = \int y^2 \, dx + h_1(y, z) = xy^2 + h_1(y, z)$.

Setzen wir $h_1 = 0 \Rightarrow W_2 = xy^2$. W_3 wird nicht benötigt, da $dz = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\partial F} \langle \vec{W}, \vec{dx} \rangle &= \int_{\partial F} (W_1 \, dx + W_2 \, dy + W_3 \, dz) = \int_{\partial F} W_2 \, dy \\
&\quad (\text{da } W_1 = 0 \text{ und } dz = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial F} xy^2 dy = - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi\right) d\varphi \\
&= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi\right)\right) d\varphi = -\frac{1}{8} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Beispiel

3.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\} \quad (\text{Kugel}),$$

$$\vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{n} \text{ äußere Normale.}$$

Gesucht: $\int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma$ (Fluß durch die Oberfläche der Kugel in Richtung der äußeren Normalen).

Es gilt: $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ (vgl. S.428).

Der Satz von Gauß kann nicht angewendet werden, es gilt *nicht*:

$$\int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_M \operatorname{div} \vec{V} d(x, y, z) = 0,$$

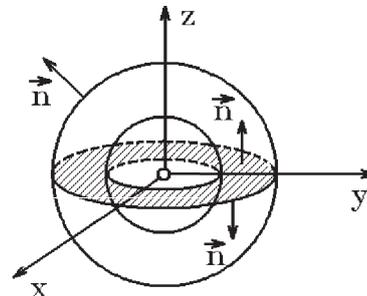
denn \vec{V} besitzt im Innern der Kugel eine *Singularität*.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\langle \frac{\vec{x}}{R^3}, (R \cos \psi) \vec{x} \right\rangle d\psi d\varphi \quad (\text{vgl. S.448}) \\
&= \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle d\psi d\varphi \quad (\text{es gilt } \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = |\vec{x}|^2 = R^2) \\
&= \frac{R^2}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi d\varphi = 2\pi \cdot 2 \sin \psi \Big|_0^{\pi/2} = 4\pi \neq 0.
\end{aligned}$$

Für jede andere geschlossene Fläche, die den Nullpunkt umschließt, erhält man den *gleichen Wert*, wenn jeweils der Fluß in Richtung äußere Normale berechnet wird.

Denn: Schneidet man das Ringgebilde auf, so fällt der Fluß durch die innere Fläche weg, da einmal die äußere Normale nach unten und einmal nach oben zeigt.



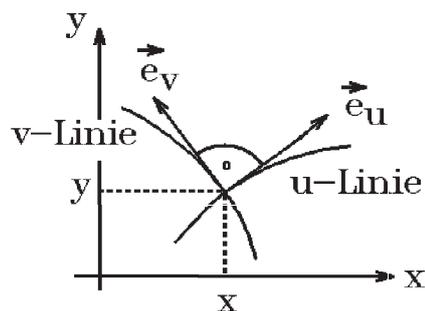
Krummlinige orthogonale Koordinaten

Sei $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ mit den üblichen Basisvektoren

$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den *kartesischen Koordinaten* x, y, z .

Führen wir neue (krummlinige) Koordinaten u, v, w ein, so läßt sich \vec{r} auch durch diese neuen Koordinaten kennzeichnen.

Betrachten wir die Koordinatenlinien (jeweils 2 Koordinaten konstant halten), so existieren in jedem Punkt $\vec{r}(x, y, z)$ des \mathbb{R}^3 drei Einheitsvektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ (die *Tangenteneinheitsvektoren* an die drei *Koordinatenlinien* in diesem Punkt). Stehen diese Vektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ in jedem Punkt *paarweise senkrecht* aufeinander, so sprechen wir von *krummlinigen orthogonalen Koordinaten*.



Jeder Vektor \vec{r} läßt sich auch durch $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ ausdrücken. Es gilt:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x(u, v, w)\vec{e}_x + y(u, v, w)\vec{e}_y + z(u, v, w)\vec{e}_z = a\vec{e}_u + b\vec{e}_v + c\vec{e}_w .$$

Gesucht: a, b, c .

Halten wir v, w konstant, so erhalten wir die u -Koordinatenlinie $\vec{r}(u)$ mit *Tangenteneinheitsvektor*

$$\vec{e}_u = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|}$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein

$$h_u = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| , \quad h_v = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| , \quad h_w = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|$$

Hiermit gilt:

$$\vec{e}_u = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{e}_z \right) .$$

Analog erhalten wir

$$\vec{e}_v = \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{e}_z \right) ,$$

$$\vec{e}_w = \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial x}{\partial w} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial w} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial w} \vec{e}_z \right) .$$

In Matrixschreibweise folgt hieraus:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_u \\ \vec{e}_v \\ \vec{e}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^T \\ \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^T \\ \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist orthogonal, da $\vec{e}_u = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{e}_v = \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\vec{e}_w = \frac{1}{h_w} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ ein ONS (Orthonormalsystem) bilden. Also gilt

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{e}_u \\ \vec{e}_v \\ \vec{e}_w \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_u \\ \vec{e}_v \\ \vec{e}_w \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \left(\frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{1}{h_w} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right)$$

Hierbei ist

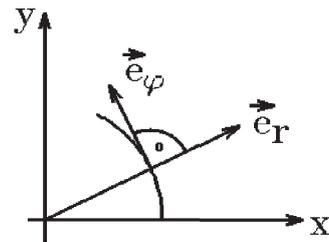
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Beispiele

1. Zylinderkoordinaten

$\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)^T$, (r, φ, z) die neuen Koordinaten,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T \Rightarrow h_r = 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)^T \Rightarrow h_\varphi = r, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1)^T \Rightarrow h_z = 1. \end{aligned}$$



Damit erhalten wir

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

2. Kugelkoordinaten

$\vec{r} = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)^T$, (r, φ, ψ) die neuen Koordinaten,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi)^T \Rightarrow h_r = 1 ,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi \cos \psi, r \cos \varphi \cos \psi, 0)^T \Rightarrow h_\varphi = r \cos \psi ,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = (-r \cos \varphi \sin \psi, -r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi)^T \Rightarrow h_\psi = r .$$

Damit erhalten wir

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \cos \psi \vec{e}_x + \sin \varphi \cos \psi \vec{e}_y + \sin \psi \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\psi = -\cos \varphi \sin \psi \vec{e}_x - \sin \varphi \sin \psi \vec{e}_y + \cos \psi \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \cos \psi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi - \cos \varphi \sin \psi \vec{e}_\psi$$

$$\vec{e}_y = \sin \varphi \cos \psi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi - \sin \varphi \sin \psi \vec{e}_\psi$$

$$\vec{e}_z = \sin \psi \vec{e}_r + \cos \psi \vec{e}_\psi$$

Differentialoperatoren in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Satz 13.31 :

Sei $f : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{V} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f \in C^2(M)$, $\vec{V} \in C^1(M)$.

$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z = V_u \vec{e}_u + V_v \vec{e}_v + V_w \vec{e}_w$, also V_x, V_y, V_z die kartesischen Koordinaten von \vec{V} , V_u, V_v, V_w die neuen Koordinaten von \vec{V} .

Dann gilt

a)

$$\nabla = \frac{1}{h_u} \vec{e}_u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{h_v} \vec{e}_v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{h_w} \vec{e}_w \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \vec{e}_w$$

b)

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \vec{e}_u & h_v \vec{e}_v & h_w \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u V_u & h_v V_v & h_w V_w \end{vmatrix}$$

(nach 1. Zeile entwickeln)

c)

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w V_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w V_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v V_w) \right\}$$

d)

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right\} \end{aligned}$$

Beweisidee:

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial x}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial x}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial x}{\partial w} \vec{e}_w \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial y}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial y}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial y}{\partial w} \vec{e}_w \right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial z}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial z}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial z}{\partial w} \vec{e}_w \right) \\ &= \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \vec{e}_v \\ &\quad + \frac{1}{h_w} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} \right) \vec{e}_w \\ &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \vec{e}_w . \end{aligned}$$

b) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt:

$$\int_M f(\vec{r}) \, d\vec{r} = f(\vec{r}_0) \mu(M) \quad (\mu(M) \text{ Volumen von } M) , \text{ also}$$

$$f(\vec{r}_0) = \lim_{M \rightarrow \vec{r}_0} \frac{1}{\mu(M)} \int_M f(\vec{r}) \, d\vec{r} .$$

$M \rightarrow \vec{r}_0$ bedeutet, daß sich M auf den Punkt \vec{r}_0 zusammenzieht.

Analog erhalten wir für Flächen:

$$f(\vec{r}_0) = \lim_{G \rightarrow \vec{r}_0} \frac{1}{F(G)} \int_G f(\vec{r}) \, d\sigma \quad (F(G) \text{ der Flächeninhalt der Fläche } G).$$

Nach dem Satz von *Stokes* gilt:

$$\int_G \langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial G} (V_x \, dx + V_y \, dy + V_z \, dz) \quad , \text{ also}$$

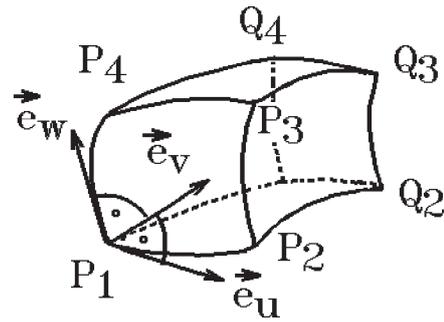
$$\langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{n} \rangle (\vec{r}_0) = \lim_{G \rightarrow \vec{r}_0} \frac{1}{F(G)} \int_{\partial G} \langle \vec{V}, d\vec{r} \rangle .$$

Wir betrachten an der Stelle $P_1(u, v, w)$ mit dem Ortsvektor \vec{r}_0 ein kleines Volumenstück in den neuen Koordinaten u, v, w . Die Kantenlinien seien die Koordinatenlinien durch die Eckpunkte.

Das Volumenstück habe die Eckpunkte:

$$\begin{aligned} &P_1(u, v, w) , \\ &P_2(u + \Delta u, v, w) , \\ &Q_1(u, v + \Delta v, w) , \\ &P_4(u, v, w + \Delta w) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien durch P_1 sind $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$.



Dann gilt für die u -Koordinate von $\text{rot } \vec{V}$ an der Stelle \vec{r}_0

$$\boxed{(\text{rot } \vec{V})_u = \langle \text{rot } \vec{V}, \vec{e}_u \rangle = \lim_{G \rightarrow \vec{r}_0} \frac{1}{F(G)} \int_{\partial G} \langle \vec{V}, d\vec{r} \rangle}$$

mit G : Fläche zwischen den Punkten P_1, Q_1, Q_4, P_4 .

Wir erhalten: Länge $\overline{P_1 Q_1} \approx h_v \Delta v = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \Delta v$,

$$F(G) \approx h_v \Delta v \cdot h_w \Delta w = h_v h_w \Delta v \Delta w .$$

∂G Randkurve von G : $P_1 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_4 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle \vec{V}, d\vec{r} \rangle &\approx V_v h_v \Delta v \Big]_w + V_w h_w \Delta w \Big]_{v+\Delta v} - V_v h_v \Delta v \Big]_{w+\Delta w} - V_w h_w \Delta w \Big]_v \\ &= \frac{\Delta(h_w V_w)}{\Delta v} \Delta v \Delta w - \frac{\Delta(h_v V_v)}{\Delta w} \Delta v \Delta w . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $G \rightarrow \vec{r}_0$

$$(\text{rot } \vec{V})_u = \frac{1}{h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial v} (h_w V_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_v V_v) \right) .$$

Analog erhält man die anderen Koordinaten von $\text{rot } \vec{V}$.

c) Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\int_M \text{div } \vec{V}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma \quad , \quad \text{also}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{V}(\vec{r}_0) = \lim_{M \rightarrow \vec{r}_0} \frac{1}{\mu(M)} \int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma}$$

wobei M das von den Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ gebildete Volumenstück ist. Es gilt: $\mu(M) \approx h_u h_v h_w \Delta u \Delta v \Delta w$.

M hat sechs Randflächen. Sei G_1 die von P_2, Q_2, Q_3, P_3 gebildete Randfläche und G_2 die gegenüberliegende Randfläche, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle &= \langle \vec{V}, \vec{e}_u \rangle = V_u \quad \text{und} \\ \int_{G_1} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma &\approx h_v h_w V_u \Big]_{u+\Delta u} \cdot \Delta v \Delta w , \end{aligned}$$

$$\int_{G_2} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma \approx -h_v h_w V_u \Big|_u \cdot \Delta v \Delta w$$

$$\Rightarrow \int_{G_1 \cup G_2} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma \approx \frac{\Delta(h_v h_w V_u)}{\Delta u} \Delta u \Delta v \Delta w$$

(analog für die anderen Randflächen).

Zusammen mit dem Grenzübergang $M \rightarrow \vec{r}_0$ erhalten wir dann

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w V_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w V_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v V_w) \right\}.$$

d) Setzt man a) in c) ein, so erhält man d).

Beispiele

1. *Zylinderkoordinaten* , $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_z = 1$ (vgl. [S.467](#))

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_r & rV_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} (V_z)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Hierbei sind V_r, V_φ, V_z die Zylinderkoordinaten von \vec{V} .

2. *Kugelkoordinaten* , $h_r = 1$, $h_\varphi = r \cos \psi$, $h_\psi = r$ (vgl. [S.468](#))

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi} \vec{e}_\psi$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{r^2 \cos \psi} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cos \psi \vec{e}_\varphi & r \vec{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ V_r & r \cos \psi V_\varphi & r V_\psi \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{r \cos \psi} \left(\frac{\partial V_\psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \psi V_\varphi) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \psi} - \frac{\partial (r V_\psi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\psi$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2 \cos \psi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \psi V_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \psi} (r \cos \psi V_\psi) \right\} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \psi V_\psi)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \cos \psi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cos \psi \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \psi \frac{\partial f}{\partial \psi}) \right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \psi} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \psi}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}$$

Hierbei sind V_r, V_φ, V_ψ die Kugelkoordinaten von \vec{V} .

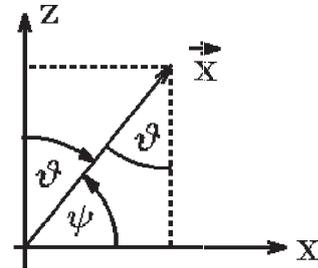
Bemerkung :

In der Anwendung wird oft bei den Kugelkoordinaten anstelle des Höhenwinkels ψ (gemessen von der positiven x -Achse, also $-\pi/2 < \psi < \pi/2$) der Höhenwinkel ϑ (gemessen von der positiven z -Achse, also $0 < \vartheta < \pi$) benutzt.

Es gilt: $\cos \psi = \sin \vartheta$, also muß dann in allen

Formeln über Kugelkoordinaten $\cos \psi$ durch $\sin \vartheta$

ersetzt werden. Bei Δf steht anstelle von $(-\tan \psi)$: $\cot \vartheta$ (das andere Vorzeichen erhält man wegen des anderen Vorzeichens bei der Ableitung von $\sin \vartheta$ anstelle von $\cos \psi$).



Beispiele

1. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, z^2 \right)^T$, also

$$\vec{V} = \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{-x}{x^2 + y^2} \vec{e}_y + z^2 \vec{e}_z \quad (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \text{ ersetzen (vgl. S.467)}) \\ = \frac{r \sin \varphi}{r^2} (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + \frac{-r \cos \varphi}{r^2} (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) + z^2 \vec{e}_z \Rightarrow$$

$$\vec{V} = -\frac{1}{r}\vec{e}_\varphi + z^2\vec{e}_z \Rightarrow V_r = 0, V_\varphi = -\frac{1}{r}, V_z = z^2 \quad (\text{Zylinderkoordinaten von } \vec{V}),$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} (z^2) = 2z \quad (\text{nicht quellenfrei}),$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -1 & z^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} (0 \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot r\vec{e}_\varphi + 0 \cdot \vec{e}_z) = \vec{0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}.$$

Also existieren Potentiale in allen einfach zusammenhängenden Teilgebieten von $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$, z.B. in $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$.

Berechnung eines Potentials in M:

$$\text{Es muß gelten: } \operatorname{grad} u = \vec{V} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = V_r = 0, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = V_\varphi = -\frac{1}{r}, \frac{\partial u}{\partial z} = V_z = z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -1, \frac{\partial u}{\partial z} = z^2$$

$$\Rightarrow u(r, \varphi, z) = -\varphi + \frac{z^3}{3} + c \Rightarrow u(x, y, z) = -\arctan \frac{y}{x} + \frac{z^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines Potential in } M.$$

2. $\vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{x}|, \quad (\text{vgl. S.428/438}).$

Da $\vec{e}_r = (\cos \varphi \cos \psi)\vec{e}_x + (\sin \varphi \cos \psi)\vec{e}_y + (\sin \psi)\vec{e}_z$ (vgl. S.468)

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \frac{1}{r}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{r} \Rightarrow \underline{\vec{x} = r\vec{e}_r}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{r\vec{e}_r}{r^3} = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow V_r = \frac{1}{r^2}, V_\varphi = 0, V_\psi = 0 \quad (\text{Kugelkoordinaten von } \vec{V}),$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \frac{1}{r^2}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\},$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{r^2 \cos \psi} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cos \psi \vec{e}_\varphi & r \vec{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet \Rightarrow

existiert ein Potential u in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\operatorname{grad} u = \vec{V} \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = V_r = \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = V_\varphi = 0, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} = V_\psi = 0 \Rightarrow$$

$$u(r, \varphi, \psi) = -\frac{1}{r} + c \Rightarrow u(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ ist allgemeines}$$

Potential von \vec{V} in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Berechnung eines Vektorpotentials: Es muß gelten:

$$\frac{1}{r \cos \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (W_\psi) - \frac{\partial}{\partial \psi} (\cos \psi W_\varphi) \right) = V_r = \frac{1}{r^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} (W_r) - \frac{\partial}{\partial r} (rW_\psi) \right) = V_\varphi = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rW_\varphi) - \frac{1}{\cos \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_r) \right) = V_\psi = 0 .$$

$$\text{Setze } W_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_\psi) = \frac{\cos \psi}{r} , \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_r) = 0$$

$$\Rightarrow W_\psi = \frac{\varphi}{r} \cos \psi + h_1(r, \psi) , \quad W_r = h_2(r, \psi) .$$

$$\text{Setze } h_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \psi} (W_r) - \frac{\partial}{\partial r} (rW_\psi) = 0 \Rightarrow W_r = h_3(r) .$$

$$\text{Setze } h_3 = 0 \Rightarrow \vec{W} = \left(\frac{\varphi}{r} \cos \psi \right) \vec{e}_\psi \quad \text{ist Vektorpotential von } \vec{V} \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} .$$

Ist $\vec{V}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{|\vec{x} - \vec{a}|^3}$ mit $r = |\vec{x} - \vec{a}|$, so gelten alle Ergebnisse analog in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{a}\}$,

denn für die verschobenen Kugelkoordinaten $\vec{x} = \vec{a} + \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \psi \\ r \sin \varphi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$ bleiben alle

Differentialoperatoren gleich. Also gilt:

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} \quad \text{ist Potential in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{a}\} ,$$

$$\vec{W}(r, \varphi, \psi) = \left(\frac{\varphi}{|\vec{x} - \vec{a}|} \cos \psi \right) \vec{e}_\psi \quad \text{ist Vektorpotential in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{a}\} .$$

Greensche Formeln, harmonische Funktionen

Als Folgerung aus dem Integralsatz von Gauß zeigen wir die folgenden Greenschen Formeln, mit deren Hilfe wir dann Eigenschaften harmonischer Funktionen beweisen können:

Satz 13.32 : Greensche Formeln

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $M \subset G$ setze sich aus endlich vielen Normalbereichen zusammen, \vec{n} sei die äußere Normale von ∂M , $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen mit $u, v \in C^2(G)$. Dann gilt

$$\text{a) } \int_M (u \Delta v + \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle) d\vec{x} = \int_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma \quad (1. \text{ Greensche Formel}),$$

$$\text{b) } \int_M (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{x} = \int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma \quad (2. \text{ Greensche Formel}).$$

Hierbei ist $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \langle \text{grad } v, \vec{n} \rangle$ die Richtungsableitung von v in Richtung \vec{n} .

Beweis :

Zu a): Nach dem Integralsatz von Gauß gilt $\int_M \text{div } \vec{V} d\vec{x} = \int_{\partial M} \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle d\sigma .$

Mit $\vec{V} = u \text{ grad } v$ folgt hieraus

$$\int_M \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) d\vec{x} = \int_{\partial M} \langle u \operatorname{grad} v, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma .$$

Da $\operatorname{div}(f\vec{W}) = f \operatorname{div} \vec{W} + \langle \operatorname{grad} f, \vec{W} \rangle$ und $\operatorname{div}(\operatorname{grad} v) = \Delta v$ (vgl. S.427), folgt

$$\int_M (u \Delta v + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle) d\vec{x} = \int_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma .$$

Zu b):
$$\int_M (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{x}$$

$$= \int_M (u \Delta v + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle) d\vec{x} - \int_M (v \Delta u + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle) d\vec{x}$$

$$= \int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma .$$

Folgerungen

a) Ist $u \equiv 1 \Rightarrow \int_M \Delta v d\vec{x} = \int_{\partial M} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma .$

b) Ist v harmonisch in M (d.h.: $\Delta v = 0$ im Inneren von M und $v \in C(\overline{M})$)

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma = 0 .$$

c) Sind u und v harmonisch in M

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = 0 .$$

Grundlösungen von $\Delta u = 0$

Gesucht: Lösungen von $\Delta u = 0$, die nur vom Abstand zum Nullpunkt abhängen, also $u(\vec{x}) = f(r)$.

a) \mathbb{R}^2 : Führen wir Polarkoordinaten ein, so geht Δu über in

$$\Delta u = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0 \quad (\text{da } u \text{ unabhängig von } \varphi, \text{ fallen die Ableitungen nach } \varphi \text{ weg, und die partiellen Ableitungen nach } r \text{ sind gewöhnliche Ableitungen, vgl. S.471})$$

$$\Rightarrow \frac{f''}{f'} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \ln |f'| = -\ln r + c_1 \Rightarrow f'(r) = \frac{c}{r} \Rightarrow$$

$$u(\vec{x}) = c \ln r + d \quad , \quad (c, d \in \mathbb{R}), \quad \text{mit } r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist Lösung von $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

b) \mathbb{R}^3 : Führen wir Kugelkoordinaten ein, so geht Δu über in

$$\Delta u = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0 \quad (\text{da } u \text{ unabhängig von } \varphi \text{ und } \psi, \text{ fallen die Ableitungen nach } \varphi \text{ und } \psi \text{ weg, und die partiellen Ableitungen nach } r \text{ sind gewöhnliche Ableitungen, vgl. S.472})$$

$$\Rightarrow \frac{f''}{f'} = -\frac{2}{r} \Rightarrow \ln |f'| = -2 \ln r + c_1 \Rightarrow f'(r) = \frac{c_2}{r^2} \Rightarrow$$

$$u(\vec{x}) = \frac{c}{r} + d \quad , \quad (c, d \in \mathbb{R}), \quad \text{mit } r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist Lösung von $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

Folgerung: Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (fest) mit $n = 2$ oder $n = 3$, so gilt

$$u(\vec{x}) = \begin{cases} c \ln |\vec{x} - \vec{x}_0| + d & , \text{falls } n = 2 \\ \frac{c}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + d & , \text{falls } n = 3 \end{cases}$$

ist Lösung von $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{x}_0\}$ und wird *Grundlösung* genannt.

Satz 13.33 : *Greensche Darstellungsformel für den \mathbb{R}^3*

Sei $u : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch in einem beschränkten Gebiet G , $M \subset G$ Normalbereich, $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{M}$ (Inneres von M). Dann gilt die *Greensche Darstellungsformel für den \mathbb{R}^3*

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial M} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}} - u(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) \right) d\sigma$$

Beweis :

Sei $K_\varrho(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varrho\}$ und ϱ so klein gewählt, daß $\overline{K_\varrho(\vec{x}_0)} \subset M$. Sei $N = M \setminus K_\varrho(\vec{x}_0)$, dann gilt nach der 2. Greenschen Formel und Folgerung c) (vgl.

S.475) mit $v(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_N (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{x} = \int_{\partial N} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma \\ &= \int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma - \int_{\partial K_\varrho(\vec{x}_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma . \end{aligned}$$

Da $v(\vec{x}) = \frac{1}{\varrho}$ und $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial}{\partial \varrho}$ auf $\partial K_\varrho(\vec{x}_0) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = -\frac{1}{\varrho^2}$ auf $\partial K_\varrho(\vec{x}_0)$ und

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_\varrho(\vec{x}_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma &= -\frac{1}{\varrho^2} \int_{\partial K_\varrho(\vec{x}_0)} u d\sigma - \frac{1}{\varrho} \int_{\partial K_\varrho(\vec{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma \\ &= -\frac{1}{\varrho^2} \int_{\partial K_\varrho(\vec{x}_0)} u d\sigma \quad (\text{da das letzte Integral} = 0 \text{ wegen Folgerung b) (vgl. } \mathbf{S.475} \text{)}) \end{aligned}$$

(da u harmonisch in $K_\varrho(\vec{x}_0)$)

$$= -\frac{1}{\varrho^2} u(\vec{x}_0 + \vec{\xi}_\varrho) \cdot 4\pi\varrho^2 \quad (\text{nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung})$$

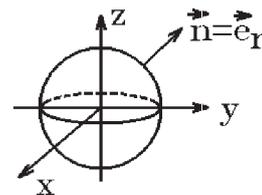
($4\pi\varrho^2$ Oberfläche der Kugel K_ϱ)

$$= -4\pi u(\vec{x}_0 + \vec{\xi}_\varrho) \quad \text{mit } |\vec{\xi}_\varrho| < \varrho .$$

$$\text{Also folgt } \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varrho(\vec{x}_0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = -4\pi u(\vec{x}_0) .$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\int_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma + 4\pi u(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow \text{Behauptung}$$



Auf $\partial K_r(\vec{0})$ gilt $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial r}$, denn:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \langle \text{grad } u, \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \rangle = \langle \text{grad } u, \vec{e}_r \rangle = \langle \text{grad } u, \vec{n} \rangle = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Analog gilt auf $\partial K_r(\vec{x}_0)$: $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial r}$.

1. Folgerung

Ist $M = K_r(\vec{x}_0)$, so gilt $u(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - u(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma$, also

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma + \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} u d\sigma.$$

Da u harmonisch in $K_r(\vec{x}_0)$, so gilt ja $\int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma = 0$ (vgl. Folgerung b) S.475), also gilt der *Gaußsche Mittelwertsatz*

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} u d\sigma$$

2. Folgerung

Satz 13.34 : *Maximumprinzip für harmonische Funktionen*

Ist u harmonisch in M und nicht konstant, so nimmt u ihr absolutes *Maximum* und *Minimum* nicht im Inneren von M , sondern auf dem *Rand* von M an.

Beweis :

Annahme: $\exists \vec{x}_0 \in \overset{\circ}{M}$ mit $u(\vec{x}_0) = k$ sei Maximum in M (d.h.: $u(\vec{x}) \leq u(\vec{x}_0) \forall \vec{x} \in M$).

a) Dann gilt: $u(\vec{x}) = u(\vec{x}_0) = k \forall \vec{x} \in K_r(\vec{x}_0)$ mit $\overline{K_r(\vec{x}_0)} \subset M$,

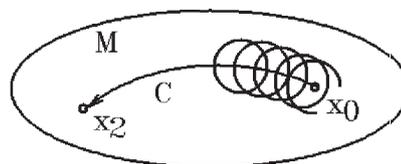
denn: Annahme: $\exists \vec{x}_1 \in M$, $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_0|$, $\overline{K_r(\vec{x}_0)} \subset M$ und $u(\vec{x}_1) < k \Rightarrow$

$$k = u(\vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} u(\vec{x}) d\sigma < \frac{k}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(\vec{x}_0)} d\sigma = k \Rightarrow \text{Widerspruch.}$$

b) Sei $\vec{x}_2 \in M$ beliebig $\Rightarrow u(\vec{x}_2) = k$,

denn: Sei C eine Kurve von \vec{x}_0 nach \vec{x}_2 , die ganz in M verläuft. Dann kann man mit Hilfe einer "Kugelmkette" von \vec{x}_0 nach \vec{x}_2 gelangen. Bei jeder Kugel kann man a)

anwenden $\Rightarrow u(\vec{x}_2) = k$.



Aus a), b) $\Rightarrow u$ konstant in $M \Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung.

(Analog für Minimum).

3. Folgerung

Satz 13.35 : *Eindeutigkeit der Lösung beim inneren Dirichlet- Problem*

Sei $u \in C^2(\overset{\circ}{M})$, $u \in C(\overline{M})$, $h \in C(\partial M)$. Dann gilt:

Das innere *Dirichlet Problem*

$$\Delta u = 0 \text{ in } \overset{\circ}{M}, \quad u|_{\partial M} = h$$

besitzt *höchstens eine Lösung*.

Beweis :

Annahme: u_1, u_2 seien zwei Lösungen $\Rightarrow u = u_1 - u_2$ ist Lösung von $\Delta u = 0$ (da Δ linear) mit $u|_{\partial M} = 0$.

Da u ihr Maximum und Minimum auf ∂M annimmt $\Rightarrow u \equiv 0$ in M .