

REELL-ANALYTISCHE METRIKEN AUF KOMPLEMENTEN VON DIVISOREN IN KOMPAKTEN KOMPLEX-HYPERBOLISCHEN RÄUMEN

THOMAS PÜTTMANN

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	2
1. Komplex-hyperbolische Geometrie	5
1.1. Grundlagen	5
1.2. Total-geodätische Untermannigfaltigkeiten	9
2. Analytische Metriken auf Komplementen von Divisoren	16
2.1. Grundlagen	16
2.2. Definition der Metrik	18
2.3. Analytizität der Metrik, Komplexifizierung	19
2.4. Vollständigkeit der Metrik	23
2.5. Berechnung des Krümmungstensors	24
2.6. Betrachtung eines Spezialfalls	32
2.7. Streckung mit einer C^∞ -Funktion	42
3. Riemannsche Metriken auf dem Blow-up	43
3.1. Blow-up	44
3.2. Streckung der Metrik	45
3.3. Schnittkrümmung	45
3.4. Vergleich mit der analogen Situation in $\mathbb{H}^n$, Modifikation der Streckung	47
4. Kähler-Mannigfaltigkeiten	48
4.1. Allgemeines	48
4.2. Hermitesche Streckung der Standardmetrik	49
Anhang A. Das $\otimes$ -Produkt von Bilinearformen und bilinearen Abbildungen	50
Anhang B. Spiegelung in einem lokal-symmetrischen Raum	52
Anhang C. Explizite Inversion von $\mathbb{1} + G_I$.	55
Anhang D. Symmetrieforderung und Folgerungen	61
Literatur	64

EINLEITUNG

In dieser Arbeit konstruieren wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit vollständigen, reell-analytischen Metriken und untersuchen deren Schnittkrümmung. Wir erhalten das folgende Ergebnis:

Satz 2.18 . *Sei V eine kompakte, total-geodätisch eingebettete Untermannigfaltigkeit der Codimension 2 in einem kompakten komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{CH}^n/\Gamma$ und $\rho \in \text{Iso}(\mathbb{CH}^n/\Gamma)$ eine Rotation, deren Fixpunktmenge V ist. Die Urbilder dieser Untermannigfaltigkeit unter der kanonischen Projektion $pr : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{CH}^n/\Gamma$ seien total-geodätische $\mathbb{CH}_j^{n-1}$, $j \in J$. Dann trägt $\hat{\Omega} = \mathbb{CH}^n/\Gamma \setminus V$ eine Familie vollständiger, reell-analytischer Riemannscher Metriken $(\hat{g}_\eta)_{0 < \eta \leq \eta_0}$, die*

$$-\frac{1}{\eta^2} \Lambda \leq K_\eta \leq \eta^2 \Lambda$$

mit einer dimensionsabhängigen Konstanten Λ genügt.

Dieser Satz ist insofern interessant, als sich unter den von uns ausgenutzten Bedingungen keine besseren Schranken für die Schnittkrümmung gewinnen lassen. Die Rechnung legt nahe, daß tatsächlich positive Krümmungen auftreten. Hingegen läßt sich auf einer umfassenderen Klasse von Mannigfaltigkeiten mit der gleichen Konstruktion problemlos eine C^∞ -Metrik negativer Schnittkrümmung erzielen:

Satz 2.19 . *Sei $(\bar{V}_i)_{i=1}^N$ eine Familie kompakter, total-geodätisch eingebetteter Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2 in einem kompakten komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{CH}^n/\Gamma$. Die Urbilder dieser Untermannigfaltigkeiten unter der kanonischen Projektion $pr : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{CH}^n/\Gamma$ seien total-geodätische $\mathbb{CH}_j^{n-1}$, $j \in J$, die sich paarweise orthogonal in Codimension 4-Untermannigfaltigkeiten schneiden. Dann trägt $\bar{\Omega} := \mathbb{CH}^n/\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{V}_i$ eine vollständige Riemannsche Metrik der Klasse C^∞ , deren Schnittkrümmung negativ und gleichmäßig nach unten beschränkt ist.*

Anhand unserer Rechnung läßt sich in sehr expliziter Weise verfolgen, wie sich der grundlegende Unterschied zwischen C^∞ - und C^ω -Funktionen auf den Gewinn einer Metrik mit negativer Krümmung auswirkt. Die auftretenden Terme lassen sich in zwei Kategorien einteilen, in „Nah-“ und „Fernwirkungsterme“. Während im reell-analytischen Fall die Fernwirkungsterme stets vorhanden und für das Auftreten positiver Krümmungen verantwortlich sind, lassen sie sich im C^∞ -Fall durch geeignetes Ausblenden zum Verschwinden bringen.

Der Unterschied zwischen C^∞ - und C^ω -Funktionen schlägt sich viel allgemeiner auch in der Theorie der Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Schnittkrümmung nieder (vgl. [BGS]). Viele Mannigfaltigkeiten sind aufgrund der strengen Anforderungen an ihre Topologie als Unterbau einer reell-analytischen Metrik nicht-positiver Krümmung von vornherein auszuschließen, obwohl sie eine C^∞ -Metrik mit $K \leq 0$ tragen.¹ Wir erinnern in diesem Zusammenhang z.B. an die Graph-Mannigfaltigkeiten von Gromow (siehe [G, Abschnitt 5]), die endliches Volumen,

¹Für einen Überblick über die topologischen Einschränkungen verweisen wir auch auf [AS2, Abschnitt 2].

beschränkte nicht-positive Krümmung, aber unendlich erzeugte Homologie besitzen.

Aus dem genannten Grund erweist es sich generell als schwierig, reell-analytische Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Schnittkrümmung zu konstruieren. Abgesehen von den Quotienten der hyperbolischen Räume gibt es in der Literatur daher wenig Beispiele ([AS2], [BBE], [HS], [S1], [S2]). In sämtlichen Arbeiten außer [AS2] wird auf den Beweis eines Satzes in [BG] zurückgegriffen, der ein abstraktes Argument aus der Garben-Theorie benutzt, um die Analytizität der Metrik global zu erhalten. Dagegen wird die C^ω -Metrik in [AS2] explizit durch eine Poincaré-Reihe gewonnen. In dieser Arbeit handelt es sich bei den zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten um kompakte Quotienten des hyperbolischen Raums $\mathbb{H}^n$, in denen ein Divisor (eine Familie von total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2) aufgeblasen wird. Die Analytizität der Metrik ergibt sich aus der Holomorphie einer geeignet konstruierten Fortsetzung. Der Preis für diesen konzeptionell ansprechenden Zugang ist eine umfangreiche Krümmungsberechnung und -abschätzung, die in [AS2] unter Ausnutzung von Symmetrien eindrucksvoll bewältigt wird.

Es ist nun naheliegend, danach zu fragen, ob sich in der gleichen Weise, in der dort die Metrik auf den Blow-ups gewonnen wird, auch eine reell-analytische Metrik nicht-positiver Krümmung auf Blow-ups von Divisoren in entsprechenden komplex-hyperbolischen Quotienten erhalten läßt. Das nachstehende Ergebnis läßt uns dies ausschließen. Der Grund dafür liegt hierbei jedoch nicht in der Unterschiedlichkeit von C^ω - und C^∞ -Funktionen, sondern darin, daß schon die C^∞ -Konstruktion in einer grundlegenden Situation überraschenderweise keine Metrik nicht-positiver Schnittkrümmung liefert:

Satz 3.1 . *Seien $\mathbb{CH}_1^1$ und $\mathbb{CH}_2^1$ zwei total-geodätisch eingebettete Codimension 2-Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{CH}^2$, die sich in einem Punkt orthogonal schneiden. Mit K_1 und K_2 seien die Killingfelder zu den Rotationen um diese Untermannigfaltigkeiten bezeichnet. Sei ferner $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine C^∞ - bzw. eine C^ω -Funktion mit $h(0) > 0$. Dann lassen sich die Riemannschen Metriken $g_0 + h(x_1)x_1^{-2}\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle$ und $g_0 + h(x_1)x_1^{-2}\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle + h(x_2)x_2^{-2}\langle \cdot, K_2 \rangle \langle K_2, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{CH}^2 \setminus (\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1)$ zu vollständigen Riemannschen Metriken der Klasse C^∞ bzw. C^ω auf dem Blow-up $M^4 \rightarrow \mathbb{CH}^2$ von $\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1 \subset \mathbb{CH}^2$ fortsetzen. Es treten dabei stets positive Schnittkrümmungen auf.*

Gehen wir vom Blow-up einer Familie sich paarweise orthogonal schneidender total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2 in einem kompakten $\mathbb{CH}^n/\Gamma$ aus, so erfolgt die Definition einer [AS2] entsprechenden Metrik durch eine Poincaré-Reihe in der universellen Überlagerung, d.h. in $\mathbb{CH}^n$. Dabei wird die Standardmetrik von $\mathbb{CH}^n$ in Richtung der Killingfelder zu Rotationen um die Urbilder der angesprochenen Untermannigfaltigkeiten gestreckt. Diese Urbilder sind eine abzählbare Familie von total-geodätischen $\mathbb{CH}^{n-1}$. In jedem Punkt lassen sich die bei der Krümmungsberechnung auftretenden Terme in die schon erwähnten

Nah- und Fernwirkungsterme einteilen, wobei die Nahwirkungsterme von denjenigen $\mathbb{CH}^{n-1}$ stammen, die einen „kleinen“ Abstand zu dem Punkt besitzen. Die Berechnung der aus diesen Termen stammenden Krümmung entspricht in $\mathbb{CH}^2$ genau derjenigen, die Satz 3.1 zum Gegenstand hat. Die Fernwirkungsterme dagegen liefern nur einen sehr kleinen Beitrag, mit dem das Auftreten positiver Schnittkrümmung auf dem Divisor nicht kompensiert werden kann. Damit ist erklärt, warum eine entsprechend [AS2] durchgeführte Konstruktion schon in $\mathbb{CH}^2$ nicht zum Erfolg geführt werden kann. Diese relativ grobe Argumentation sollte im Anschluß an Kapitel 2 verständlich sein.

Streckungen der Standardmetrik des komplex-hyperbolischen Raumes ziehen sich als Leitfaden durch die gesamte Arbeit. In Kapitel 1 bereiten wir die Grundlage für diese Konstruktionen, indem wir die komplex-hyperbolische Geometrie bis zu den von uns konkret benötigten Objekten (Gradientenfelder von Abstandsfunktionen zu total-geodätischen $\mathbb{CH}^{n-1}$ und Killingfelder zu Rotationen um die $\mathbb{CH}^{n-1}$) entwickeln.

Kapitel 2 bildet den Hauptteil dieser Arbeit. Durch Übernahme der in [AS2] entwickelten Konzepte erzielen wir Satz 2.5 und die oben zitierten Sätze 2.18 und 2.19. Dazu strecken wir die Standardmetrik von $\mathbb{CH}^n$ in Richtung der erwähnten Gradientenfelder. Eine Poincaré-Reihe erlaubt den Übergang zu kompakten Quotienten. Vollständigkeit der Metrik läßt sich durch die Wahl geeigneter Streckfunktionen auf dem Komplement des Divisors erzielen und die reelle Analytizität der Metrik erhalten wir aus der Holomorphie einer geeigneten Komplexifizierung. Wir diskutieren ausführlich die Unterschiede zwischen Streckungen mit reell-analytischen Funktionen und C^∞ -Funktionen mit geeignetem Träger.

In Kapitel 3 erzielen wir den bereits besprochenen Satz 3.1 mit Hilfe einer Koordinatenrechnung. Die Metrik von $\mathbb{CH}^2$ wird dabei – wie oben beschrieben – in Richtung von Killingfeldern gestreckt. Wir vergleichen die Konstruktion in $\mathbb{H}^4$ mit der dazu analogen in $\mathbb{CH}^2$ und geben eine Begründung dafür, warum sie in dem einen Fall gelingt, in dem anderen jedoch scheitert.

Kapitel 4 schließlich behandelt die Frage, inwieweit sich durch spezielle hermitesche Streckung (eine Kombinationen von Gradienten- und Killingfeldstreckung) der Standardmetrik von $\mathbb{CH}^n$ eine Kählermannigfaltigkeit erzielen läßt. Wir erhalten als Antwort das negative Ergebnis in Satz 4.1. Dieser Satz zeigt auch, daß es sinnlos ist, zu versuchen, auf den Blow-ups von Divisoren in kompakten Quotienten $\mathbb{CH}^n/\Gamma$ bzw. auf den Komplementen dieser Divisoren durch eine entsprechende Poincaré-Reihe eine Kählermetrik zu definieren.

Die Anhänge beinhalten Definitionen und Lemmata, deren ausführliche Diskussion an den benötigten Stellen den Gedankengang unterbrochen hätte. So behandelt Anhang A die für die gesamte Krümmungsberechnung in Kapitel 2 grundlegende Definition des $\otimes$ -Produktes und einige seiner Eigenschaften. In Anhang B haben wir der Vollständigkeit halber eine in Kapitel 1 verwendete Tatsache über Spiegelungen in einem lokal-symmetrischen Raum bewiesen. Anhang C enthält ein Verfahren,

um Matrizen bestimmter Gestalt explizit zu invertieren, und dessen Anwendungen in Kapitel 2. In Anhang D letztlich beweisen wir mit Hilfe einer Symmetrieforderung einige in Abschnitt 2.6 benötigte Lemmata.

1. KOMPLEX-HYPERBOLISCHE GEOMETRIE

Der komplex-hyperbolische Raum $\mathbb{CH}^n$ stellt ein Standardbeispiel für eine reell-analytische, homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit dar. Er bildet mit den anderen hyperbolischen Räumen $\mathbb{H}^n = \mathbb{RH}^n$, $\mathbb{HH}^n$ und $\mathbb{OH}^2$ die symmetrischen Räumen vom nicht-kompakten Typ mit Rang 1. In gewisser Hinsicht ist er das Gegenstück zum komplex-projektiven Raum $\mathbb{CP}^n$ im Bereich negativer Krümmung. Viele Konstruktionen lassen sich in beiden Fällen völlig analog durchführen und verhalten sich ähnlich dual zueinander wie die von $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ und $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. So gesehen gehört $\mathbb{CH}^n$ zu den einfachsten Modellräumen. Wir diskutieren in diesem Kapitel, das die Grundlage der folgenden bildet, die elementaren Eigenschaften von $\mathbb{CH}^n$ ausführlich und erklären somit auch die von uns verwendete Notation. Erst im letzten Teil des zweiten Abschnitts behandeln wir speziellere Themen wie Rotationen um und Abstandsfunktionen zu total-geodätischen $\mathbb{CH}^{n-1}$.

1.1. Grundlagen. Wir bezeichnen mit $\tilde{q} := \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle := -dz^0 d\bar{z}^0 + dz^1 d\bar{z}^1 + \dots + dz^n d\bar{z}^n$ die hermitesche Form der Signatur $(n, 1)$ auf $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$ und mit $\mathbb{C}^{n,1}$ den mit dieser Form versehenen komplexen Vektorraum, desweiteren mit $q = \operatorname{Re} \tilde{q}$ die Standardform der Signatur $(2n, 2)$ auf dem als reellen Vektorraum aufgefaßten $\mathbb{C}^{n,1}$. $M^{2n+1} := \{z \in \mathbb{C}^{n,1} \mid q(z, z) = -1\}$ ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit der Codimension 1 von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit $T_z M^{2n+1} = \{w \in \mathbb{C}^{n,1} \mid q(z, w) = 0\}$. Auf ihr stellt $q|_{T_z M^{2n+1} \times T_z M^{2n+1}}$ eine Lorentz-Metrik dar.² Die kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$ von Vektorfeldern³ $\bar{Y}$ auf M^{2n+1} in Richtung $\bar{X}$ ist gegeben durch den Tangentialanteil der kovarianten Ableitung auf $\mathbb{C}^{n,1}$: $\tilde{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}|_z = (d_{\bar{X}} \bar{Y}|_z)^{\tan}$, wobei $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ in der üblichen Weise auf eine offene Umgebung von z in $\mathbb{C}^{n,1}$ fortgesetzt werden.

$U(1)$ operiert isometrisch auf M^{2n+1} vermöge $(\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z$. Der komplex-hyperbolische Raum $\mathbb{CH}^n$ ist der topologische Quotient $M^{2n+1}/U(1)$ und $\pi : M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CH}^n$, $z \mapsto U(1) \cdot z$ die kanonische Projektion. Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{CH}^n \rightarrow B_{\mathbb{C}^n}(0, 1)$, $U(1) \cdot z \mapsto (\frac{z^1}{z^0}, \dots, \frac{z^n}{z^0})$ und die reell-analytische Abbildung $\psi : B_{\mathbb{C}^n}(0, 1) \rightarrow M^{2n+1}$, $(w^1, \dots, w^n) \mapsto w := (1, w^1, \dots, w^n) \mapsto \frac{1}{\sqrt{-q(w, w)}} w$ gemäß dem folgenden (nicht-kommutativen) Diagramm:

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{CH}^n \\ & \searrow \psi & \downarrow \phi \\ & & B_{\mathbb{C}^n}(0, 1) \end{array}$$

Da $\pi \circ \psi$ offensichtlich die stetige Umkehrfunktion zu ϕ darstellt, $\phi \circ \pi$ stetig

²Jedes $z \in M^{2n+1}$ läßt sich mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens zu einer $\tilde{q}$ -ON-Basis $z, e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{C}^{n,1}$ ergänzen. Damit ist $iz, e_1, ie_1, \dots, ie_n$ eine q -ON-Basis von $T_z M^{2n+1}$.

³Mit Vektorfeldern sind in diesem Abschnitt stets reell-analytische Schnitte im Tangentialbündel gemeint.

ist und $\mathbb{CH}^n$ die Quotiententopologie trägt, ist ϕ ein Homöomorphismus. $\mathbb{CH}^n$ ist topologisch gesehen also nichts anderes als $\mathbb{R}^{2n}$. Wir legen mittels dieser einen Karte ϕ daher eine analytische Struktur auf $\mathbb{CH}^n$ fest.

Die $U(1)$ -Operation auf M^{2n+1} läßt sich parametrisieren: $(t, z) \mapsto e^{it}z$. Zu ihr gehört das Killingfeld $\bar{K}$ mit $\bar{K}|_z = iz$. Es gilt $q|_{\mathbb{R} \cdot \bar{K} \times \mathbb{R} \cdot \bar{K}} < 0$ und $q|_{\bar{K}^\perp \times \bar{K}^\perp} > 0$.⁴ Die Abbildung π ist eine Submersion, da $\ker(d\pi) = \mathbb{R} \cdot \bar{K}$ ist und somit der Horizontalraum $H_z := \bar{K}|_z^\perp = z^\perp := \{w \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \langle z, w \rangle = 0\}$ und $T_{\pi(z)}\mathbb{CH}^n$ isomorphe Vektorräume darstellen. Deswegen und wegen der analytischen $U(1)$ -Operation ist π eine Faserung, die sogenannte Hopf-Faserung. Man kann unmittelbar mittels $M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CH}^n \times U(1)$, $z \mapsto (U(1) \cdot z, \frac{z^0}{|z|^0})$ eine globale Trivialisierung von $\pi : M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CH}^n$ angeben. Die reell-analytische Abbildung $\sigma := \psi \circ \phi$ ist ein Schnitt in diesem Faserbündel, d.h. $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{CH}^n}$. Um zu zeigen, daß eine Abbildung $f : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reell-analytisch ist, genügt es, diese Eigenschaft für $\tilde{f} := f \circ \pi : M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ nachzuweisen, denn es gilt $f = \tilde{f} \circ \sigma$.

Vektorfelder X auf $\mathbb{CH}^n$ lassen sich in eindeutiger Weise durch $\tilde{X}|_z = (d\pi_{z|H_z})^{-1} \cdot X|_{\pi(z)}$ zu horizontalen Vektorfeldern $\tilde{X}$ auf M^{2n+1} liften. Mit $\lambda \in U(1)$ bezeichnen wir auch die Isometrie $z \mapsto \lambda z$ auf M^{2n+1} . Aus $\pi \circ \lambda = \pi$ folgt dann $d\pi_{\lambda z} \cdot d\lambda|_z = d\pi|_z$ und damit $d\pi_{\lambda z} \cdot \lambda \tilde{X}|_z = X|_{\pi(z)} = d\pi_{\lambda z} \cdot \tilde{X}|_{\lambda z}$. Da $\lambda \tilde{X}$ horizontal ist, gilt also $\tilde{X}|_{\lambda z} = \lambda \tilde{X}|_z$. Ist andererseits $\hat{X}$ ein Vektorfeld auf M^{2n+1} mit der Eigenschaft $d\pi|_z \cdot \hat{X}|_z = d\pi_{\lambda z} \cdot \hat{X}|_{\lambda z}$, so läßt sich über $X \circ \pi = d\pi \cdot \hat{X}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{CH}^n$ erklären, denn wegen $X|_p = d\pi_{\sigma(p)} \cdot \hat{X}|_{\sigma(p)}$ ist X ein reell-analytischer Schnitt.

Auf $\mathbb{CH}^n$ wird nun eine Riemannsche Metrik $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ so erklärt, daß π zu einer pseudo-riemannschen Submersion wird: $g_0(X, Y)|_p = q(\tilde{X}|_z, \tilde{Y}|_z)$, wobei $z \in \pi^{-1}(p)$. Wegen $\tilde{X}|_{\lambda z} = \lambda \tilde{X}|_z$ ist sie wohldefiniert. Sie ist reell-analytisch, da $g_0(X, Y)|_p = q(\tilde{X}|_{\sigma(p)}, \tilde{Y}|_{\sigma(p)})$ und $\tilde{X}|_{\sigma(p)} = d\sigma|_p \cdot X|_p + \langle d\sigma|_p \cdot X|_p, \sigma(p) \rangle \sigma(p)$. Bezeichnet ∇ die kovariante Ableitung von Vektorfeldern auf $\mathbb{CH}^n$ bezüglich g_0 , so gilt $\nabla_X Y = d\pi \cdot \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$, denn dieser Zusammenhang ist metrisch und torsionsfrei.

$\mathbb{CH}^n$ ist eine Kähler-Manigfaltigkeit: Die Multiplikation mit i auf dem Horizontalraum liefert ein Feld J von involutiven Automorphismen vermöge $J|_p \cdot Y|_p = d\pi|_z \cdot i \cdot \tilde{Y}|_z$, wobei $z \in \pi^{-1}(p)$. Wohldefiniertheit folgt aus $d\pi|_z \cdot i \cdot \tilde{Y}|_z = d(\pi \circ \lambda)|_z \cdot i \cdot \tilde{Y}|_z = d\pi_{\lambda z} \cdot i \cdot \tilde{Y}|_{\lambda z}$. J ist reell-analytisch, da $J|_p \cdot Y|_p = d\pi_{\sigma(p)} \cdot i \cdot \tilde{Y}|_{\sigma(p)}$. Weil $i \cdot \tilde{Y}$ horizontal ist, ist weiterhin $\widetilde{J \cdot Y} = i \cdot \tilde{Y}$ und daher $J \cdot J \cdot Y = -Y$. Bezüglich J ist g_0 eine Hermitesche Metrik, denn es gilt $\langle J \cdot X, J \cdot Y \rangle = q(i \tilde{X}, i \tilde{Y}) = q(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle X, Y \rangle$. Darüberhinaus ist J kovariant-parallel: $\nabla_X J \cdot Y = d\pi \cdot \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \widetilde{J \cdot Y} - J \cdot d\pi \cdot \widetilde{\nabla_X Y} = d\pi \cdot \left((d_{\tilde{X}}(i \cdot \tilde{Y}))^h - i(d_{\tilde{X}} \tilde{Y})^h \right) = 0$. Damit ist die Kähler-Bedingung erfüllt. Die entsprechende Kählerform ist gegeben durch $\omega_0(X, Y) = g_0(J \cdot X, Y)$.

$U(n, 1)$ operiert als Gruppe von Isometrien transitiv auf M^{2n+1} und – da Hopf-Fasern dabei auf Hopf-Fasern abgebildet werden – auch auf $\mathbb{CH}^n$ vermöge $A(\pi(z)) := \pi(A \cdot z)$, $A \in U(n, 1)$. $\mathbb{CH}^n$ ist daher ein homogener Raum. Der Stabilisator von $(1, 0)$ unter der $U(n, 1)$ -Operation besteht aus Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$,

⁴Für $\bar{X} \in T_z M^{2n+1}$ ist $\bar{X}^\perp = \{\bar{Y} \in T_z M^{2n+1} \mid q(\bar{X}, \bar{Y}) = 0\}$.

wobei $A \in U(n)$. Die Operation des Stabilisators auf $H_{(1,0)}$ ist die normale $U(n)$ -Operation auf $\mathbb{C}^n$. Er stabilisiert $\pi(1, 0)$, und wir haben auch auf $T_{\pi(1,0)}\mathbb{CH}^n$ eine entsprechende $U(n)$ -Operation. Diese wird später benötigt. $\mathbb{CH}^n$ ist global symmetrisch, da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \in U(n, 1)$ eine involutive Isometrie von $\mathbb{CH}^n$ liefert, die $\pi(1, 0)$ als isolierten Fixpunkt besitzt, und $\mathbb{CH}^n$ homogen ist.

Sämtliche Geodätischen von $\mathbb{CH}^n$ lassen sich explizit beschreiben: Sei $p \in \mathbb{CH}^n$, $X \in T_p\mathbb{CH}^n$ mit $|X| = 1$. Ist $z \in \pi^{-1}(p)$ und $\tilde{X}$ der horizontale Lift von X , so ist $\tilde{c}(t) = \cosh t \cdot z + \sinh t \cdot \tilde{X}$ eine horizontale Geodätische von M^{2n+1} , d.h. $\frac{\nabla}{dt}\dot{\tilde{c}}(t) = 0$ und $\dot{\tilde{c}}(t) \in H_{\tilde{c}(t)} \forall t \in \mathbb{R}$, und damit $\pi \circ \tilde{c}$ die Geodätische von $\mathbb{CH}^n$ mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X$, wie sich unmittelbar nachrechnen läßt. Da die Geodätischen auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt sind, folgt unmittelbar, daß $\mathbb{CH}^n$ vollständig ist.

Auch die Jacobifelder stehen uns direkt zur Verfügung: Um längs der Geodätischen c mit $c(0) = p = \pi(z)$ und $\dot{c}(0) = X$, $|X| = 1$ das normale Jacobifeld Z mit $Z(0) = 0$, $\frac{\nabla}{dt}Z(0) = Y$, $|Y| = 1$, $\langle X, Y \rangle = 0$ zu bestimmen, betrachten wir den horizontalen Lift $\tilde{c}$ von c sowie eine Variation von $\tilde{c}$, die aus horizontalen Geodätischen von M^{2n+1} besteht: $\tilde{c}(s, t) = \cosh t \cdot z + \sinh t (\cos s \cdot \tilde{X} + \sin s \cdot \tilde{Y})$, $s, t \in \mathbb{R}$. Dieser Variation entspricht eine geodätische Variation $c = \pi \circ \tilde{c}$. Auf M^{2n+1} gehört zu $\tilde{c}$ und $\tilde{Y}$ das normale Jacobifeld $\hat{Z}(t) = \frac{\partial}{\partial s}\tilde{c}(s, t)|_{s=0} = \sinh t \cdot \hat{Y}(t)$, wobei durch $\hat{Y}(t) := \tilde{Y}$ ein paralleles Vektorfeld längs $\tilde{c}$ erklärt wird. Das normale Jacobifeld zu c und Y ist gegeben durch $Z(t) = \frac{\partial}{\partial s}c(s, t)|_{s=0} = d\pi|_{\tilde{c}(t)} \cdot \hat{Z}(t) = \sinh t \cdot d\pi|_{\tilde{c}(t)} \cdot \hat{Y}(t) = \sinh t \cdot Y(t)$, wobei $Y(t) = d\pi|_{\tilde{c}(t)} \cdot \hat{Y}(t)$. Um diese letzte Beziehung in intrinsischen Daten zu beschreiben, betrachten wir zwei Spezialfälle, aus denen sich die allgemeine Situation ergibt, und legen dabei zugleich die Grundlage für die Krümmungsberechnung:

Sei zunächst $\langle Y, J \cdot X \rangle = 0$, d.h. insgesamt $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle = 0$. Dann ist $\hat{Y}(t)$ horizontal für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $\hat{Y}(t) = \tilde{Y}(t)$. Somit folgt aus $\frac{\nabla}{dt}\hat{Y}(t) = 0$ sofort $\frac{\nabla}{dt}Y(t) = 0$. Das gesuchte Jacobifeld Z ist also gegeben durch $Z(t) = \sinh t \cdot Y(t)$, wobei $Y(t)$ die parallele Fortsetzung von Y ist. Die Jacobifeld-Gleichung liefert dann $R_0(Z(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = -\frac{\nabla^2}{dt^2}Z(t) = -Z(t)$. Aufgrund der Symmetrie von $\mathbb{CH}^n$ liefert Differentiation $R_0(\frac{\nabla}{dt}Z(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = -\frac{\nabla}{dt}Z(t)$. Ausgewertet bei $t = 0$ folgt $R_0(Y, X)X = -Y$.

Nun sei $Y = J \cdot X$. Dann errechnet sich der horizontale Lift von Y zu $\tilde{Y}(t) = i\tilde{X} + \langle i\tilde{X}, \tilde{c}(t) \rangle \tilde{c}(t) = \cosh t \cdot i\dot{\tilde{c}}(t)$, und daher ist $Z(t) = \sinh t \cosh t \cdot J|_{c(t)}\dot{c}(t)$. Dabei ist $J\dot{c}$ parallel längs c . Es gilt deshalb $R_0(Z(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = -\frac{\nabla^2}{dt^2}Z(t) = -4Z(t)$. Analog zur vorigen Betrachtung folgt $R_0(Y, X)X = -4Y$.

Aus beiden Fällen läßt sich leicht ableiten, daß für die Schnittkrümmung $-4 \leq K(\mathbb{CH}^n) \leq -1$ gilt. Damit erweist sich $\mathbb{CH}^n$ als Hadamard-Mannigfaltigkeit⁵. Die Ungleichung ist scharf für $n \geq 2$, dagegen gilt $K(\mathbb{CH}^1) = -4$. $\mathbb{CH}^1$ ist also nichts anderes als ein skalierter $\mathbb{H}^2$. Desweiteren erkennt man, daß für beliebige $X, Y \in T_p\mathbb{CH}^n$ gilt:

$$(1.2) \quad R_0(Y, X)X = -3\langle Y, J \cdot X \rangle J \cdot X - \langle X, X \rangle Y + \langle Y, X \rangle X.$$

⁵Siehe [BGS].

Anwendung der Identität

$$(1.3) \quad \begin{aligned} 3 R(X, Y) Z &= R(X, Y+Z)(Y+Z) - R(Y, X+Z)(X+Z) \\ &\quad - R(X, Y)Y + R(Y, X)X - R(X, Z)Z + R(Y, Z)Z \end{aligned}$$

liefert

$$(1.4) \quad \begin{aligned} R_0(X, Y)Z &= \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X \\ &\quad + \langle J \cdot X, Z \rangle J \cdot Y - \langle J \cdot Y, Z \rangle J \cdot X + 2 \langle J \cdot X, Y \rangle J \cdot Z. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den $(4, 0)$ -Krümmungstensor $R_0^\sharp = \langle R_0(\cdot, \cdot), \cdot \rangle$:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} R_0^\sharp(X, Y; Z, W) &= -\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad - \omega_0(X, W) \omega_0(Y, Z) + \omega_0(X, Z) \omega_0(Y, W) + 2 \omega_0(X, Y) \omega_0(Z, W) \\ &= -(g_0 \otimes g_0 + \omega_0 \otimes \omega_0)(X, Y; Z, W). \end{aligned}$$

Die Definition des $\otimes$ -Produktes zweier Bilinearformen findet sich Anhang A. Dort wird auch gezeigt, daß $0 \leq \omega_0 \otimes \omega_0(X, Y; Y, X) \leq 3 g_0 \otimes g_0(X, Y; Y, X)$ gilt. An dieser Ungleichung läßt sich die Schnittkrümmung von $\mathbb{CH}^n$ erneut ablesen.

Die explizite Kenntnis der Jacobifelder gestattet desweiteren die Berechnung der Volumina metrischer Bälle. Bezeichnen ν_{g_0} und $\nu_{\exp_p^* g_0}$ die kanonischen Maße auf $(\mathbb{CH}^n, g_0)$ bzw. $(T_p \mathbb{CH}^n, \exp_p^* g_0)$ sowie μ das kanonische Maß auf $(T_p \mathbb{CH}^n, g_0)$, ω das kanonische Maß auf $\{X \in T_p \mathbb{CH}^n \mid |X| = g_0(X, X)^{\frac{1}{2}} = 1\}$ und ist $e_1, \dots, e_{2n}$ eine ON-Basis von $(T_p \mathbb{CH}^n, g_0)$, so ist das Volumen gegeben durch

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \nu_{g_0}(B(p, R)) &= \exp_p^* \nu_{g_0}(B(0, R) \subset T_p \mathbb{CH}^n) = \nu_{\exp_p^* g_0}(B(0, R)) \\ &= \int_{B(0, R)} \sqrt{\det(\exp_p^* g_0|_X(e_i, e_j))} d\mu \\ &= \int_0^R \int_{|X|=1} t^{2n-1} \sqrt{\det(\exp_p^* g_0|_{tX}(e_i, e_j))} d\omega dt \\ &= \int_0^R \int_{|X|=1} t^{2n-1} \sqrt{\det(g_0|_{\exp_p(tX)}(W_i(1), W_j(1)))} d\omega dt, \end{aligned}$$

wobei W_i ein Jacobifeld längs $s \mapsto \exp_p(stX)$ mit $W_i(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{ds} W_i(0) = e_i$ ist. Da die Gram-Determinante unabhängig von der ON-Basis ist, läßt sich insbesondere jeweils $e_1 = X$ und $e_2 = J \cdot X$ wählen; desweiteren ist $W_i(s) = \frac{1}{t} Z_i(st)$, falls Z_i das Jacobifeld längs $s \mapsto \exp_p(sX)$ mit $Z_i(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{ds} Z_i(0) = e_i$, und wir haben

$$(1.7) \quad \begin{aligned} g_0|_{\exp_p(tX)}(W_i(1), W_j(1)) &= \frac{1}{t^2} g_0|_{\exp_p(tX)}(Z_i(t), Z_j(t)) \\ &= \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} t^2 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & \sinh^2 t \cosh^2 t & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & \sinh^2 t & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & \sinh^2 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$(1.8) \quad t^{2n-1} \sqrt{\det(g_0|_{\exp_p(tX)}(W_i(1), W_j(1)))} = \sinh^{2n-1} t \cosh t.$$

Insgesamt folgt

$$(1.9) \quad \text{vol}(B(p, R)) = \text{vol}(S^{2n-1}, \text{can}) \frac{1}{2n} \sinh^{2n} R = \frac{\pi^n}{n!} \sinh^{2n} R.$$

Das Volumen eines Balles hängt also, von der Homogenität erzwungen, nur vom Radius ab.

1.2. Total-geodätische Untermannigfaltigkeiten. $\mathbb{CH}^n$ besitzt eine große Zahl von total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten⁶, jedoch für $n \geq 2$ keine der Codimension 1. In diesem Fall lassen sie sich wie folgt klassifizieren:

- (1) Durchschnitte von komplexen $k+1$ -dimensionalen Unterräumen E von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit M^{2n+1} liefern $2k$ -dimensionale total-geodätische Untermannigfaltigkeiten $\pi(E \cap M^{2n+1})$ von $\mathbb{CH}^n$. Dabei können nur „zeitartige“ Unterräume, d.h. Unterräume, für die es ein $v \in E$ mit $\langle\langle v, v \rangle\rangle < 0$ gibt, M^{2n+1} schneiden. Daß $\pi(E \cap M^{2n+1})$ total-geodätisch ist, läßt sich leicht daran erkennen, daß E die Fixpunktmenge der linearen Isometrie $\psi \in U(n, 1)$ mit $\psi|_E = \text{id}_E$, $\psi|_{E^\perp} = -\text{id}_{E^\perp}$ von M^{2n+1} ist. Die Struktur der Untermannigfaltigkeit wird klar, wenn man die isometrische Einbettung $\tilde{F} : M^{2k+1} \hookrightarrow M^{2n+1}$, $(z^0, z^1, \dots, z^k) \mapsto z^0 w_0 + \dots + z^k w_k$ betrachtet, wobei $w_0, \dots, w_k$ eine $\tilde{q}$ -ON-Basis von E darstellen. $\tilde{F}$ bildet Hopf-Fasern auf Hopf-Fasern ab, d.h. $\tilde{F}(\lambda z) = \lambda \tilde{F}(z)$ für $\lambda \in U(1)$. Das ermöglicht die Definition der isometrischen C^ω -Einbettung $F : \mathbb{CH}^k \hookrightarrow \mathbb{CH}^n$ gemäß dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M^{2k+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{CH}^k \\ \tilde{F} \downarrow \cong & & F \downarrow \cong \\ E \cap M^{2n+1} & \xrightarrow{\pi} \pi(E \cap M^{2n+1}) \longrightarrow & \mathbb{CH}^n \end{array}$$

Anhand des Diagramms und der Surjektivität von $d\pi$ erkennt man, daß $d\pi$ ein Isomorphismus zwischen $d\tilde{F}|_z \cdot H_z = \{Z \in E \mid \langle\langle Z, \tilde{F}(z) \rangle\rangle = 0\} = E \cap H_{\tilde{F}(z)}$ und $T_{\pi \circ \tilde{F}(z)}(\pi(E \cap M^{2n+1}))$ ist. Berücksichtigt man die explizite Kenntnis der gelifteten Geodätischen, so folgt aus dieser letzten Bemerkung noch einmal, daß $\pi(E \cap M^{2n+1})$ total-geodätisch ist, denn ist c eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X \in T_p(\pi(E \cap M^{2n+1}))$, so ist $\tilde{c}(t) = \cosh t \cdot z + \sinh t \cdot \tilde{X}$ für ein $z \in \pi^{-1}(p)$ und somit $\dot{\tilde{c}}(t) \in E \cap H_{\tilde{c}(t)}$, also $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}(\pi(E \cap M^{2n+1}))$.

Zu $p \in \mathbb{CH}^n$ und paarweise orthogonalen Vektoren $X_1, J \cdot X_1, \dots, X_k, J \cdot X_k \in T_p \mathbb{CH}^n$ findet sich ein total-geodätischer $\mathbb{CH}^k = \exp_p(\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, J \cdot X_1, \dots, X_k, J \cdot X_k\})$, der durch $E = \text{span}_{\mathbb{C}}\{z, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k\}$ gegeben ist, wobei $z \in \pi^{-1}(p)$.

Anzumerken verbleibt, daß der Unterraum E durch den $\mathbb{CH}^k$ eindeutig

⁶Mit „total-geodätische Untermannigfaltigkeit“ meinen wir im folgenden „vollständige, total-geodätische Untermannigfaltigkeiten“.

bestimmt ist: Ist $\pi(E_1 \cap M^{2n+1}) = \pi(E_2 \cap M^{2n+1})$, so folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß E_1 und E_2 komplexe Unterräume von $\mathbb{C}^{n,1}$ sind, $E_1 \cap M^{2n+1} = E_2 \cap M^{2n+1}$ und daher $E_1 = E_2$.⁷ Ist $e_0, e_1, \dots, e_n$ eine $\tilde{q}$ -ON-Basis von $\mathbb{C}^{n,1}$ und $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, \dots, e_k\}$ der komplexe Unterraum zu einem $\mathbb{C}\mathbb{H}^k \subset \mathbb{C}\mathbb{H}^n$, so heißt der durch $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ eindeutig bestimmte $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-k} \subset \mathbb{C}\mathbb{H}^n$ der zu $\mathbb{C}\mathbb{H}^k$ duale $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-k}$.

- (2) Durchschnitte von reellen $k+1$ -dimensionalen zeitartigen Unterräumen E von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit M^{2n+1} liefern k -dimensionale total-geodätische Untermannigfaltigkeiten $\pi(E \cap M^{2n+1})$ von $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$. Für diese Unterräume gilt $E \cap (iE) = \emptyset$ oder äquivalent $E = \text{span}_{\mathbb{R}}\{w_0, \dots, w_k\}$, wobei $w_0, i \cdot w_0, \dots, w_k, i \cdot w_k$ paarweise orthogonal sind und $\langle w_0, w_0 \rangle = -1$. Die Abbildung $\tilde{F} : Q^+ \hookrightarrow E \cap M^{2n+1}$, $(x^0, x^1, \dots, x^k) \mapsto x^0 w_0 + \dots + x^k w_k$ ist eine isometrische Einbettung von $Q^+ = \{x \in \mathbb{R}^{k,1} \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 = -1, x^0 > 0\}$ nach M^{2n+1} , wobei $\tilde{F}(Q^+) \cap U(1) \cdot \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x)$ gilt, also in jeder Hopf-Faser nur ein Bildpunkt liegt. Dadurch erhält man eine isometrische C^ω -Einbettung $F : \mathbb{H}^k \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{H}^n$, $F = \pi \circ \tilde{F}$.

$$\begin{array}{ccc} Q^+ & \xlongequal{\quad} & \mathbb{H}^k \\ \tilde{F} \downarrow \cong & & F \downarrow \cong \\ E \cap M^{2n+1} & \xrightarrow{\pi} \pi(E \cap M^{2n+1}) \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbb{H}^n \end{array}$$

$d\pi$ ist ein Isomorphismus zwischen $d\tilde{F}_x \cdot T_x Q^+ = E \cap H_{\tilde{F}(x)}$ und $T_{F(x)}(\pi(E \cap M^{2n+1}))$. Genau wie oben folgt, daß $\pi(E \cap M^{2n+1})$ total-geodätisch ist.

Zu $p \in \mathbb{C}\mathbb{H}^n$ und $X_1, J \cdot X_1, \dots, X_k, J \cdot X_k \in T_p \mathbb{C}\mathbb{H}^n$, paarweise orthogonal, findet sich ein total-geodätischer $\mathbb{H}^k = \exp_p(\text{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \dots, X_k\})$. $E = \text{span}_{\mathbb{R}}\{z, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k\}$, wobei $z \in \pi^{-1}(p)$, liefert das Gewünschte.

Der Unterraum E ist durch $\pi(E \cap M^{2n+1}) = \mathbb{H}^k$ nicht eindeutig festgelegt: Aus $\pi(E_1 \cap M^{2n+1}) = \pi(E_2 \cap M^{2n+1})$ folgt für $z \in E_1 \cap M^{2n+1}$ nur, daß $\lambda z \in E_2 \cap M^{2n+1}$ für ein $\lambda \in U(1)$. Dann liefert $T_{\pi(z)} \mathbb{H}^k = d\pi|_{\lambda z} \cdot (E_2 \cap H_{\lambda z}) = d\pi|_z \cdot (E_1 \cap H_z) = d(\pi \circ \lambda)|_z \cdot (E_1 \cap H_z) = d\pi|_{\lambda z} \cdot ((\lambda E_1) \cap H_{\lambda z})$, daß $\lambda E_1 = E_2$. Umgekehrt liefern E_1 und λE_1 tatsächlich den gleichen $\mathbb{H}^k$.

Um die Vollständigkeit dieser Aufzählung zu beweisen, beschränken wir uns zunächst auf den Fall $n=2$ und Codimension 2: Es sei also V eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit der Codimension 2 in $\mathbb{C}\mathbb{H}^2$, $p \in V$. Dann ist $V = \exp_p W$, $W = T_p V$. Seien X, Y eine ON-Basis von W . Wir betrachten die Geodätische c mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ sowie das Vektorfeld n längs c mit $n(0) = Y$ und $\frac{\nabla}{dt} n(t) = 0$. Da $V = \exp_p(\text{span}\{\dot{c}(0), n(0)\})$ total-geodätisch ist, gilt $T_{c(t)} V = \text{span}\{\dot{c}(t), n(t)\}$. Das Jacobifeld Z mit $Z(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt} Z(0) = Y$ ist das Variationsvektorfeld der zuvor angegebenen geodätischen Variation $c(s, t)$; es gilt $\dot{c}(s, 0) = \cos s \cdot X + \sin s \cdot Y \in T_p V$, woraus $c(s, t) \in V$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ folgt und damit $Z(t) \in T_{c(t)} V$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da Jacobifelder mit normalen Anfangsdaten normal bleiben, ergibt sich

⁷Ist $E_1 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{w_0, \dots, w_k\}$, wobei $w_0, i \cdot w_0, \dots, w_k, i \cdot w_k$ paarweise orthogonal sind und $\langle w_0, w_0 \rangle = -1$, so sind $w_0 \in M^{2n+1}$ und $\sqrt{2} w_0 + w_l \in M^{2n+1}$ für $1 \leq l \leq k$.

$Z(t) = f(t) \cdot n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist f eine reell-analytische Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(t) \neq 0$ für $t \neq 0$, da es keine konjugierten Punkte gibt. Die Jacobische Differentialgleichung liefert dann $\ddot{f}(t) \cdot n(t) + f(t) \cdot R_0(n(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = 0$, d.h. $n(t)$ ist ein Eigenvektor des Endomorphismus $R_0(\cdot, \dot{c}(t))\dot{c}(t)$ auf $T_{c(t)}\mathbb{CH}^2$. Aus (1.2) folgt jetzt unmittelbar, daß $n(t) = \pm J \cdot \dot{c}(t)$ oder $n(t) \in (\text{span}\{\dot{c}(t), J \cdot \dot{c}(t)\})^\perp$. Im ersten Fall ist V gemäß (1) ein isometrisch eingebetteter $\mathbb{CH}^1$, im zweiten gemäß (2) ein isometrisch eingebetteter $\mathbb{H}^2$.

Als zweites zeigen wir, daß es für $n \geq 2$ keine total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Codimension 1 in $\mathbb{CH}^n$ gibt. Sei daher V eine solche Untermannigfaltigkeit. Aufgrund der Homogenität von $\mathbb{CH}^n$ sei o.E. $p = \pi(1, 0) \in V$. Dann ist $V = \exp_p W$, $W = T_p V$, $\dim W = 2n - 1$. Sei $e_1, \dots, e_{2n}$ eine ON-Basis von $T_p \mathbb{CH}^n$, derart daß $e_2, \dots, e_{2n}$ eine ON-Basis von W bilden. Wir betrachten die Spiegelung $S_{e_1} : X \mapsto X - 2 \langle X, e_1 \rangle e_1$ an W . Aus $\nabla R_0 = 0$ folgt, daß S_{e_1} eine Isometrie von $(T_p \mathbb{CH}^n, \exp_p^* g_0)$ darstellt⁸, die $0 \in T_p \mathbb{CH}^n$ fix läßt. Auf $T_p \mathbb{CH}^n$ operiert $U(n)$ als Stabilisator von 0. Die Spiegelung $S_{A \cdot e_1} = A \cdot S_{e_1} \cdot A^{-1}$ an $A \cdot W$ mit $A \in U(n)$ stellt somit ein Element des Stabilisators dar. Da die Operation von $U(n)$ auf $T_p \mathbb{CH}^n$ transitiv ist, lassen sich Spiegelungen S_e längs beliebiger Einheitsvektoren $e \in T_p \mathbb{CH}^n$ erzielen; diese erzeugen die orthogonale Gruppe $O(2n)$, die transitiv auf $\{E \subset T_p \mathbb{CH}^n \mid E \text{ 2-dim.-Unterraum}\}$ operiert. Damit ist die Schnittkrümmung $K|_p$ konstant – im Widerspruch zur Rechnung. Es kann also keine total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2 geben.

Sei nun V eine beliebige total-geodätische Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{CH}^n$, $p \in V$, $W = T_p V$, $\dim V = \dim W = m$. Sei $X_1, J \cdot X_1, \dots, X_k, J \cdot X_k$ eine ON-Basis von $W \cap J \cdot W$ und $Y_1, \dots, Y_l$ eine ON-Basis von $(W \cap J \cdot W)^\perp$. Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

$k \neq 0, l \neq 0$:

Da Durchschnitte total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten total-geodätisch sind und durch $X_1, J \cdot X_1, Y_1, J \cdot Y_1$ ein total-geodätischer $\mathbb{CH}^2$ gegeben ist, ist $V \cap \exp_p(\text{span}\{X_1, J \cdot X_1, Y_1, J \cdot Y_1\}) = \exp_p(\text{span}\{X_1, J \cdot X_1, Y_1\})$ total-geodätisch. Damit hätten wir jedoch eine total-geodätische Codimension 1-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{CH}^2$ gefunden, was den vorangegangenen Überlegungen widerspräche. Dieser Fall ist also ausgeschlossen.

$k = m/2, l = 0$:

Gemäß Aufzählungspunkt (1) liegt ein total-geodätischer $\mathbb{CH}^k$ vor.

$k = 0, l = m$:

$Y_1, \dots, Y_m$ ist in diesem Fall eine ON-Basis von W . Seien $1 \leq \mu < \nu \leq m$ beliebig und $Y_\mu, J \cdot Y_\mu, Y_\nu, J \cdot Y_\nu$ eine ON-Basis von $W_{\mu\nu} := \text{span}\{Y_\mu, J \cdot Y_\mu, Y_\nu, J \cdot Y_\nu\}$. $\exp_p(W_{\mu\nu})$ ist damit ein total-geodätischer $\mathbb{CH}^2$. $V \cap \exp_p(W_{\mu\nu}) = \exp_p(\text{span}\{Y_\mu, Y_\nu\})$ ist total-geodätisch. Wegen $Y_\mu \neq \pm J \cdot Y_\nu$ folgt aus der Kenntnis sämtlicher total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2 von $\mathbb{CH}^2$, daß $\langle Y_\mu, J \cdot Y_\nu \rangle = 0$. Da μ und ν beliebig waren,

⁸Siehe Anhang B.

bilden $Y_1, J \cdot Y_1, \dots, Y_m, J \cdot Y_m$ ein paarweise orthogonales System. Nach Aufzählungspunkt (2) liegt daher ein total-geodätischer $\mathbb{H}^m$ vor.

Damit sind sämtliche total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{CH}^n$ in der Aufzählung erfaßt.

Direkt aus dem Durchschnittverhalten der zugehörigen Unterräume folgt das Durchschnittverhalten der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten:

- Sei $1 \leq k \leq l < n$. Der Durchschnitt eines total-geodätischen $\mathbb{CH}^k$ mit einem total-geodätischen $\mathbb{CH}^l$ ist entweder leer oder ein $\mathbb{CH}^m$ mit $\min\{0, k+l-n\} \leq m \leq k$, wobei wir unter $\mathbb{CH}^0$ einen Punkt verstehen. Die zugehörigen komplexen Unterräume E_1 und E_2 von $\mathbb{C}^{n,1}$ schneiden sich nämlich in dem komplexen Unterraum $E_1 \cap E_2$. Ist $z \in E_1 \cap E_2 \cap M^{2n+1}$, so sind $E_1 \cap z^\perp$ und $E_2 \cap z^\perp$ zwei komplexe Unterräume von $z^\perp$ mit Codimensionen $n-k$ und $n-l$, die sich demzufolge in einem komplexen Unterraum von $z^\perp$ mit einer Dimension von mindestens $k+l-n$ schneiden. Enthält dagegen $E_1 \cap E_2$ keinen zeitartigen Vektor, d.h. gilt $E_1 \cap E_2 \cap M^{2n+1} = \emptyset$, so sind $\mathbb{CH}^k$ und $\mathbb{CH}^l$ zwangsläufig disjunkt. Zu einem durch den Unterraum E gegebenen $\mathbb{CH}^{n-1}$ gibt es stets unendlich viele disjunkte $\mathbb{CH}^{n-1}$. Ist nämlich $e_0, \dots, e_n$ eine ON-Basis von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$ und $E = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$, so bilden die $\pi(\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0 + \mu e_n, e_1, \dots, e_{n-1}\} \cap M^{2n+1})$ für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < 1$ eine Schar disjunkter $\mathbb{CH}^{n-1}$.
- Sei $1 \leq k < n$ und $2 \leq l \leq n$. Der Durchschnitt eines total-geodätischen $\mathbb{CH}^k$ mit einem total-geodätischen $\mathbb{H}^l$ ist entweder leer oder ein $\mathbb{H}^m$ mit $\min\{0, k+l-n\} \leq m \leq \min\{k, l\}$, wobei mit einem $\mathbb{H}^1$ eine Geodätische und mit einem $\mathbb{H}^0$ ein Punkt vorliegt. E_1 sei der zu $\mathbb{CH}^k$ gehörende komplexe Unterraum von $\mathbb{C}^{n,1}$ und E_2 der zu $\mathbb{H}^l$ gehörende reelle Unterraum. Ist $z \in E_1 \cap E_2 \cap M^{2n+1}$, so sind $E_1 \cap z^\perp$ und $\text{span}_{\mathbb{C}}(E_2 \cap z^\perp)$ zwei komplexe Unterräume von $z^\perp$ mit Codimensionen $n-k$ und $n-l$, die sich in einem komplexen Unterraum von $z^\perp$ mit einer Dimension von mindestens $k+l-n$ schneiden. Der Durchschnitt dieses Unterrums mit $E_2 \cap z^\perp$ liefert einen reellen Unterraum derselben Dimension. Gilt andererseits $E_1 \cap E_2 \cap M^{2n+1} = \emptyset$, so folgt direkt $\mathbb{CH}^k \cap \mathbb{H}^l = \emptyset$. Zu einem durch $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ gegebenen $\mathbb{CH}^{n-1}$ findet sich mit $\pi(\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_0 + \alpha i e_1, e_1, \dots, e_n\} \cap M^{2n+1})$ für $0 < \alpha < 1$ eine Schar disjunkter $\mathbb{H}^n$, falls $e_0, \dots, e_n$ eine ON-Basis von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$ ist. Umgekehrt gibt es auch zu einem durch $\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, \dots, e_n\}$ gegebenen $\mathbb{H}^n$ mit $\pi(\text{span}_{\mathbb{C}}\{\sqrt{2}e_0 + \lambda e_n, e_1, \dots, e_{n-1}\} \cap M^{2n+1})$, wobei $\lambda \in U(1)$ und $\lambda \neq 1$, stets unendlich viele davon disjunkte $\mathbb{CH}^{n-1}$.
- Sei $2 \leq k \leq l \leq n$. Der Durchschnitt eines total-geodätischen $\mathbb{H}^k$ mit einem total-geodätischen $\mathbb{H}^l$ ist entweder leer oder ein total-geodätischer $\mathbb{H}^m$ mit $0 \leq m \leq k$, denn die Durchschnitte reeller Unterräume sind wieder reell. Zu jedem $\mathbb{H}^n$ findet sich in $\pi(\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_0 + \alpha i e_1, e_1, \dots, e_n\} \cap M^{2n+1})$ für $0 < \alpha < 1$ eine Schar disjunkter $\mathbb{H}^n$, falls $e_0, \dots, e_n$ eine ON-Basis von

$\mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle\langle e_0, e_0 \rangle\rangle = -1$ und $\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, \dots, e_n\}$ der zugehörige Unterraum ist.

Rotationen um total-geodätische $\mathbb{CH}^{n-1}$ lassen sich wie folgt beschreiben: Wir betrachten den zu einem gegebenen $\mathbb{CH}^{n-1}$ gehörenden Unterraum $E = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, \dots, e_{n-1}\} \subset \mathbb{C}^{n,1}$, wobei $e_0, \dots, e_n$ eine $\tilde{q}$ -ON-Basis von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle\langle e_0, e_0 \rangle\rangle = -1$ ist, sowie die Einparameter-Gruppe von E -fixierenden Isometrien $\tilde{\vartheta} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow U(n, 1)$, $\tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot z = z + (e^{i\varphi} - 1) \langle\langle z, e_n \rangle\rangle e_n$, d.h. $\tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot e_k = e_k$, für $0 \leq k \leq n-1$, und $\tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot e_n = e^{i\varphi} \cdot e_n$.⁹ Auf diese Weise erhalten wir eine Einparameter-Gruppe von Isometrien $\vartheta : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{CH}^n)$, die den $\mathbb{CH}^{n-1}$ fixieren, vermöge $\vartheta(\varphi) \cdot p = \pi(\tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot z)$, mit $z \in \pi^{-1}(p)$ beliebig. Das zugehörige Killing-Feld lautet

$$(1.10) \quad \begin{aligned} K_{|\pi(z)} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vartheta(\varphi) \cdot \pi(z)) \Big|_{\varphi=0} = d\pi|_z \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot z) \Big|_{\varphi=0} \\ &= d\pi|_z \cdot i \langle\langle z, e_n \rangle\rangle e_n = d\pi|_z \cdot \tilde{K}|_z, \end{aligned}$$

wobei

$$(1.11) \quad \tilde{K}|_z = i \langle\langle z, e_n \rangle\rangle e_n + i |\langle\langle z, e_n \rangle\rangle|^2 z$$

der horizontale Lift von $K_{|\pi(z)}$ ist. Als Abkürzung führen wir

$$(1.12) \quad x_{|\pi(z)} := \tilde{x}|_z = |\langle\langle z, e_n \rangle\rangle|^2$$

ein, dann gilt

$$(1.13) \quad \langle K_{|\pi(z)}, K_{|\pi(z)} \rangle = q(\tilde{K}|_z, \tilde{K}|_z) = \tilde{x}|_z (1 + \tilde{x}|_z) = x_{|\pi(z)} (1 + x_{|\pi(z)}).$$

Desweiteren bezeichnen wir mit $\xi := x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}K$ das außerhalb des $\mathbb{CH}^{n-1}$ erklärte normierte Killing-Feld.

Im folgenden beschäftigen wir uns näher mit der Abstandsfunktion $r(\cdot) = \text{dist}(\cdot, \mathbb{CH}^{n-1})$. Da der $\mathbb{CH}^{n-1}$ total-geodätisch eingebettet ist und $\mathbb{CH}^n$ eine Hadamard-Mannigfaltigkeit ist, wird der Abstand $r(p)$ eines Punktes $p = \pi(z)$ von dem $\mathbb{CH}^{n-1}$ durch genau eine Geodätische c realisiert, die den $\mathbb{CH}^{n-1}$ in einem Punkt $q = \pi(w)$, $w \in E \cap M^{2n+1}$, senkrecht schneidet. Sie sei ohne Einschränkung so parametrisiert, daß $c(0) = q$ und $c(r(p)) = p$. Ferner setzen wir $X := \dot{c}(0)$. Die Geodätische c läßt sich horizontal liften zu $\tilde{c}(t) = \cosh t \cdot w + \sinh t \cdot \tilde{X}$. Wegen $\langle\langle \tilde{X}, w \rangle\rangle = 0$ gilt $\langle\langle \tilde{c}(t), \tilde{X} \rangle\rangle = \sinh t$, insbesondere also $|\langle\langle z, \tilde{X} \rangle\rangle| = \sinh r(p)$. Daß c den $\mathbb{CH}^{n-1}$ senkrecht schneidet, bedeutet $q(\tilde{X}, E \cap H_w) = \langle X, T_q \mathbb{CH}^{n-1} \rangle = 0$. Weil $E \cap H_w$ ein komplexer Unterraum ist, folgt $\langle\langle \tilde{X}, E \cap H_w \rangle\rangle = 0$. Zusammen mit $\langle\langle \tilde{X}, w \rangle\rangle = 0$ ergibt sich $\langle\langle \tilde{X}, E \rangle\rangle = 0$, von daher gilt $\tilde{X} = \lambda \cdot e_n$ für ein $\lambda \in U(1)$. Insgesamt erhalten wir aus diesen Überlegungen:

$$(1.14) \quad |\langle\langle z, e_n \rangle\rangle| = \sinh r(\pi(z)),$$

$$(1.15) \quad x = \sinh^2 r.$$

⁹Um die Formeln möglichst übersichtlich zu halten, beschränken wir uns bei den Rotationen auf positiven Drehsinn, die Rechnungen gelten für negativen Drehsinn analog.

Aus diesem Grund wird x von jetzt an in doppelter Bedeutung benutzt. Neben der ursprünglichen Definition als C^ω -Abbildung auf $\mathbb{CH}^n$ sei mit x auch einfach die Funktion $r \mapsto \sinh^2 r$ bezeichnet.

Das zu r gehörende Gradientenfeld $v = \text{grad } r$ ist aufgrund allgemeiner Ergebnisse ein Einheitsvektorfeld. Außerdem ist es orthogonal zu ξ wegen $r(\vartheta(\varphi) \cdot p) = r(p) \implies 0 = \frac{\partial}{\partial \varphi}(r(\vartheta(\varphi) \cdot p))|_{\varphi=0} = dr|_p \cdot K|_p = \langle v|_p, K|_p \rangle$. Um jedoch die Beziehung zwischen v und ξ genau wiederzugeben, rechnen wir v explizit aus. Dazu führen wir die Funktion $\tilde{r} = r \circ \pi$, $\tilde{r}(z) = \text{Arsinh}(|\langle z, e_n \rangle|)$ ein und benutzen die Definition des Gradienten:

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad \langle v, Z \rangle &= d_Z r = d_{\tilde{Z}} \tilde{r} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+|\langle z, e_n \rangle|^2}} d_{\tilde{Z}} |\langle z, e_n \rangle| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+|\langle z, e_n \rangle|^2}} \frac{1}{|\langle z, e_n \rangle|} \cdot \frac{1}{2} \left(\langle \tilde{Z}, e_n \rangle \overline{\langle z, e_n \rangle} + \langle z, e_n \rangle \overline{\langle \tilde{Z}, e_n \rangle} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|\langle z, e_n \rangle|^2(1+|\langle z, e_n \rangle|^2)}} q(\langle z, e_n \rangle e_n, \tilde{Z}).
 \end{aligned}$$

Damit ist der horizontale Lift $\tilde{v}$ des Gradientenfeldes gegeben durch

$$(1.17) \quad \tilde{v} = \tilde{x}^{-\frac{1}{2}} (1+\tilde{x})^{-\frac{1}{2}} (\langle z, e_n \rangle e_n + |\langle z, e_n \rangle|^2 z),$$

und es gilt wegen (1.11)

$$(1.18) \quad \xi = J \cdot v \quad \text{und} \quad v = -J \cdot \xi.$$

Als nächstes berechnen wir ∇K auf $\mathbb{CH}^n \setminus \mathbb{CH}^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
 (1.19) \quad \widetilde{\nabla_X K} &= (\widetilde{\nabla_{\tilde{X}} \tilde{K}})^h \\
 &= \left[d_{\tilde{X}} \left(i \langle z, e_n \rangle e_n + i |\langle z, e_n \rangle|^2 z \right) \right]^h \\
 &= i \langle \tilde{X}, e_n \rangle e_n + i \langle \tilde{X}, e_n \rangle \langle e_n, z \rangle z + i |\langle z, e_n \rangle|^2 \tilde{X} \\
 &= |\langle z, e_n \rangle|^{-2} \langle \tilde{X}, \tilde{K} \rangle i \tilde{K} + |\langle z, e_n \rangle|^2 i \tilde{X} \\
 &= -(1 + |\langle z, e_n \rangle|^2) \langle \tilde{X}, \tilde{\xi} \rangle \tilde{v} + |\langle z, e_n \rangle|^2 i \tilde{X}.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (1.20) \quad \nabla_X K &= (1+x) (\langle X, v \rangle \xi - \langle X, \xi \rangle v) + x J \cdot X \\
 &= (1+x) D \cdot X + x J \cdot X,
 \end{aligned}$$

$$(1.21) \quad \langle \nabla_X K, Y \rangle = (1+x) d(X, Y) + x \omega_0(X, Y),$$

wobei D die 90°-Drehung in der (v, ξ) -Ebene ist und $d(\cdot, \cdot) = \langle D \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, v \rangle \langle \xi, \cdot \rangle - \langle \cdot, \xi \rangle \langle v, \cdot \rangle$ die zugehörige schiefsymmetrische Bilinearform darstellt. Speziell gilt:

$$(1.22) \quad \langle \nabla_X K, K \rangle = x^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} (1+2x) \langle X, v \rangle,$$

$$(1.23) \quad \langle \nabla_X K, \nabla_Y K \rangle = x^2 \langle X, Y \rangle + (1+x)(1+3x) p(X, Y).$$

Dabei ist $p(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, v \rangle \langle v, \cdot \rangle + \langle \cdot, \xi \rangle \langle \xi, \cdot \rangle$ die positiv-semidefinite Bilinearform zum Projektor $P = \langle \cdot, v \rangle v + \langle \cdot, \xi \rangle \xi$ auf die (v, ξ) -Ebene.

Auf $\mathbb{CH}^{n-1}$ gilt wegen $\langle z, e_n \rangle = 0$ für alle $z \in \pi^{-1}(\mathbb{CH}^{n-1})$

$$(1.24) \quad \widetilde{\nabla_X K} = i \langle \tilde{X}, e_n \rangle e_n$$

und somit

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \langle \nabla_X K, \nabla_Y K \rangle &= \operatorname{Re}(\langle \tilde{X}, e_n \rangle \langle e_n, \tilde{Y} \rangle) \\ &= q(\tilde{X}, e_n) q(\tilde{Y}, e_n) + q(\tilde{X}, ie_n) q(\tilde{Y}, ie_n). \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1.23) läßt sich ablesen, daß p eine auf ganz $\mathbb{CH}^n$ erklärbare, reell-analytische, positiv-semidefinite Bilinearform ist, die für $p \in \mathbb{CH}^{n-1}$ mit $\langle \nabla_X K, \nabla_Y K \rangle$ übereinstimmt. Es gilt daher für den zugehörigen Projektor P auf $\mathbb{CH}^{n-1}$

$$(1.26) \quad \begin{aligned} X \in \ker P &\iff \langle \tilde{X}, e_n \rangle = 0, \\ Y \in \operatorname{im} P &\iff \tilde{Y} \in \mathbb{C} \cdot e_n. \end{aligned}$$

Das Differential $d(\vartheta(\varphi))$ der Rotation $\vartheta(\varphi)$ um den $\mathbb{CH}^{n-1}$ operiert somit als Drehung um den Winkel φ auf $\operatorname{im} P|_p \subset T_p \mathbb{CH}^{n-1}$ und als Identität auf $\ker P|_p \subset T_p \mathbb{CH}^{n-1}$, denn es gilt für $p \in \mathbb{CH}^{n-1}$ mit $p = \pi(z)$ und $X \in T_p \mathbb{CH}^{n-1}$ wegen $\tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot z = z$

$$(1.27) \quad d(\vartheta(\varphi))|_p \cdot X = d\pi|_z \cdot d(\tilde{\vartheta}(\varphi))|_z \cdot \tilde{X} = d\pi|_z \cdot \tilde{\vartheta}(\varphi) \cdot \tilde{X}.$$

Wir betrachten jetzt die folgende Situation: Gegeben sind zwei total-geodätische $\mathbb{CH}^{n-1}$ in $\mathbb{CH}^n$, bezeichnet mit $\mathbb{CH}_1^{n-1}$ und $\mathbb{CH}_2^{n-1}$, die sich in einem $\mathbb{CH}^{n-2}$ orthogonal schneiden, d.h. für alle $p \in \mathbb{CH}_1^{n-1} \cap \mathbb{CH}_2^{n-1}$ gilt

$$T_p \mathbb{CH}_1^{n-1} \cap \left(T_p (\mathbb{CH}_1^{n-1} \cap \mathbb{CH}_2^{n-1}) \right)^\perp \perp T_p \mathbb{CH}_2^{n-1} \cap \left(T_p (\mathbb{CH}_1^{n-1} \cap \mathbb{CH}_2^{n-1}) \right)^\perp.$$

Es gibt also eine $\tilde{q}$ -ON-Basis $e_0, \dots, e_n$ von $\mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$, so daß $E_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, e_2, \dots, e_n\}$ und $E_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, e_1, e_3, \dots, e_n\}$. In Analogie zu obigen Überlegungen setzen wir $x_k = |\langle z, e_k \rangle|^2 = \sinh^2 r_k$ für $k = 1, 2$. Nun läßt sich leicht mittels (1.17) nachrechnen, daß

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \langle v_1, \xi_2 \rangle &= -\langle v_2, \xi_1 \rangle = q(\tilde{v}_1, x_2^{-\frac{1}{2}} \tilde{K}_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = q(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \\ &= x_1^{-\frac{1}{2}} (1+x_1)^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} (1+x_2)^{-\frac{1}{2}} |\langle z, e_1 \rangle|^2 |\langle z, e_2 \rangle|^2 \\ &= \tanh r_1 \tanh r_2. \end{aligned}$$

Wir geben auch eine intrinsische Begründung dieser Formeln: Die Rotation $\vartheta_1(\varphi) \cdot p = \pi(z + (e^{i\varphi} - 1) \langle z, e_1 \rangle e_1)$ um den total-geodätischen $\mathbb{CH}_1^{n-1}$ bildet $\mathbb{CH}_2^{n-1}$ in sich ab. Daher folgt $r_2 \circ \vartheta_1(\varphi) = r_2$ und somit Gleichung (1.28) wegen $0 = \frac{\partial}{\partial \varphi}(r_2(\vartheta_1(\varphi) \cdot p))|_{\varphi=0} = dr_{2|p} \cdot K_{1|p} = \langle v_{2|p}, K_{1|p} \rangle$ für alle $p \notin \mathbb{CH}_1^{n-1} \cup \mathbb{CH}_2^{n-1}$. Da also $\langle v_2, J \cdot v_1 \rangle = 0$ ist, spannen v_1 und v_2 den Tangentialraum eines total-geodätischen $\mathbb{H}^2$ auf. Dieser $\mathbb{H}^2$ schneidet die $\mathbb{CH}^{n-1}$ in Geodätischen, wie aus der vorangehenden Diskussion des Durchschnittsverhaltens der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten folgt, da zum einen der Durchschnitt wegen der verbindenden Geodätischen nicht leer, zum anderen aber auch nicht der ganze $\mathbb{H}^2$ ist und der nicht-leere Schnitt mindestens Dimension eins besitzt. Gleichung (1.29) ergibt sich dann gemäß Abbildung ?? aus der Tatsache, daß ein geodätisches Viereck mit drei rechten Winkeln in $\mathbb{H}^2$ vorliegt.

2. ANALYTISCHE METRIKEN AUF KOMPLEMENTEN VON DIVISOREN

In diesem Kapitel strecken wir die Standardmetrik von $\mathbb{CH}^n$ in Richtung der Gradientenfelder zu total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2, die sich paarweise orthogonal in einer Untermannigfaltigkeit der Codimension 4 schneiden, in der Weise, daß wir auf deren Komplement eine vollständige, reell-analytische Riemannsche Mannigfaltigkeit erhalten. Eine analoge Streckung der hyperbolischen Standardmetrik wurde schon in [AS1] behandelt, jedoch mit dem entscheidenden Unterschied, daß dort mit C^∞ -Funktionen gestreckt wurde, während wir den reell-analytischen Fall betrachten. Geht man zu Quotienten über, so erfordert dies die Definition einer Riemannschen Metrik durch eine Poincaré-Reihe und erzwingt somit eine andere Art der Krümmungsberechnung als in [AS1], wo die Reihen lokal zu endlichen Summen zusammenbrechen, weil die Träger der C^∞ -Funktionen geeignet gewählt werden können. Wie die analytische Streckung behandelt wird, läßt sich an [AS2] sehen. Wir übernehmen bei unseren Betrachtungen die meisten Konzepte aus dieser Arbeit. Die Ergebnisse der Überlegungen sind in Satz 2.5, Satz 2.18 und Satz 2.19 festgehalten.

2.1. Grundlagen. Wir gehen aus von einem kompaktem komplex-hyperbolischer Raum $\mathbb{CH}^n/\Gamma$ mit $n \geq 2$ und total-geodätische Untermannigfaltigkeiten $\bar{V}_i$, $1 \leq i \leq N$ der Codimension 2 mit paarweise orthogonalen Durchschnitten der Codimension 4. $pr : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{CH}^n/\Gamma$ bezeichne die kanonische Projektion. Für $n = 2$ sei zusätzlich angenommen, daß $pr^{-1}(\bar{V}_i) = \bigcup_{l \in L} \mathbb{CH}^{n-1}$. Diese Forderung ist gemäß Kapitel 1 für $n > 2$ automatisch erfüllt. Es gilt somit $pr^{-1}(\bigcup_{i=1}^N \bar{V}_i) = \bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$, mit einer abzählbaren Indexmenge J . In den weiteren Überlegungen nutzen wir nur aus, daß die Familie $(\mathbb{CH}_j^{n-1})_{j \in J}$ der folgenden Bedingung genügt (siehe [AS2]):

Axiom 2.1. Es gibt eine Konstante $d_0 > 0$, so daß

- (1) $J = \bigcup_{k=1}^{\hat{N}} J_k$, $\hat{N} \in \mathbb{N}$, mit $\text{dist}(\mathbb{CH}_{j_1}^n, \mathbb{CH}_{j_2}^n) \geq 2d_0$ für alle $j_1, j_2 \in J_k$, $j_1 \neq j_2$ und $1 \leq k \leq \hat{N}$,

- (2) zu $p \in \mathbb{CH}^n$ ein $q \in \mathbb{CH}^n$ mit der Eigenschaft existiert, daß alle $\mathbb{CH}_j^{n-1}$ mit $r_j(p) < d_0$ den Punkt q enthalten und sich paarweise orthogonal in einem $\mathbb{CH}^{n-2}$ schneiden¹⁰.

Dieses Axiom liefert unmittelbar das folgende Lemma, das benötigt wird, um Konvergenz der im weiteren auftretenden Reihen zu garantieren:

Lemma 2.1. *Sei $p \in \mathbb{CH}^n$, dann gilt:*

$$(2.1) \quad \# \{j \in J \mid r_j(p) \leq R\} \leq \frac{\widehat{N}}{\sinh^{2n} d_0} \sinh^{2n}(R + d_0).$$

Beweis. Sei $1 \leq k \leq \widehat{N}$ beliebig, $J_{k,R} := \{j \in J_k \mid r_j(p) \leq R\}$. In jedem $\mathbb{CH}_j^{n-1}$ mit $j \in J_{k,R}$ existiert ein eindeutiger Fußpunkt p_j zu p . Die Bälle $B_{\mathbb{CH}^n}(p_j, d_0)$ mit Radius d_0 um diese Fußpunkte sind aufgrund von Axiom 2.1 disjunkt, außerdem gilt aufgrund der Dreiecksungleichung $B_{\mathbb{CH}^n}(p_j, d_0) \subset B_{\mathbb{CH}^n}(p, R + d_0)$. Daher ergibt sich:

$$(2.2) \quad \# J_{k,R} \cdot \text{vol}\left(B_{\mathbb{CH}^n}(\cdot, d_0)\right) = \sum_{j \in J_{k,R}} \text{vol}\left(B_{\mathbb{CH}^n}(p_j, d_0)\right) \leq \text{vol}\left(B_{\mathbb{CH}^n}(p, R + d_0)\right).$$

Daraus folgt mittels (1.9):

$$(2.3) \quad \# J_{k,R} \leq \frac{\sinh^{2n}(R + d_0)}{\sinh^{2n} d_0}.$$

Wegen $J_R := \{j \in J \mid r_j(p) \leq R\} = \bigcup_{1 \leq k \leq \widehat{N}} J_{k,R}$ ist

$$(2.4) \quad \# J_R = \sum_{k=1}^{\widehat{N}} \# J_{k,R} \leq \widehat{N} \frac{\sinh^{2n}(R + d_0)}{\sinh^{2n} d_0}. \quad \square$$

Für die später erfolgende Krümmungsberechnung und die Konvergenzbeweise ist es zweckmäßig, $\mathbb{CH}^n$ durch folgende offene Mengen gemäß [AS2] zu überdecken:

Lemma 2.2. *Zu jeder beliebigen Teilmenge $I \subset J$ sei*

$$(2.5) \quad U_I := \left\{ p \in \mathbb{CH}^n \mid \begin{array}{ll} r_i(p) < d_0 & \forall i \in I, \\ r_j(p) > \frac{1}{2}d_0 & \forall j \in J \setminus I \end{array} \right\}.$$

Dann gilt:

- (1) $\#I > n \Rightarrow U_I = \emptyset$,
- (2) Die Familie $(U_I)_{I \subset J}$ ist eine lokal-endliche offene Überdeckung von $\mathbb{CH}^n$.

Beweis. Ergibt sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden. $\square$

¹⁰Mit zwei von diesen liegt also die am Ende von Kapitel 1 ausführlich untersuchte Situation vor.

2.2. Definition der Metrik. Wir übernehmen Definition 3.5 aus [AS2]:

Definition 2.1. Eine reell-analytische Funktion $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ genügt genau dann der *Kegelbedingung* $C_\alpha(l)$, wenn

- (1) h holomorph auf den Kegel $C_\alpha := \exp(\mathbb{R} + i \cdot (-\alpha, \alpha))$ fortgesetzt werden kann und
- (2) für jedes $\bar{\alpha} \in (0, \alpha)$ ein $c_{\bar{\alpha}}$ existiert, so daß $|h(x)| \leq c_{\bar{\alpha}} |x|^{-l}$ auf dem Kegel $C_{\bar{\alpha}} \subset C_\alpha$.

Eine für uns wesentliche Eigenschaft dieser Bedingung ist die folgende:

$$(2.6) \quad h \in C_\alpha(l) \Rightarrow h' \in C_\alpha(l+1).$$

Wir denken dabei stets an eine Funktion wie $h(x) := (1 + \delta x^2)^{-\frac{1}{2}}$, die für jedes $\delta > 0$ in $C_{\pi/2}(l)$ liegt.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum Kern dieses Abschnitts:

Definition 2.2. Auf $\Omega := \mathbb{CH}^n \setminus \bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$ definieren wir für eine reell-analytische Funktion $h : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ mit $h(0) = 1$, $h' \leq 0$ und $h \in C_\alpha(l)$ für ein $\alpha > 0$ und ein $l > n$ eine Familie Riemannscher Metriken $(g_{(\eta)})_{\eta > 0}$ vermöge $g = g_0 + \sum_{j \in J} g_j$, wobei

$$(2.7) \quad g_j := \eta^2 h(x_j) x_j^{-2} \langle \cdot, J \cdot K_j \rangle \langle J \cdot K_j, \cdot \rangle$$

und x_j entsprechend Kapitel 1 durch $x_{j|p} = \sinh^2 r_j(p)$ definiert ist.

Für jede Teilmenge $J' \subset J$ definieren wir desweiteren $g_{J'} := \sum_{j \in J'} g_j$.

Die so definierten Riemannschen Metriken sind invariant gegenüber $\gamma \in \Gamma$, d.h. $\gamma^* g = g$, weil $\gamma(\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}) = \bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$. Jede dieser Poincaré-Reihen liefert daher eine Riemannsche Metrik $\hat{g}$ auf $\hat{\Omega} := \mathbb{CH}^n / \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{V}_i = pr(\Omega)$. Die Wohl-definiertheit von Definition 2.2 wird durch die folgende Proposition gewährleistet:

Proposition 2.3. Sei $I \subset J$ eine endliche Teilmenge und g eine Riemannsche Metrik auf Ω gemäß Definition 2.2. Dann gilt:

- (1) Die Operatornorm von $g_{J \setminus I}$ ist auf U_I gleichförmig beschränkt, d.h.

$$\|g_{J \setminus I}\| = \sup\{g_j(X, X) \mid \langle X, X \rangle = 1\} \leq \eta^2 c_0,$$

wobei c_0 nur von n , h , d_0 und $\hat{N}$ abhängt.

- (2) Es gibt Konstanten c_1, c_2 , die nur von n , h , d_0 und $\hat{N}$ abhängen, so daß auf U_I

$$\begin{aligned} \|\nabla g_{J \setminus I}\| &= \left\| \sum_{j \in J \setminus I} \nabla g_j \right\| \leq \eta^2 c_1, \\ \|\nabla^2 g_{J \setminus I}\| &= \left\| \sum_{j \in J \setminus I} \nabla^2 g_j \right\| \leq \eta^2 c_2 \end{aligned}$$

gilt, insbesondere darf also g zweimal gliedweise differenziert werden.

Beweis. Zu (1): Sei $p \in U_I$ beliebig. Aufgrund der Kegelbedingung ist

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \|g_{j|p}\| &\leq \eta^2 h(x_{j|p}) x_{j|p}^{-1} (1+x_{j|p}) \leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot x_{j|p}^{-l-1} (1+x_{j|p}) \\ &\leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot (1+x_{j|p})^{-l} (1+x_{j|p}^{-1})^{l+1}. \end{aligned}$$

Für $j \in J \setminus I$ gilt nach Definition von U_I überdies $x_{j|p} > \sinh \frac{d_0}{2} =: \kappa$, so daß $(1+x_{j|p}^{-1})^{l+1} \leq (1+\kappa^{-1})^{l+1}$. Falls $j \in J_p^k := \{j \in J \setminus I \mid \frac{d_0}{2} + k - 1 < r_j(p) \leq \frac{d_0}{2} + k\}$ mit $k \geq 1$ ist, so gilt außerdem

$$(2.9) \quad (1+x_{j|p})^{-l} \leq \left(\cosh\left(\frac{d_0}{2} + k - 1\right) \right)^{-2l}.$$

Aufgrund von Lemma 2.1 ist ferner

$$(2.10) \quad \# J_p^k \leq \hat{N} \frac{\sinh^{2n}(\frac{3d_0}{2} + k)}{\sinh^{2n} d_0}.$$

Kombiniert man diese Ungleichungen, so erhält man abschließend

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \|g_{J \setminus I|p}\| &\leq \sum_{j \in J \setminus I} \|g_{j|p}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J_p^k} \|g_{j|p}\| \\ &\leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot \frac{\hat{N}}{\sinh^{2n} d_0} (1+\kappa^{-1})^{l+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sinh\left(\frac{3d_0}{2} + k\right) \right)^{2n} \left(\cosh\left(\frac{d_0}{2} + k - 1\right) \right)^{-2l}, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite nach dem Quotientenkriterium wegen $l > n$ konvergiert und unabhängig von p ist.

Zu (2): Die beiden Ungleichungen werden erst in Anhang D benötigt. Formel (2.51) liefert

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \|\nabla g_j\| &\leq 2\eta^2 |h'(x_j)| x_j^{-\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{3}{2}} + 2\eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{3}{2}} (1+x_j)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + 2\eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{3}{2}} (1+x_j)^{\frac{3}{2}} + 2\eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{3}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Der Beweis wird wie in (1) fortgeführt. Eine zu (2.12) analoge Ungleichung für $\|\nabla^2 g_j\|$ liefert die Aussage. $\square$

2.3. Analytizität der Metrik, Komplexifizierung. Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß durch g tatsächlich eine reell-analytische Metrik auf $\Omega = \mathbb{CH}^n \setminus \left(\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1} \right)$ gegeben ist. Dazu dient die folgende Proposition.

Proposition 2.4. *Sei $I \subset J$ eine endliche Teilmenge und g eine Riemannsche Metrik auf Ω gemäß Definition 2.2. Dann konvergiert $g_{J \setminus I} := \sum_{j \in J \setminus I} g_j$ auf U_I kompakt gegen eine reell-analytische positiv-semidefinite Bilinearform.*

Beweis. Da

$$(2.13) \quad g_j = \eta^2 h(x_j) x_j^{-2} \langle \cdot, J \cdot K_j \rangle \langle J \cdot K_j, \cdot \rangle$$

für $j \in J \setminus I$ eine reell-analytische Bilinearform ist, genügt es zu zeigen, daß zu jedem $p_0 \in U_I$ eine Umgebung existiert, auf der $\sum_{j \in J \setminus J'} g_j$ gleichmäßig gegen eine reell-analytische Bilinearform konvergiert, wobei J' eine endliche Teilmenge von J mit $I \subset J'$ ist, die sich im weiteren Verlauf des Beweises ergeben wird.

Zu jedem $j \in J \setminus J'$ betrachten wir dann den zu $\mathbb{CH}_j^{n-1}$ gehörigen Unterraum $E_j \subset \mathbb{C}^{n,1}$ und einen Vektor $e_j \in \mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle e_j, e_j \rangle = 1$ und $\langle e_j, E_j \rangle = 0$. Das Killingfeld K_j läßt sich dann gemäß (1.10) schreiben als $K_j = d\pi \cdot \hat{K}_j$, wobei

$$(2.14) \quad \hat{K}_{j|z} = q(z, e_j) i e_j - q(z, i e_j) e_j.$$

Außerdem gilt gemäß (1.12)

$$(2.15) \quad \tilde{x}_{j|z} = |\langle z, e_j \rangle|^2 = q(z, e_j)^2 + q(z, i e_j)^2.$$

Wir definieren für $j \in J \setminus J'$:

$$(2.16) \quad q_j = \eta^2 h(\tilde{x}_j) \tilde{x}_j^{-2} q(\cdot, i \cdot \hat{K}_j) q(i \cdot \hat{K}_j, \cdot).$$

Die q_j sind ersichtlich reell-analytisch, und es gilt $q_j(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g_j(X, Y)$. Wir werden im folgenden zeigen, daß $\sum_{j \in J \setminus J'} q_j$ in einer Umgebung¹¹ von $z_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ gleichmäßig gegen eine reell-analytische Bilinearform konvergiert. Dies läßt sich durchführen, indem man auf diesen Umgebungen eine C^0 -Schranke für die Operatornorm der entsprechenden Reihe von holomorphen Fortsetzungen der q_j angibt. Diese Fortsetzungen erhalten wir auf folgende Weise:

Wir betrachten die Komplexifizierung $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ des reellen Vektorraums $\mathbb{C}^{n,1}$. Die komplexe Struktur erhält $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ in kanonischer Weise durch die Operation $(z \otimes \lambda) \cdot \mu := z \otimes (\lambda \mu)$. Eine Basis dieses komplexen Vektorraums ist gegeben durch $(1, 0_n) \otimes 1, (i, 0_n) \otimes 1, \dots, (0_n, i) \otimes 1$, d.h. $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathbb{C}^{2n+2}$. Wir versehen $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit der komplex-bilinearen Fortsetzung von q

$$(2.17) \quad \begin{aligned} q^{\mathbb{C}}(z_1 \otimes \lambda_1 + z_2 \otimes \lambda_2, w_1 \otimes \mu_1 + w_2 \otimes \mu_2) \\ = \lambda_1 \mu_1 q(z_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 q(z_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 q(z_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 q(z_2, w_2). \end{aligned}$$

Die beiden Objekte (2.14/2.15) lassen sich unmittelbar nach dem vorhergehenden holomorph auf $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ fortsetzen:

$$(2.18) \quad \hat{K}_{j|u}^{\mathbb{C}} := q^{\mathbb{C}}(u, e_j) i e_j - q^{\mathbb{C}}(u, i e_j) e_j,$$

$$(2.19) \quad \tilde{x}_{j|u}^{\mathbb{C}} := q^{\mathbb{C}}(u, e_j)^2 + q^{\mathbb{C}}(u, i e_j)^2, \quad \text{für } u \in \mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Wir haben eine zweite Operation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ vermöge $\mu \cdot (z \otimes \lambda) := (\mu z) \otimes \lambda$. Diese Operation liefert wegen $\lambda \cdot (u \cdot \mu) = (\lambda \cdot u) \cdot \mu$ für $u \in \mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ einen $\mathbb{C}$ -Automorphismus von $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ vermöge $u \mapsto \lambda \cdot u$. Insbesondere ist also die Abbildung $u \mapsto i \cdot u$ holomorph, und daher auch $i \cdot \hat{K}_j^{\mathbb{C}}$.

Damit sind die ersten Schritte in Richtung einer Fortsetzung von q_j zu einer holomorphen Bilinearform $q_j^{\mathbb{C}}$ auf Umgebungen von Punkten aus M^{2n+1} getan. Im folgenden müssen wir uns noch über die Wohldefiniertheit von $h \circ \tilde{x}_j^{\mathbb{C}}$ und $(\tilde{x}_j^{\mathbb{C}})^{-2}$ Gedanken machen. Dazu nutzen wir die Homogenität von $\mathbb{CH}^n$ aus und setzen deshalb ohne Einschränkung $z_0 = (1, 0_n) \in \mathbb{C}^{n,1}$.

Als Norm auf $\mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ legen wir die Standardnorm von $\mathbb{C}^{2n+2}$ zugrunde: Ist $u = (1, 0_n) \otimes u^1 + (i, 0_n) \otimes u^2 + \dots + (0_n, i) \otimes u^{2n+2}$, so ist $|u|_h^2 = |u^1|^2 + \dots + |u^{2n+2}|^2$.

¹¹Bezüglich der Topologie von $\mathbb{C}^{n,1}$

Mit diesen Vereinbarungen gilt für $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad |q^{\mathbb{C}}(u_1, u_2)|^2 &= |q^{\mathbb{C}}((1, 0_n) \otimes u_1^1 + \dots + (0_n, i) \otimes u_1^{2n+2}, (1, 0_n) \otimes u_2^1 + \dots + (0_n, i) \otimes u_2^{2n+2})|^2 \\
 &= |-u_1^1 u_2^1 - u_1^2 u_2^2 + u_1^3 u_2^3 + \dots + u_1^{2n+2} u_2^{2n+2}|^2 \\
 &\leq (|u_1^1| |u_2^1| + \dots + |u_1^{2n+2}| |u_2^{2n+2}|)^2 \leq |u_1|_h^2 |u_2|_h^2,
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den $\mathbb{R}^{2n+2}$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt angewendet wurde.

Wir gehen im folgenden davon aus, daß $u = z_0 + \delta \in \mathbb{C}^{n,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $|\delta|_h \leq a$, wobei $a > 0$ später so klein gewählt wird, daß $\tilde{x}^{\mathbb{C}}(u)$ innerhalb eines Kegels liegt, auf dem h definiert ist. Auf dieser durch a bestimmten Umgebung von z_0 wird dann auch die Reihe gleichförmig konvergieren.

Ist $e \in \mathbb{C}^{n,1}$ mit $\langle e, e \rangle = -|e^0|^2 + \dots + |e^n|^2 = 1$, so gilt wegen $\langle e, z_0 \rangle = -e^0$:

$$(2.21) \quad |e|_h^2 = |e^0|^2 + \dots + |e^n|^2 = 1 + 2|\langle z_0, e \rangle|^2.$$

Desweiteren haben wir aufgrund von (2.20)

$$|q^{\mathbb{C}}(\delta, e)| \leq a \sqrt{1 + 2|\langle z_0, e \rangle|^2}$$

und

$$|q(z_0, e)| \leq \sqrt{1 + 2|\langle z_0, e \rangle|^2}.$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
 (2.22) \quad |q^{\mathbb{C}}(u, e)^2 - q(z_0, e)^2| &= |q^{\mathbb{C}}(\delta, e) (q^{\mathbb{C}}(\delta, e) + 2q(z_0, e))| \\
 &\leq a(a+2) (1 + 2|\langle z_0, e \rangle|^2)
 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad |\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(u) - \tilde{x}_j(z_0)| &= |q^{\mathbb{C}}(u, e_j)^2 - q(z_0, e_j)^2 + q^{\mathbb{C}}(u, ie_j)^2 - q(z_0, ie_j)^2| \\
 &\leq 2a(a+2) (1 + 2|\tilde{x}_j(z_0)|).
 \end{aligned}$$

Wir wählen $\bar{\alpha}$ mit $0 < \bar{\alpha} < \max\{\frac{\pi}{2}, \alpha\}$. Ist nun a so klein, daß $4a(a+2) < \sin \bar{\alpha}$, und ist außerdem $\tilde{x}_j(z_0) > \frac{2a(a+2)}{\sin \bar{\alpha} - 4a(a+2)} =: \kappa$, so folgt durch einfaches Umformen der letzten Bedingung

$$(2.24) \quad \sin \alpha' = \frac{2a(a+2)(1 + 2\tilde{x}_j(z_0))}{\tilde{x}_j(z_0)} < \sin \bar{\alpha},$$

wobei α' gemäß Abb. ?? definiert ist. Aus der Monotonie der Sinusfunktion auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ läßt sich ohne weiteres folgern, daß $\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(z_0 + \delta)$ für $|\delta|_h \leq a$ im Kegel $\exp(\mathbb{R} + i \cdot (-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}))$ liegt. Auf dieser Umgebung von z_0 ist also $h \circ \tilde{x}_j^{\mathbb{C}}$ erklärt. Desweiteren folgt aus (2.23/2.24)

$$(2.25) \quad |\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(u)| \geq \tilde{x}_j(z_0) - |\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(u) - \tilde{x}_j(z_0)| > \tilde{x}_j(z_0) (1 - \sin \bar{\alpha}) > 0.$$

Insgesamt ist daher

$$(2.26) \quad q_j^{\mathbb{C}} := \eta^2 (h \circ \tilde{x}_j^{\mathbb{C}}) (\tilde{x}_j^{\mathbb{C}})^{-2} q^{\mathbb{C}}(\cdot, i\hat{K}^{\mathbb{C}}) q^{\mathbb{C}}(i\hat{K}^{\mathbb{C}}, \cdot)$$

eine holomorphe Fortsetzung von q_j auf $\{z_0 + \delta \mid |\delta|_h \leq a\}$. Hierbei erstreckt sich j über eine Indexmenge $J \setminus J'$, wobei $J' := \{j \in J \mid \tilde{x}_j(z_0) \leq \kappa\} \cup I$ nach Lemma 2.1 eine endliche Teilmenge ist.

Im folgenden gilt es nun zu zeigen, daß die Reihe $\sum_{j \in J \setminus J'} q_j^{\mathbb{C}}$ auf $\{z_0 + \delta \mid |\delta|_h \leq a\}$ gleichmäßig konvergiert. Da $\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}$ diese Umgebung von z_0 in den Kegel $\exp(\mathbb{R} + i \cdot (-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}))$ abbildet, gilt

$$(2.27) \quad |h(\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(u))| \leq \text{Konst} \cdot |\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(u)|^{-l}.$$

Außerdem folgt aus (2.25)

$$(2.28) \quad |\tilde{x}_j^{\mathbb{C}}(u)|^{-2} \leq (1 - \sin \bar{\alpha})^2 \tilde{x}_j(z_0)^{-2}.$$

Desweiteren berechnen wir:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, i\hat{K}_{j|u}^{\mathbb{C}})^2 &= (q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, e_j) q^{\mathbb{C}}(u, e_j) + q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, ie_j) q^{\mathbb{C}}(u, ie_j))^2 \\ &= q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, e_j)^2 q^{\mathbb{C}}(u, e_j)^2 + q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, ie_j)^2 q^{\mathbb{C}}(u, ie_j)^2 \\ &\quad + 2 q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, e_j) q^{\mathbb{C}}(u, e_j) q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, ie_j) q^{\mathbb{C}}(u, ie_j), \end{aligned}$$

$$(2.30) \quad |q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, i\hat{K}_{j|u}^{\mathbb{C}})|^2 \leq 2 |q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, e_j)|^2 |q^{\mathbb{C}}(u, e_j)|^2 + 2 |q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, ie_j)|^2 |q^{\mathbb{C}}(u, ie_j)|^2.$$

Um weiter abzuschätzen, folgern wir aus (2.22)

$$(2.31) \quad \begin{aligned} |q^{\mathbb{C}}(u, e)|^2 &\leq a(a+2) + (1 + 2a(a+2)) |\langle z_0, e \rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (1 + 2a(a+2)) (1 + 2 |\langle z_0, e \rangle|^2) \end{aligned}$$

und aus (2.20/2.21)

$$(2.32) \quad |q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, e)|^2 \leq |e|_h^2 |\bar{X}|_h^2 = (1 + 2 |\langle z_0, e \rangle|^2) |\bar{X}|_h^2.$$

Wendet man diese letzten beiden Ungleichungen mit $e = e_j$ und $e = ie_j$ auf (2.30) an, so ergibt sich

$$(2.33) \quad |q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, i\hat{K}_{j|u}^{\mathbb{C}})|^2 \leq 2 (1 + 2a(a+2)) (1 + 2\tilde{x}_j(z_0))^2 |\bar{X}|_h^2$$

und somit

$$(2.34) \quad \begin{aligned} |q^{\mathbb{C}}(\cdot, i\hat{K}_j^{\mathbb{C}}) q^{\mathbb{C}}(i\hat{K}_j^{\mathbb{C}}, \cdot)|_h &= \sup \{ |q^{\mathbb{C}}(\bar{X}, i\hat{K}_j^{\mathbb{C}}) q^{\mathbb{C}}(i\hat{K}_j^{\mathbb{C}}, \bar{X})| \mid |\bar{X}|_h = 1 \} \\ &\leq 2 (1 + 2a(a+2)) (1 + 2\tilde{x}_j(z_0))^2 \\ &\leq 3 (1 + 2\tilde{x}_j(z_0))^2 \leq 12 (1 + \tilde{x}_j(z_0))^2. \end{aligned}$$

Wegen $\tilde{x}(z_0) \geq \kappa$ gilt überdies

$$(2.35) \quad \tilde{x}_j(z_0)^{-1} = (1 + \tilde{x}_j(z_0))^{-1} (1 + \tilde{x}_j(z_0))^{-1} \leq (1 + \kappa^{-1}) (1 + \tilde{x}_j(z_0))^{-1}.$$

Insgesamt folgt aus (2.27/2.28/2.34/2.35)

$$(2.36) \quad |q_{j|u}^{\mathbb{C}}|_h \leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot (1 + \tilde{x}_j(z_0))^{-l}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 (2.37) \quad \sum_{j \in J \setminus J'} |q_{j|u}^{\mathbb{C}}|_h &\leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot \sum_{j \in J \setminus J'} (\cosh \tilde{r}_j(z_0))^{-2l} \\
 &\leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in J^k} (\cosh \tilde{r}_j(z_0))^{-2l},
 \end{aligned}$$

wobei $J^k := \{j \in J \setminus J' \mid \frac{1}{2}d_0 + k - 1 < \tilde{r}_j(z_0) \leq \frac{1}{2}d_0 + k\}$ mit $\#J^k \leq \hat{N} \left(\frac{\sinh(\frac{3}{2}d_0 + k)}{\sinh d_0} \right)^{2n}$ aufgrund von Lemma 2.1. Wegen der Monotonie von $\cosh$ gilt

$$(2.38) \quad \sum_{j \in J^k} (\cosh \tilde{r}_j(z_0))^{-2l} \leq \#J^k \cdot \left(\cosh \left(\frac{1}{2}d_0 + k - 1 \right) \right)^{-2l}.$$

und daher

$$(2.39) \quad \sum_{j \in J \setminus J'} |q_{j|u}^{\mathbb{C}}|_h \leq \eta^2 \cdot \text{Konst} \cdot \frac{\hat{N}}{(\sinh d_0)^{2n}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sinh \left(\frac{3}{2}d_0 + k \right) \right)^{2n} \cdot \left(\cosh \left(\frac{1}{2}d_0 + k - 1 \right) \right)^{-2l}.$$

Die rechte Seite konvergiert nach dem Quotientenkriterium für $l > n$, also konvergiert $\sum_{j \in J \setminus J'} q_j^{\mathbb{C}}$ auf der gewählten Umgebung gleichmäßig nach dem Weierstraß-Kriterium und damit gegen eine holomorphe¹² Bilinearform auf $\{z_0 + \delta \mid |\delta|_h < a\}$. $\sum_{j \in J \setminus J'} q_j$ konvergiert dann bezüglich der eingeschränkten $|\cdot|_h$ -Norm gleichmäßig auf der entsprechenden Umgebung $\{z_0 + \delta \in \mathbb{C}^{n,1} \mid |\delta|_h < a\}$ gegen eine reell-analytische Bilinearform und ebenso $\sum_{j \in J \setminus J'} g_j$ auf $\pi \left(\{z_0 + \delta \mid |\delta|_h < a\} \cap M^{2n+1} \right)$ bezüglich $|\cdot|_h$ mit $|b|_h = \sup \{b(X, X) \mid |\tilde{X}|_h = 1\}$. Aufgrund der Äquivalenz sämtlicher Normen auf endlich-dimensionalen reellen Vektorräumen konvergiert $\sum_{j \in J \setminus J'} g_j$ auch in der üblichen Operatornorm gegen dieselbe reell-analytische Bilinearform. Da lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz auf U_I identisch sind, folgt die Behauptung. $\square$

2.4. Vollständigkeit der Metrik. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß durch $g = g_0 + \sum_{j \in J} g_j$ mit g_j gemäß (2.7), d.h.

$$(2.40) \quad g_j = \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} (1 + x_j) p_j^v,$$

eine vollständige Riemannsche Metrik auf $\Omega = \mathbb{CH}^n \setminus \left(\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1} \right)$ definiert wird.

Dazu sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich d_g , d.h. $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : d_g(p_n, p_m) < \epsilon$. Zu $n, m \geq n_0$ gibt es also nach etwaiger Umparametrisierung eine Kurve $c_{n,m}$ mit $c_{n,m}(0) = p_n$, $c_{n,m}(d_g(p_n, p_m)) = p_m$ und

$$\int_0^{d_g(p_n, p_m)} g(\dot{c}_{n,m}(t), \dot{c}_{n,m}(t))^{\frac{1}{2}} dt < \epsilon.$$

Aufgrund der Definition von g ist $d_{g_0} \leq d_g$ und damit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich d_{g_0} . Da $(\mathbb{CH}^n, g_0)$ vollständig ist, konvergiert die Folge bezüglich d_{g_0} gegen einen Punkt $p \in \mathbb{CH}^n$. Es bestehen nun zwei Möglichkeiten:

¹²Siehe z.B. [GF], Kapitel I, Satz 3.5.

- (1) $p \in \Omega$: In diesem Fall sind wir fertig, weil die p_n ab einem gewissen Folgenglied alle in der kompakten Menge $\{q \in \mathbb{CH}^n \mid d_{g_0}(p, q) \leq \sigma\} \subset \Omega$ mit $\sigma := \frac{1}{2} \inf\{r_j(p) \mid j \in J\} > 0$ nach Axiom 2.1 liegen und somit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich d_g konvergente Teilfolge besitzt.
- (2) $p \in \bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$: Wir zeigen, daß dieser Fall nicht eintritt, indem wir das Gegenteil annehmen und folgern, daß $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge bezüglich d_g sein kann. Es sei also $p \in \mathbb{CH}_j^{n-1}$, $\epsilon > 0$ und n_0 passend zu ϵ gewählt. Da $\int_0^1 h(x)^{\frac{1}{2}} x^{-1} dx = \infty$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\eta \int_{\sinh^2 \delta}^{\sinh^2 r_j(p_{n_0})} h(x)^{\frac{1}{2}} x^{-1} dx \geq 2\epsilon$. Wähle nun m so groß, daß $r_j(p) < d_{g_0}(p, p_m) < \delta$. Mit der vereinbarten Notation gilt dann:

$$\begin{aligned}
\epsilon &> \int_0^{d_g(p_{n_0}, p_m)} g(\dot{c}_{n,m}(t), \dot{c}_{n,m}(t))^{\frac{1}{2}} dt \geq \int_0^{d_g(p_{n_0}, p_m)} g_j(\dot{c}_{n,m}(t), \dot{c}_{n,m}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\
&\geq \eta \int_0^{d_g(p_{n_0}, p_m)} h(x_j(c(t)))^{\frac{1}{2}} x_j(c(t))^{-\frac{1}{2}} (1+x_j(c(t)))^{\frac{1}{2}} \left| \frac{d}{dt}(r_j(c(t))) \right| dt \\
&\geq \eta \int_{r_j(p_m)}^{r_j(p_{n_0})} h(x(r))^{\frac{1}{2}} x(r)^{-\frac{1}{2}} (1+x(r))^{\frac{1}{2}} dr \\
&= \eta \int_{x_j(p_m)}^{x_j(p_{n_0})} h(x)^{\frac{1}{2}} x^{-1} dx \\
&\geq \eta \int_{\sinh^2 \delta}^{x_j(p_{n_0})} h(x)^{\frac{1}{2}} x^{-1} dx \geq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Die Annahme führt also zu einem Widerspruch.

(Ω, g) ist daher tatsächlich vollständig.

An dieser Stelle fassen wir kurz die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte zusammen:

Satz 2.5. Sei $(\bar{V}_i)_{i=1}^N$ eine Familie kompakter, total-geodätisch eingebetteter Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2 in einem kompakten komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{CH}^n/\Gamma'$. Die Urbilder dieser Untermannigfaltigkeiten unter der kanonischen Projektion $pr : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{CH}^n/\Gamma'$ seien total-geodätische $\mathbb{CH}_j^{n-1}$, $j \in J$, die sich paarweise orthogonal in total-geodätischen $\mathbb{CH}^{n-2}$ schneiden. Dann trägt $\hat{\Omega} = \mathbb{CH}^n/\Gamma' \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{V}_i$ eine Familie vollständiger, reell-analytischer Riemannscher Metriken $(\hat{g}_\eta)_{\eta>0}$.

2.5. Berechnung des Krümmungstensors. Dieser Abschnitt lehnt sich in seiner Struktur eng an das Kapitel 5 in [AS2] an. Wir berechnen hier den $(4, 0)$ -Krümmungstensor $R^\#$ der Metrik

(2.41)

$$g = g_0 + \sum_{j \in J} \eta^2 h(x_j) x_j^{-2} (1+2x_j)^{-2} \langle \cdot, \nabla_{K_j} K_j \rangle \langle \nabla_{K_j} K_j, \cdot \rangle = g_0 + \sum_{j \in J} \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} (1+x_j) p_j^v$$

auf $\Omega = \mathbb{CH}^n \setminus \left(\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1} \right)$, indem wir ihn auf den einzelnen $U_I \cap \Omega$ herleiten, und bringen ihn auf eine Gestalt, die es erlaubt, einzelne Summanden abzuschätzen.

Dazu ziehen wir die in [AS2] benutzte allgemeine Identität

(2.42)

$$\begin{aligned} R^\#(X, Y; Z, W) &= \frac{1}{4} \left[R_0^\#(G \cdot X, Y; Z, W) + R_0^\#(X, G \cdot Y; Z, W) + R_0^\#(X, Y; G \cdot Z, W) + R_0^\#(X, Y; Z, G \cdot W) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\nabla_{\{X, W\}}^2 g(Y, Z) - \nabla_{\{Y, W\}}^2 g(X, Z) - \nabla_{\{X, Z\}}^2 g(Y, W) + \nabla_{\{Y, Z\}}^2 g(X, W) \right] \\ &\quad - \left[\langle B(X, W), G^{-1} B(Y, Z) \rangle - \langle B(Y, W), G^{-1} B(X, Z) \rangle \right] \end{aligned}$$

heran. Hierbei ist G das Feld symmetrischer Automorphismen, das g bezüglich der Ausgangsmetrik g_0 wiedergibt, d.h. $g = \langle \cdot, G \cdot \rangle$. Desweiteren bezeichnet $\nabla_{\{X, W\}}^2 g(Y, Z) := \frac{1}{2} [\nabla_{X, W}^2 g(Y, Z) + \nabla_{W, X}^2 g(Y, Z)]$ die im unteren Argumentpaar symmetrisierte zweite kovariante Ableitung von g , und $G^{-1} \cdot B = \Gamma$ ist der Differenztensor zwischen der kovarianten Ableitung von g und der kovarianten Ableitung ∇ von g_0 , d.h. B wird definiert durch die Gleichung

$$(2.43) \quad 2 \langle B(X, Y), Z \rangle = \nabla_X g(Y, Z) + \nabla_Y g(X, Z) - \nabla_Z g(X, Y).$$

Ebenso definieren wir für $g_j = \eta^2 h(x_j) x_j^{-2} (1+2x_j)^{-2} \langle \cdot, \nabla_{K_j} K_j \rangle \langle \nabla_{K_j} K_j, \cdot \rangle$ das Tensorfeld B_j :

$$(2.44) \quad 2 \langle B_j(X, Y), Z \rangle = \nabla_X g_j(Y, Z) + \nabla_Y g_j(X, Z) - \nabla_Z g_j(X, Y).$$

Lemma 2.6. *Auf Ω ist*

$$\begin{aligned} B_j(X, Y) &= - \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) x_j^{-\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{3}{2}} p_j^v(X, Y) v_j \\ (2.45) \quad &+ \eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{3}{2}} (1+x_j)^{\frac{3}{2}} p_j^\xi(X, Y) v_j \\ &+ \eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} \langle X, Y \rangle v_j \end{aligned}$$

und

$$(2.46) \quad B(X, Y) = \sum_{j \in J} B_j(X, Y).$$

Beweis. Um die Übersicht bei den weiteren Rechnungen zu erhöhen, definieren wir die C^ω -Funktion a auf $(0, \infty)$ durch

$$(2.47) \quad a(x) := \eta^2 h(x) x^{-2} (1+2x)^{-2}.$$

Dann gilt

$$(2.48) \quad a'(x) = \eta^2 \left(h'(x) - 2h(x)x^{-1} - 4h(x)(1+2x)^{-1} \right) x^{-2} (1+2x)^{-2}.$$

und

$$\begin{aligned} (2.49) \quad \nabla_X g_j(Y, Z) &= 2a'(x_j)(1+2x_j)^{-1} \langle \nabla_X K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \\ &\quad + a(x_j) \left(-\langle R_0(K_j, X)Y, K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Z, K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \nabla_X K_j, \nabla_Y K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle + \langle \nabla_X K_j, \nabla_Z K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gleichung (1.22) schreiben wir Terme der Gestalt $\langle \nabla_X K_j, K_j \rangle$ in Terme mit $\langle X, v_j \rangle$ um und benutzen (1.23) sowie

$$(2.50) \quad \begin{aligned} -\langle R_0(K, X)Y, K \rangle &= g_0 \otimes g_0(K, X; Y, K) + \omega_0 \otimes \omega_0(K, X; Y, K) \\ &= x(1+x) \left[\langle X, Y \rangle - p^\xi(X, Y) + 3p^v(X, Y) \right]. \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann

$$(2.51) \quad \begin{aligned} \nabla_X g_j(Y, Z) &= 2a'(x_j)x_j^{\frac{3}{2}}(1+x_j)^{\frac{3}{2}}(1+2x_j)^2 p_j^v(X, Y) \langle v_j, Z \rangle \\ &\quad + a(x_j)x_j^{\frac{3}{2}}(1+x_j)^{\frac{3}{2}}(1+2x_j) \left[(\langle X, Y \rangle - p_j^\xi(X, Y) + 3p_j^v(X, Y)) \langle v_j, Z \rangle \right. \\ &\quad \quad \left. + (\langle X, Z \rangle - p_j^\xi(X, Z) + 3p_j^v(X, Z)) \langle v_j, Y \rangle \right] \\ &\quad + a(x_j)x_j^{\frac{5}{2}}(1+x_j)^{\frac{1}{2}}(1+2x_j) \left[\langle X, Y \rangle \langle v_j, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle v_j, Y \rangle \right] \\ &\quad + a(x_j)x_j^{\frac{1}{2}}(1+x_j)^{\frac{3}{2}}(1+2x_j) (1+3x_j) \left[p_j(X, Y) \langle v_j, Z \rangle + p_j(X, Z) \langle v_j, Y \rangle \right] \\ &\stackrel{2.47/2.48}{=} -2 \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) x_j^{-\frac{1}{2}}(1+x_j)^{\frac{3}{2}} p_j^v(X, Y) \langle v_j, Z \rangle \\ &\quad + \eta^2 h(x_j)x_j^{-\frac{3}{2}}(1+x_j)^{\frac{3}{2}} \left(p_j^\xi(X, Y) \langle v_j, Z \rangle + p_j^\xi(X, Z) \langle v_j, Y \rangle \right) \\ &\quad + \eta^2 h(x_j)x_j^{-\frac{1}{2}}(1+x_j)^{\frac{1}{2}} \left(\langle X, Y \rangle \langle v_j, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle v_j, Y \rangle \right). \end{aligned}$$

Nach Einsetzen in (2.44) ist die erste Aussage des Lemmas bewiesen.

Wegen Proposition 2.3 konvergieren $\sum_{j \in J} \nabla_X g_j(Y, Z)$, $\sum_{j \in J} \nabla_Y g_j(X, Z)$ und $\sum_{j \in J} \nabla_Z g_j(X, Y)$ lokal gleichmäßig absolut. Daher folgt auch die zweite Aussage. $\square$

Lemma 2.7. *Für die Metrik g auf Ω gilt*

$$(2.52) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{4} \left[R_0^\#(G \cdot X, Y; Z, W) + R_0^\#(X, G \cdot Y; Z, W) + R_0^\#(X, Y; G \cdot Z, W) + R_0^\#(X, Y; Z, G \cdot W) \right] \\ &- \frac{1}{2} \left[\nabla_{\{X, W\}}^2 g(Y, Z) - \nabla_{\{Y, W\}}^2 g(X, Z) - \nabla_{\{X, Z\}}^2 g(Y, W) + \nabla_{\{Y, Z\}}^2 g(X, W) \right] \\ &= -\omega_0 \otimes \omega_0(X, Y; Z, W) - \left(1 - \sum_{j \in J} \eta^2 h(x_j) \right) g_0 \otimes g_0(X, Y; Z, W) \\ &\quad - 2 \sum_{j \in J} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) (1+x_j) g_0 \otimes p_j^v(X, Y; Z, W) \\ &\quad + 2 \sum_{j \in J} \eta^2 h(x_j)x_j^{-1}(1+x_j) g_0 \otimes p_j^\xi(X, Y; Z, W) \\ &\quad - \sum_{j \in J} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) x_j^{-1}(1+x_j)^2 p_j \otimes p_j(X, Y; Z, W). \end{aligned}$$

Beweis. Um die zweite Zeile von (2.52) zu erhalten, differenzieren wir (2.49) und symmetrisieren das Ergebnis bezüglich des unteren Argumentpaares:

(2.53)

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\{X,W\}}^2 g_j(Y, Z) \\
&= 2 \left(2a'(x_j)(1+2x_j)^{-1} \right)' (1+2x_j)^{-1} \langle \nabla_W K_j, K_j \rangle \langle \nabla_X K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \\
&\quad + 2a'(x_j)(1+2x_j)^{-1} \left[\left(\langle \nabla_W K_j, \nabla_X K_j \rangle - \langle R_0(K_j, W)X, K_j \rangle \right) \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \right. \\
&\quad \quad + \left(\langle \nabla_W K_j, \nabla_Y K_j \rangle - \langle R_0(K_j, W)Y, K_j \rangle \right) \langle \nabla_X K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \\
&\quad \quad + \left(\langle \nabla_Z K_j, \nabla_W K_j \rangle - \langle R_0(K_j, Z)W, K_j \rangle \right) \langle \nabla_X K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \\
&\quad \quad + \left(\langle \nabla_X K_j, \nabla_Y K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Y, K_j \rangle \right) \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \langle \nabla_W K_j, K_j \rangle \\
&\quad \quad \left. + \left(\langle \nabla_X K_j, \nabla_Z K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Z, K_j \rangle \right) \langle \nabla_W K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \right] \\
&\quad + a(x_j) \left[- \langle R_0(K_j, W)Y, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle - \langle R_0(K_j, Z)W, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \right. \\
&\quad \quad - \langle R_0(K_j, X)Y, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Z, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \\
&\quad \quad + \langle \nabla_X K_j, \nabla_Y K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, \nabla_W K_j \rangle \\
&\quad \quad + \langle \nabla_X K_j, \nabla_Z K_j \rangle \langle \nabla_W K_j, \nabla_Y K_j \rangle \\
&\quad \quad - \langle R_0(K_j, Z)W, K_j \rangle \langle \nabla_X K_j, \nabla_Y K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Y, K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, \nabla_W K_j \rangle \\
&\quad \quad - \langle R_0(K_j, W)Y, K_j \rangle \langle \nabla_X K_j, \nabla_Z K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Z, K_j \rangle \langle \nabla_W K_j, \nabla_Y K_j \rangle \\
&\quad \quad + \langle R_0(K_j, X)Y, K_j \rangle \langle R_0(K_j, Z)W, K_j \rangle \\
&\quad \quad + \langle R_0(K_j, X)Z, K_j \rangle \langle R_0(K_j, W)Y, K_j \rangle \\
&\quad \quad - \frac{1}{2} \left(\langle R_0(K_j, W)X, \nabla_Y K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle + \langle R_0(K_j, X)W, \nabla_Y K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \right. \\
&\quad \quad \quad + \langle R_0(K_j, Y)X, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle + \langle R_0(K_j, Y)W, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \\
&\quad \quad \quad + \langle R_0(K_j, W)X, \nabla_Z K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle + \langle R_0(K_j, X)W, \nabla_Z K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \\
&\quad \quad \quad \left. + \langle R_0(K_j, Z)X, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle + \langle R_0(K_j, Z)W, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \right) \left. \right].
\end{aligned}$$

An dieser Stelle überlegt man sich zweckmäßigerweise, welche Summanden in (2.49) unter der Projektion auf $S^2\Lambda_2 T\Omega$ verschwinden. Um dies einfach zu handhaben, bezeichnen wir zwei Summanden $A_1(X, Y, Z, W)$ und $A_2(X, Y, Z, W)$ als formal äquivalent und schreiben $A_1(X, Y, Z, W) \sim A_2(X, Y, Z, W)$, falls

$$\begin{aligned}
& A_1(X, Y, Z, W) - A_1(Y, X, Z, W) - A_1(X, Y, W, Z) + A_1(Y, X, W, Z) \\
&= A_2(X, Y, Z, W) - A_2(Y, X, Z, W) - A_2(X, Y, W, Z) + A_2(Y, X, W, Z).
\end{aligned}$$

Damit formen wir (2.49) summandenweise um, bis der gesamte Term in $S^2\Lambda_2 T\Omega$ liegt. Aufgrund von

$$4 \nabla_{\{X,W\}}^2 g_j(Y, Z) \sim \left[\nabla_{\{X,W\}}^2 g_j(Y, Z) - \nabla_{\{Y,W\}}^2 g_j(X, Z) - \nabla_{\{X,Z\}}^2 g_j(Y, W) + \nabla_{\{Y,Z\}}^2 g_j(X, W) \right]$$

haben wir dann $\frac{1}{4} \left[\nabla_{\{X,W\}}^2 g_j(Y, Z) - \nabla_{\{Y,W\}}^2 g_j(X, Z) - \nabla_{\{X,Z\}}^2 g_j(Y, W) + \nabla_{\{Y,Z\}}^2 g_j(X, W) \right]$ berechnet.

Wir bemerken zunächst, daß aufgrund der Symmetrie in X und Y die erste Zeile von (2.53) in diesem Sinne verschwindet. Vom zweiten Summationsblock verbleibt nur die letzte Zeile, da die erste und zweite Zeile als Einheit, die dritte und vierte Zeile einzeln in X und Y symmetrisch sind. Im dritten Summationsblock verschwinden aus diesem Grund die dritte, fünfte und siebte Zeile sowie die zwei Terme oben rechts hinter dem $\frac{1}{2}$. Die zwei unten links verschwinden aufgrund der Symmetrie in Z und W . Außerdem gilt

(2.54)

$$\begin{aligned} & \langle R_0(K_j, W)Y, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle + \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, W)X, \nabla_Y K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \\ & \sim \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, W)Y, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle , \end{aligned}$$

(2.55)

$$\begin{aligned} & \langle R_0(K_j, W)Z, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle + \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, Z)W, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \\ & \sim \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, W)Z, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle , \end{aligned}$$

(2.56)

$$\begin{aligned} & \langle R_0(K_j, X)Y, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle + \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, Y)X, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \\ & \sim \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, X)Y, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle , \end{aligned}$$

(2.57)

$$\begin{aligned} & \langle R_0(K_j, X)Z, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle + \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, X)W, \nabla_Z K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \\ & \sim \frac{1}{2} \langle R_0(K_j, X)Z, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle . \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

(2.58)

$$\begin{aligned} & \nabla_{\{X,W\}}^2 g_j(Y, Z) \\ & \sim 2a'(x_j)(1+2x_j)^{-1} \left(\langle \nabla_X K_j, \nabla_Z K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Z, K_j \rangle \right) \langle \nabla_W K_j, K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \\ & + a(x_j) \left[\left(\langle \nabla_X K_j, \nabla_Z K_j \rangle - \langle R_0(K_j, X)Z, K_j \rangle \right) \left(\langle \nabla_W K_j, \nabla_Y K_j \rangle - \langle R_0(K_j, W)Y, K_j \rangle \right) \right. \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\langle R_0(K_j, W)Y, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle + \langle R_0(K_j, X)Y, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Z K_j, K_j \rangle \right. \\ & \quad \left. \left. + \langle R_0(K_j, W)Z, \nabla_X K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle + \langle R_0(K_j, X)Z, \nabla_W K_j \rangle \langle \nabla_Y K_j, K_j \rangle \right) \right] . \end{aligned}$$

Zur weiteren Auswertung kombinieren jetzt die Gleichungen (1.22),(1.23),(2.50):

$$\begin{aligned}
(2.59) \quad & \left(\langle \nabla_X K, \nabla_Z K \rangle - \langle R_0(K, X)Z, K \rangle \right) \langle \nabla_W K, K \rangle \langle \nabla_Y K, K \rangle \\
& = x^2(1+x) (1+2x)^3 \langle X, Z \rangle p^v(W, Y) + x(1+x)^2(1+2x)^3 p^\xi(X, Z) p^v(W, Y) \\
& \quad + x(1+x)^2(1+2x)^2(1+6x) p^v(X, Z) p^v(W, Y) \\
& \sim -\frac{1}{2}x^2(1+x) (1+2x)^3 g_0 \otimes p^v(X, Y; Z, W) - \frac{1}{2}x(1+x)^2(1+2x)^3 p^\xi \otimes p^v(X, Y; Z, W).
\end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}
(2.60) \quad & \left(\langle \nabla_X K, \nabla_Z K \rangle - \langle R_0(K, X)Z, K \rangle \right) \left(\langle \nabla_W K, \nabla_Y K \rangle - \langle R_0(K, W)Y, K \rangle \right) \\
& \sim -\frac{1}{2}x^2(1+2x)^2 g_0 \otimes g_0(X, Y; Z, W) - (1+x)^2(1+2x) (1+6x) p^\xi \otimes p^v(X, Y; Z, W) \\
& \quad - x(1+x) (1+2x)^2 g_0 \otimes p^\xi(X, Y; Z, W) \\
& \quad - x(1+x) (1+2x) (1+6x) g_0 \otimes p^v(X, Y; Z, W).
\end{aligned}$$

Eine etwas längere Rechnung ergibt überdies

$$\begin{aligned}
(2.61) \quad & \langle R_0(K, W)Y, \nabla_X K \rangle \langle \nabla_Z K, K \rangle + \langle R_0(K, X)Y, \nabla_W K \rangle \langle \nabla_Z K, K \rangle \\
& + \langle R_0(K, W)Z, \nabla_X K \rangle \langle \nabla_Y K, K \rangle + \langle R_0(K, X)Z, \nabla_W K \rangle \langle \nabla_Y K, K \rangle \\
& \sim x(1+x) (1+2x)^2 g_0 \otimes p^v(X, Y; Z, W) + \frac{1}{2}x(1+x) (1+2x)^2 d \otimes \omega_0(X, Y; Z, W).
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß $p = p^v + p^\xi$ und $p^v \otimes p^v = p^\xi \otimes p^\xi = 0$, so gilt $p \otimes p = 2p^\xi \otimes p^v$. Insgesamt führt dies zu

$$\begin{aligned}
(2.62) \quad & \frac{1}{2} \left[\nabla_{\{X, W\}}^2 g_j(Y, Z) - \nabla_{\{Y, W\}}^2 g_j(X, Z) - \nabla_{\{X, Z\}}^2 g_j(Y, W) + \nabla_{\{Y, Z\}}^2 g_j(X, W) \right] \\
& = -a(x_j)x_j^2(1+2x_j)^2 g_0 \otimes g_0(X, Y; Z, W) \\
& \quad - (a'(x_j)x_j(1+2x_j) + a(x_j)(1+6x_j))(1+x_j)^2(1+2x_j) p_j \otimes p_j(X, Y; Z, W) \\
& \quad - 2(a'(x_j)x_j(1+2x_j) + a(x_j)(1+6x_j))x_j(1+x_j) (1+2x_j) g_0 \otimes p_j^v(X, Y; Z, W) \\
& \quad - a(x_j)x_j(1+x_j) (1+2x_j)^2 g_0 \otimes p_j^v(X, Y; Z, W) \\
& \quad - 2a(x_j)x_j(1+x_j) (1+2x_j)^2 g_0 \otimes p_j^\xi(X, Y; Z, W) \\
& \quad - \frac{1}{2}a(x_j)x_j(1+x_j) (1+2x_j)^2 d_j \otimes \omega_0(X, Y; Z, W).
\end{aligned}$$

Elementares Auswerten der Definitionen liefert weiterhin

(2.63)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[R_0^\#(G_j \cdot X, Y; Z, W) + R_0^\#(X, G_j \cdot Y; Z, W) + R_0^\#(X, Y; G_j \cdot Z, W) + R_0^\#(X, Y; Z, G_j \cdot W) \right] \\ &= -a(x_j)x_j(1+x_j)(1+2x_j)^2 g_0 \otimes p_j^v(X, Y; Z, W) - \frac{1}{2}a(x_j)x_j(1+x_j)(1+2x_j)^2 d_j \otimes \omega_0(X, Y; Z, W). \end{aligned}$$

Addition von (2.63) und (2.62) liefert nach Summation über $j \in J$ und Einsetzen von (2.47/2.48) den Beweis des Lemmas. $\square$

Zur Auswertung der letzten Zeile von (2.42) benötigen wir die Definition des $\otimes$ -Produktes von symmetrischen, bilinearen Abbildungen, die sich in Anhang A, Gleichung (A.10), findet. Mit dieser Definition ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (2.64) \quad & \left[\langle B(X, W), G^{-1}B(Y, Z) \rangle - \langle B(Y, W), G^{-1}B(X, Z) \rangle \right] \\
 &= \sum_{j,k \in J} B_j \otimes_{G^{-1}} B_k = \sum_{j,k \in I} B_j \otimes_{(\mathbf{1}+G_I)^{-1}} B_k + B_I \otimes_{G^{-1}-(\mathbf{1}+G_I)^{-1}} B_I \\
 & \quad + 2B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_I + B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I},
 \end{aligned}$$

wobei wir für $J' \subset J$ naheliegenderweise $B_{J'}$ durch $B_{J'} := \sum_{j \in J'} B_j$ definieren.

Durch Einsetzen von (2.6) sowie Ausnutzen von Lemma C.1 erhält man unmittelbar

Lemma 2.8. Für $I \subset J$ mit $U_I \neq \emptyset$ gilt mit

$$\sigma = \sum_{i \in I} \frac{\eta^2 h(x_i) x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)}$$

auf Ω

$$\begin{aligned}
 (2.65) \quad & \sum_{j,k \in I} B_j \otimes_{(\mathbf{1}+G_I)^{-1}} B_k \\
 &= \left(\sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i) - \frac{\sigma}{1+\sigma} \right) g_0 \otimes g_0 - \sum_{i \in I} \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) x_i^{-1} (1+x_i)^2 p_i \otimes p_i \\
 & \quad - 2 \sum_{i \in I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i) g_0 \otimes p_i^v + 2 \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} (1+x_i) g_0 \otimes p_j^\xi \\
 & \quad + \frac{2}{1+\sigma} \sum_{i \in I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i) \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} g_0 \otimes p_i^v \\
 & \quad - \frac{2}{1+\sigma} \sum_{i \in I} (1+x_i) \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} g_0 \otimes p_j^\xi \\
 & \quad + \frac{1}{1+\sigma} \sum_{j,k \in I} \left[\left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) (1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \right. \\
 & \quad \quad \cdot \left(-\eta^2 h'(x_k) + \eta^2 h(x_k) x_k^{-1} \right) (1+x_k) \frac{x_k}{x_k + \eta^2 h(x_k)} p_j^v \otimes p_k^v \\
 & \quad \quad + (1+x_j) \frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} (1+x_k) \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} p_j^\xi \otimes p_k^\xi \\
 & \quad \quad \left. - 2 \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) (1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} (1+x_k) \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} p_j^v \otimes p_k^\xi \right].
 \end{aligned}$$

Ingesamt erhalten wir abschließend die folgende Form des Krümmungstensors:

Proposition 2.9. Sei $I \subset J$ eine Teilmenge, so daß $U_I \neq \emptyset$, und g die in (2.41) definierte Metrik auf Ω . Der $(4,0)$ -Krümmungstensor von g ergibt sich auf $\Omega \cap U_I$

als

(2.66)

$$\begin{aligned}
R^\# = & -\frac{1}{1+\sigma} g_0 \otimes g_0 - \omega_0 \otimes \omega_0 \\
& - \sum_{i \in I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i)^2 \frac{1}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i \otimes p_i \\
& - \frac{2}{1+\sigma} \sum_{i \in I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i) \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} g_0 \otimes p_i^v \\
& + \frac{2}{1+\sigma} \sum_{i \in I} (1+x_i) \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} g_0 \otimes p_i^\xi \\
& - \frac{1}{1+\sigma} \sum_{j, k \in I} \left[\left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) (1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \right. \\
& \quad \cdot \left(-\eta^2 h'(x_k) + \eta^2 h(x_k) x_k^{-1} \right) (1+x_k) \frac{x_k}{x_k + \eta^2 h(x_k)} p_j^v \otimes p_k^v \\
& \quad + (1+x_j) \frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} (1+x_k) \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} p_j^\xi \otimes p_k^\xi \\
& \quad \left. - 2 \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) (1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} (1+x_k) \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} p_j^v \otimes p_k^\xi \right] \\
& + \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) g_0 \otimes g_0 \\
& - \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) x_j^{-1} (1+x_j)^2 p_j \otimes p_j \\
& - 2 \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) (1+x_j) g_0 \otimes p_j^v \\
& + 2 \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} (1+x_j) g_0 \otimes p_j^\xi \\
& - B_I \otimes_{G^{-1}-(1+G_I)^{-1}} B_I - 2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_I - B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I}.
\end{aligned}$$

2.6. Betrachtung eines Spezialfalls. Wir betrachten in dieser Arbeit für die folgenden Abschätzungen nur die Situation, daß $\#I = 1$, d.h. $I = \{i\}$.¹³ Außerdem schränken wir η auf den Bereich $0 < \eta \leq 1$ ein. Dann vereinfachen sich sowohl die meisten Objekte als auch die Abschätzungen. Insbesondere gilt

$$(2.67) \quad (\mathbb{1} + G_i)^{-1} \cdot v_i = \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \cdot v_i \quad ,$$

¹³Auf die technischen Schwierigkeiten, die der allgemeine Fall mit sich bringt, gehen wir kurz in Anhang D ein.

und der $(4, 0)$ -Krümmungstensor auf $\Omega \cap U_I$ lautet

$$\begin{aligned}
R^\# = & - \frac{x_i + \eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} g_0 \otimes g_0 - \omega_0 \otimes \omega_0 \\
& - \frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i \\
& - 2 \frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} g_0 \otimes p_i^v \\
& + 2 \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} g_0 \otimes p_i^\xi \\
(2.68) \quad & + \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) g_0 \otimes g_0 \\
& - \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) x_j^{-1}(1+x_j)^2 p_j \otimes p_j \\
& - 2 \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) (1+x_j) g_0 \otimes p_j^v \\
& + 2 \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j)x_j^{-1}(1+x_j) g_0 \otimes p_j^\xi \\
& - B_i \otimes_{G^{-1}-(1+G_i)^{-1}} B_i - 2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i - B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I}.
\end{aligned}$$

Wir gehen jetzt folgendermaßen vor: Zunächst bringen wir den Term $B_i \otimes_{G^{-1}-(1+G_i)^{-1}} B_i$ auf eine Gestalt, die es erlaubt, ihn mit den Termen der ersten vier Zeilen von (2.68) zu verrechnen, was zu Gleichung (2.72) führt. Diese zusammengefaßten Terme schätzen wir dann größtenteils in Lemma 2.10 ab. Lemma 2.11 beinhaltet die Abschätzung der Terme in der fünften bis achten Zeile von (2.68). Der letzte Term $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I}$ wird in Lemma 2.12 behandelt. Schließlich enthält Lemma 2.14 eine Abschätzung von $2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i$. Diesen Term müssen wir noch mit der zweiten Zeile von (2.68) kombinieren (Lemma 2.15), die wir in den vorigen Abschätzungen ausgespart haben. Insgesamt läßt sich damit Lemma 2.16 gewinnen.

Um $B_i \otimes_{G^{-1}-(1+G_i)^{-1}} B_i$ auf eine nutzbare Gestalt zu bringen, führen wir in Anlehnung an [AS2] die folgenden Objekte ein:

$$\begin{aligned}
\hat{B}_i(X, Y) &:= (\mathbb{1} + G_i)^{-1} \cdot B_i(X, Y) = \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \cdot B_i(X, Y) \\
(2.69) \quad &= + \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} \langle X, Y \rangle v_i \\
&- \frac{-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i)x_i^{-1}}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{3}{2}} p_i^v(X, Y) v_i \\
&+ \frac{\eta^2 h(x_i)x_i^{-1}}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{3}{2}} p_i^\xi(X, Y) v_i
\end{aligned}$$

und den positiv-semidefiniten Endomorphismus

$$\begin{aligned}
 (2.70) \\
 L_i &:= G_{J \setminus I} - G_{J \setminus I} G^{-1} G_{J \setminus I} = G_{J \setminus I} G^{-1} (\mathbb{1} + G_i) \\
 &= (\mathbb{1} + G_i) - (\mathbb{1} + G_i) G^{-1} (\mathbb{1} + G_i) = -(\mathbb{1} + G_i) \left(G^{-1} - (\mathbb{1} + G_i)^{-1} \right) (\mathbb{1} + G_i).
 \end{aligned}$$

Damit folgt dann direkt

$$\begin{aligned}
 (2.71) \\
 -B_i \otimes_{G^{-1}-(\mathbb{1}+G_i)^{-1}} B_i &= \widehat{B}_i \otimes_{L_i} \widehat{B}_i \\
 &= \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \left[\left(\frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \right)^2 x_i (1+x_i) g_0 \otimes g_0 \right. \\
 &\quad - \frac{-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1}}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \frac{\eta^2 h(x_i) x_i^{-1}}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} (1+x_i)^3 p_i \otimes p_i \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \right)^2 g_0 \otimes p_i^\xi \\
 &\quad \left. - 2 \frac{-\eta^2 h'(x_i) x_i + \eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} (1+x_i)^2 g_0 \otimes p_i^v \right].
 \end{aligned}$$

Da L_i positiv-semidefinit ist, können wir feststellen, daß sich diese Terme (bis auf den $g_0 \otimes g_0$ -Term) im Vorzeichen nicht von den entsprechenden expliziten unterscheiden. Wir fügen sie in Gleichung (2.68) ein:

(2.72)

$R^\# =$

$$\begin{aligned}
& -g_0 \otimes g_0 - \omega_0 \otimes \omega_0 \\
& + \left(1 + \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \right) \\
& \cdot \left[\frac{\eta^2 h(x_i)x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} g_0 \otimes g_0 - \frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} g_0 \otimes p_i^\xi - 2 \frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} g_0 \otimes p_i^v \right] \\
& + \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) g_0 \otimes g_0 - \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) x_j^{-1}(1+x_j)^2 p_j \otimes p_j \\
& - 2 \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j)x_j^{-1} \right) (1+x_j) g_0 \otimes p_j^v \\
& + 2 \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j)x_j^{-1}(1+x_j) g_0 \otimes p_j^\xi \\
& - 2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i - B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I}.
\end{aligned}$$

Für $\langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle$ steht uns dabei eine gute Abschätzung zur Verfügung: Aus der Definition (2.70) von L_i ist unmittelbar ersichtlich, daß $0 \leq L_i \leq G_{J \setminus I}$. Wegen Proposition 2.3 ergibt sich sofort

$$(2.73) \quad \|L_i\| \leq \eta^2 c_0$$

und damit $0 \leq \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \leq \eta^2 c_0$ und

$$(2.74) \quad 0 \leq \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \leq \eta^2 c_0.$$

Bemerkung . Die folgenden Abschätzungen für $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i$ und $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I}$ sowie für die Terme, in denen über $J \setminus I$ summiert wird, gestatten insgesamt keine Vorzeichenkontrolle. Daher ist es uns unmöglich, das Auftreten positiver Schnittkrümmung auszuschließen. Wir verdeutlichen dies an folgendem Beispiel: Sei w ein Einheitsvektorfeld auf einer Umgebung von $p_0 \in \mathbb{CH}_i^{n-1}$ mit $P_i \cdot w = 0$. Dann ist $\omega_0 \otimes \omega_0(\xi_i, w; w, \xi_i) = p_i \otimes p_i(\xi_i, w; w, \xi_i) = g_0 \otimes p_i^v(\xi_i, w; w, \xi_i) = 0$ und $g_0 \otimes g_0(\xi_i, w; w, \xi_i) = 2g_0 \otimes p_i^\xi(\xi_i, w; w, \xi_i) = 1$. Ist dann $p \notin \mathbb{CH}_i^{n-1}$ genügend nah bei p_0 , also $x_i(p)$ sehr klein, so spielen nur noch die erwähnten Terme eine Rolle, und ohne stärkere Voraussetzungen an $\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$ als Axiom 2.1 läßt sich keine Aussage über das Vorzeichen von $R^\#(\xi_i, w; w, \xi_i)$

treffen.

(2.75)

$$\begin{aligned}
R^\#(\xi_i, w; w, \xi_i) &\stackrel{x_i \approx 0}{\approx} \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \\
&+ \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) \left(1 + 2x_j^{-1}(1+x_j) \ g_0 \otimes p_j^\xi(\xi_i, w; w, \xi_i) \right) \\
&- \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) x_j^{-1} (1+x_j)^2 \ p_j \otimes p_j(\xi_i, w; w, \xi_i) \\
&- 2 \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) (1+x_j) \ g_0 \otimes p_j^v(\xi_i, w; w, \xi_i) \\
&- 2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i(\xi_i, w; w, \xi_i) - B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I}(\xi_i, w; w, \xi_i).
\end{aligned}$$

Ziel der weiteren Überlegungen kann daher allenfalls sein, möglichst gute Schranken für die Schnittkrümmung in Abhängigkeit von η zu bekommen. Die folgenden Abschätzungen sind insofern auf das Ergebnis in Lemma 2.16 ausgelegt.

Wir erhalten als erstes folgende Ungleichungen:

Lemma 2.10. *Es gilt auf $\Omega \cap U_I$*

(2.76)

$$\begin{aligned}
0 \leq & \left(1 + \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \right) \\
& \cdot \left[\frac{\eta^2 h(x_i) x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \ g_0 \otimes g_0 + 2 \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \ g_0 \otimes p_j^\xi \right] \leq (1 + \eta^2 c_0) \ g_0 \otimes g_0,
\end{aligned}$$

(2.77)

$$\begin{aligned}
-(1+c_3)(1+\eta^2 c_0) \ g_0 \otimes g_0 \leq & -2 \left(1 + \langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \right) \\
& \cdot \frac{-\eta^2 h'(x_i) x_i (1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \ g_0 \otimes p_i^v \leq 0,
\end{aligned}$$

(2.78)

$$\begin{aligned}
-\eta^2 c_0 (1+c_3) x_i^{-1} (1+x_i) \ p_i \otimes p_i \\
\leq & -\langle v_i, L_i \cdot v_i \rangle \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \\
& \cdot \frac{-\eta^2 h'(x_i) x_i (1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-1} (1+x_i) \ p_i \otimes p_i \leq 0,
\end{aligned}$$

wobei $c_3 := \sup \left\{ -\frac{x h'(x)}{h(x)} \mid x \leq \sinh^2 d_0 \right\}$.

Beweis. Es gilt $0 \leq 2 \ g_0 \otimes p_i^v \leq g_0 \otimes g_0$, $0 \leq 2 \ g_0 \otimes p_i^\xi \leq g_0 \otimes g_0$ und $0 \leq p_i \otimes p_i \leq g_0 \otimes g_0$. Außerdem ist $\eta \leq 1$ und somit $\eta^2 h(x_i) x_i \leq x_i$. $\square$

Die Abschätzungen aus den kommenden beiden Lemmata lassen sich direkt auf den Fall einer beliebigen Indexmenge I übertragen:

Lemma 2.11. *Auf $U_I \cap \Omega$ gilt*

$$(2.79) \quad 0 \leq \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) g_0 \otimes g_0 \leq \eta^2 c_4 g_0 \otimes g_0,$$

$$(2.80) \quad 0 \leq \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_j) + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} \right) x_j^{-1} (1+x_j)^2 p_j \otimes p_j \leq \eta^2 c_5 g_0 \otimes g_0,$$

$$(2.81) \quad 0 \leq \sum_{j \in J \setminus I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i) g_0 \otimes p_j^v \leq \eta^2 c_6 g_0 \otimes g_0,$$

$$(2.82) \quad 0 \leq \sum_{j \in J \setminus I} \eta^2 h(x_j) x_j^{-1} (1+x_j) g_0 \otimes p_j^\xi \leq \eta^2 c_7 g_0 \otimes g_0,$$

mit Konstanten c_4, c_5, c_6 und c_7 , die nur von n, h, d_0 und $\hat{N}$ abhängen.

Beweis. Es ist $0 \leq 2 g_0 \otimes p_i^v \leq g_0 \otimes g_0$, $0 \leq 2 g_0 \otimes p_i^\xi \leq g_0 \otimes g_0$ und $0 \leq p_i \otimes p_i \leq g_0 \otimes g_0$. Der Beweis der Konvergenz der Koeffizienten verläuft analog zu den bisherigen Konvergenzbeweisen. $\square$

Lemma 2.12. *Es gibt eine nur von n, h, d_0 und $\hat{N}$ abhängende Konstante c_8 , so daß auf $U_I \cap \Omega$*

$$(2.83) \quad \|B_{J \setminus I}\| \leq \eta^2 c_8$$

$$(2.84) \quad -2 \eta^4 c_8^2 g_0 \otimes g_0 \preceq B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_{J \setminus I} \preceq 2 \eta^4 c_8^2 g_0 \otimes g_0$$

gilt.

Beweis. Die erste Ungleichung folgt mit dem üblichen Konvergenzbeweis aus Gleichung (2.45) in Lemma 2.6. Die zweite ergibt sich aus der ersten mittels Lemma A.1, da $G^{-1} \leq \mathbb{1}$ und damit $\|G^{-1}\| \leq 1$ ist. $\square$

Der jetzt behandelte Term $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i$ erfordert den meisten Aufwand: Zunächst schreiben wir $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i$ als $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \hat{B}_i$, wobei $\hat{B}_i := (1+G_i)^{-1} B_i$, da dies zum einen die Singularitäten des rechten Faktors verringert und zum anderen

$$(2.85) \quad \|G^{-1}(1+G_i)\| \leq 1 + \eta^2 c_0$$

wegen $G^{-1}(1+G_i) = \mathbf{1} - G^{-1}G_{J \setminus I}$ gilt. Außerdem zerlegen wir $\widehat{B}_i$ in seine drei Anteile

(2.86)

$$\widehat{B}_i^1(X, Y) = \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \langle X, Y \rangle v_i,$$

(2.87)

$$\widehat{B}_i^2(X, Y) = - \frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} p_i^v(X, Y) v_i,$$

(2.88)

$$\widehat{B}_i^3(X, Y) = \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} p_i^\xi(X, Y) v_i.$$

Wir erhalten dann

$$(2.89) \quad \|\widehat{B}_i^1\| \leq 1,$$

$$(2.90) \quad \|\widehat{B}_i^2\| \leq (1+c_3) x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}},$$

$$(2.91) \quad \|\widehat{B}_i^3\| \leq x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $c_3 = \sup\{-\frac{xh'(x)}{h(x)} \mid x \leq \sinh^2 d_0\}$ die Konstante aus Lemma 2.10 ist.

Mit Lemma A.1 folgt wegen $\|B_{J \setminus I}\| \leq \eta^2 c_8$, $\|G^{-1}(1+G_i)\| \leq 1 + \eta^2 c_0$ und $\|\widehat{B}_i^1\| \leq 1$ unmittelbar

(2.92)

$$-2\eta^2 c_8 (1+\eta^2 c_0) g_0 \otimes g_0 \preceq B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^1 \preceq 2\eta^2 c_8 (1+\eta^2 c_0) g_0 \otimes g_0.$$

Die beiden anderen Komponenten erfordern eine andere Technik. Für $\mu = 2, 3$ ist

(2.93)

$$\begin{aligned} B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu &= B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu \\ &\quad + \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbf{1}-P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbf{1}-P_i) \cdot, P_i \cdot) \right) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu \\ &\quad + B_{J \setminus I}((\mathbf{1}-P_i) \cdot, (\mathbf{1}-P_i) \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu, \end{aligned}$$

und wegen $\widehat{B}_i = P_i \cdot \widehat{B}_i$ gilt

(2.94)

$$\begin{aligned} B_{J \setminus I}((\mathbf{1}-P_i) \cdot, (\mathbf{1}-P_i) \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu &= P_i B_{J \setminus I}((\mathbf{1}-P_i) \cdot, (\mathbf{1}-P_i) \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu \\ &\quad + B_{J \setminus I}((\mathbf{1}-P_i) \cdot, (\mathbf{1}-P_i) \cdot) \otimes_{(1-P_i)G^{-1}(1+G_i)P_i} \widehat{B}_i^\mu. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung dieser beiden letzten Terme muß wie in [AS2] eine zusätzliche Symmetrieforderung an $\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$ gestellt werden, die in Anhang D wiedergegeben ist.¹⁴ Mit Hilfe dieser Bedingung erhalten wir dort die folgenden Ungleichungen

$$(D.12) \quad \|P_i B_{J \setminus I}((\mathbf{1}-P_i) \cdot, (\mathbf{1}-P_i) \cdot)\| \leq \eta^2 c_9 x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}},$$

$$(D.19) \quad \|(\mathbf{1}-P_i)G^{-1}(1+G_i)P_i\| \leq \eta^2 c_{10}(1+\eta^2 c_0) x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

¹⁴Die Anordnung aus Satz 2.18 erfüllt diese Forderung.

Damit folgt sofort aus Lemma A.1 wegen $\|B_{J \setminus I}\| \leq \eta^2 c_8$, $\|G^{-1}(1+G_i)\| \leq 1 + \eta^2 c_0$, $\|\widehat{B}_i^\mu\| \leq x_i^{-\frac{1}{2}}(1+x_i)^{\frac{1}{2}}$ und $\eta \leq 1$

(2.95)

$$-2\eta^2 c_{11} g_0 \otimes g_0 \preceq P_i B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^\mu \preceq 2\eta^2 c_{11} g_0 \otimes g_0,$$

(2.96)

$$-2\eta^4 c_{12} g_0 \otimes g_0 \preceq B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) \otimes_{(1-P_i)G^{-1}(1+G_i)P_i} \widehat{B}_i^\mu \preceq 2\eta^4 c_{12} g_0 \otimes g_0,$$

wenn man $c_{11} := c_9(1+c_0)(1+c_3)$ und $c_{12} := c_8 c_{10}(1+c_0)(1+c_3)$ setzt.

Es verbleibt, die beiden ersten Zeilen aus Gleichung (2.93) abzuschätzen. Dazu ist die Symmetriebedingung nicht erforderlich, statt dessen kommt eine Interpolationsformel für $\otimes$ -Produkte zur Anwendung, nämlich das Korollar A.3 aus [AS2], das wir hier gleich zu der für uns interessanten Aussage spezialisieren. Zunächst aber schreiben wir die Terme in etwas anderer Form

(2.97)

$$\begin{aligned} & B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^2 \\ &= - \frac{-\eta^2 h'(x_i) x_i (1+x_i) + \eta^2 h(x_i) (1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i) (1+x_i)} x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} \langle (1+G_i) G^{-1} B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot), v_i \rangle \otimes p_i^v, \end{aligned}$$

(2.98)

$$\begin{aligned} & B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^3 \\ &= \frac{\eta^2 h(x_i) (1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i) (1+x_i)} x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} \langle (1+G_i) G^{-1} B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot), v_i \rangle \otimes p_i^\xi, \end{aligned}$$

(2.99)

$$\begin{aligned} & \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, P_i \cdot) \right) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^2 \\ &= - \frac{-\eta^2 h'(x_i) x_i (1+x_i) + \eta^2 h(x_i) (1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i) (1+x_i)} x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \cdot \langle (1+G_i) G^{-1} \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, P_i \cdot) \right), v_i \rangle \otimes p_i^v, \end{aligned}$$

(2.100)

$$\begin{aligned} & \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, P_i \cdot) \right) \otimes_{G^{-1}(1+G_i)} \widehat{B}_i^3 \\ &= \frac{\eta^2 h(x_i) (1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i) (1+x_i)} x_i^{-\frac{1}{2}} (1+x_i)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \cdot \langle (1+G_i) G^{-1} \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, P_i \cdot) \right), v_i \rangle \otimes p_i^\xi. \end{aligned}$$

Das erwähnte Korollar lautet

Korollar 2.13. *Sei b eine symmetrische Bilinearform, die auf $(\text{im } P_i)^\perp \times (\text{im } P_i)^\perp$ verschwindet, dann gilt für alle $\delta > 0$*

$$(2.101) \quad -\delta \|b\| p_i \otimes p_i - \frac{1}{\delta} \|b\| g_0 \otimes g_0 \leq g_0 \otimes p_i^v \leq -\delta \|b\| p_i \otimes p_i - \frac{1}{\delta} \|b\| g_0 \otimes g_0,$$

$$(2.102) \quad -\delta \|b\| p_i \otimes p_i - \frac{1}{\delta} \|b\| g_0 \otimes g_0 \leq g_0 \otimes p_i^\xi \leq -\delta \|b\| p_i \otimes p_i - \frac{1}{\delta} \|b\| g_0 \otimes g_0.$$

Insbesondere folgt also für $b_1 := x_i^{-\frac{1}{2}}(1+x_i)^{\frac{1}{2}} \langle (1+G_i)G^{-1}B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot), v_i \rangle$
und $\delta = x_i^{-\frac{1}{2}}(1+x_i)^{\frac{1}{2}}$ wegen $\|b_1\| \leq (1+\eta^2 c_0)\eta^2 c_8 \leq \eta^2 c'_8$ mit $c'_8 := (1+c_0)c_8$

(2.103)

$$-\eta^2 c'_8 x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - \eta^2 c'_8 g_0 \otimes g_0 \leq b_1 \otimes p_i^{v/\xi} \leq \eta^2 c'_8 x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i + \eta^2 c'_8 g_0 \otimes g_0$$

und für $b_2 := x_i^{-\frac{1}{2}}(1+x_i)^{\frac{1}{2}} \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, P_i \cdot) \right)$ wegen
 $\|b_2\| \leq 2\eta^2 c'_8$

(2.104)

$$-2\eta^2 c'_8 x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - 2\eta^2 c'_8 g_0 \otimes g_0 \leq b_2 \otimes p_i^{v/\xi} \leq 2\eta^2 c'_8 x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i + 2\eta^2 c'_8 g_0 \otimes g_0.$$

Aufgrund von $\frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \leq 1 + c_3$ und $\frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \leq 1 \leq 1 + c_3$ liefern die Gleichung (2.103–2.104) insgesamt

(2.105)

$$\begin{aligned} -\eta^2 c_{13} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - \eta^2 c_{13} g_0 \otimes g_0 \\ \leq B_{J \setminus I}(P_i \cdot, P_i \cdot) \otimes_{G^{-1}(\mathbb{1}+G_i)} \widehat{B}_i^\mu \\ \leq \eta^2 c_{13} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i + \eta^2 c_{13} g_0 \otimes g_0, \end{aligned}$$

(2.106)

$$\begin{aligned} -2\eta^2 c_{13} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - 2\eta^2 c_{13} g_0 \otimes g_0 \\ \leq \left(B_{J \setminus I}(P_i \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) + B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, P_i \cdot) \right) \otimes_{G^{-1}(\mathbb{1}+G_i)} \widehat{B}_i^\mu \\ \leq 2\eta^2 c_{13} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i + 2\eta^2 c_{13} g_0 \otimes g_0, \end{aligned}$$

wobei $c_{13} := c'_8(1+c_3)$.

Aus den vorangegangenen Überlegungen erhalten wir die folgende Abschätzung
für $B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i$:

Lemma 2.14. *Es gibt nur von n, h, d_0 und $\hat{N}$ abhängige Konstanten c_{14} und c_{15} ,
so daß auf $U_I \cap \Omega$*

(2.107)

$$-\eta^2 c_{14} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - \eta^2 c_{15} g_0 \otimes g_0 \preceq 2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i \preceq \eta^2 c_{14} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i + \eta^2 c_{15} g_0 \otimes g_0$$

gilt.

In der zusammenfassenden Krümmungstensorabschätzung können wir das Auftreten einer singulären oberen Schranke der Form $\eta^2 c_{14} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i$ vermeiden, indem wir $2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i$ geschickt verrechnen. Es gilt zunächst folgende Abschätzung ($\eta^2 \leq 1$):

(2.108)

$$\begin{aligned} -(1+c_3+c_{14}) x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - \eta^2 c_{15} g_0 \otimes g_0 \\ \preceq -\frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i - 2 B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i \\ \preceq \left(\eta^2 c_{14} - \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} \right) x_i^{-1}(1+x_i) p_i \otimes p_i + \eta^2 c_{15} g_0 \otimes g_0. \end{aligned}$$

Folgende Überlegung zeigt, warum diese Zusammenfassung vorteilhaft ist: Die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(c_{14} - \frac{2c_{14}h(x)(1+x)}{2c_{14}x+h(x)(1+x)}\right)x^{-1}(1+x)$ ist wegen $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c_{14}$ nach oben beschränkt. Sei $C := \sup_{x \in (0, \infty)} f(x) + 1 > c_{14}$. Für $0 < x < \frac{c_{14}}{C-c_{14}}$ folgt $c_{14} - Cx(1+x)^{-1} > 0$ und daher aus $f(x) < C$ unmittelbar $c_{14} - Cx(1+x)^{-1} < \frac{2c_{14}h(x)(1+x)}{2c_{14}x+h(x)(1+x)}$ und somit $\frac{1}{c_{14}-Cx(1+x)^{-1}} - \frac{x}{h(x)(1+x)} > \frac{1}{2c_{14}}$. Ist dann $\eta^2 \leq \eta_0^2 := \min\{1, \frac{1}{2c_{14}}\}$, so ergibt sich $\frac{h(x)(1+x)}{c_{14}-Cx(1+x)^{-1}} > \eta^2 h(x)(1+x) + x$ oder äquivalent dazu $\frac{h(x)(1+x)}{x+\eta^2 h(x)(1+x)} > c_{14} - Cx(1+x)^{-1}$. Die letzte Ungleichung ist für $x \geq \frac{c_{14}}{C-c_{14}}$ trivial. Daher gilt insgesamt für alle $x \in (0, \infty)$

$$(2.109) \quad \left(\eta^2 c_{14} - \frac{\eta^2 h(x)(1+x)}{x + \eta^2 h(x)(1+x)}\right)x^{-1}(1+x) \leq \eta^2 C.$$

Wir erhalten somit:

Lemma 2.15. *Es gibt Konstanten C und $0 < \eta_0 \leq 1$, die nur von n , h , d_0 und $\hat{N}$ abhängen, so daß*

$$(2.110) \quad \begin{aligned} & -(1 + c_3 + c_{14})x_i^{-1}(1+x_i) \ p_i \otimes p_i - \eta^2 c_{15} g_0 \otimes g_0 \\ & \preceq -\frac{-\eta^2 h'(x_i)x_i(1+x_i) + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)(1+x_i)} x_i^{-1}(1+x_i) \ p_i \otimes p_i - 2B_{J \setminus I} \otimes_{G^{-1}} B_i \\ & \leq \eta^2 C \ p_i \otimes p_i + \eta^2 c_{15} g_0 \otimes g_0. \end{aligned}$$

auf $U_I \cap \Omega$ für $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Abschließend können wir den Krümmungstensor folgendermaßen einschließen:

Lemma 2.16. *Es gibt Konstanten C_1, C_2, C_3 und $0 < \eta_0 \leq 1$, die nur von n , h , d_0 und $\hat{N}$ abhängen, so daß auf $U_I \cap \Omega$ für $0 \leq \eta \leq \eta_0$*

$$(2.111) \quad -C_1 g_0 \otimes g_0 - C_2 x_i^{-1}(1+x_i) \ p_i \otimes p_i \preceq R^\# \preceq \eta^2 C_3 g_0 \otimes g_0$$

gilt.

Ein Vergleich mit

$$(2.112) \quad g \otimes g = g_0 \otimes g_0 + 2 \sum_{j \in J} \eta^2 h(x_j) x_j^{-1}(1+x_j) \ g_0 \otimes p_j^v + \sum_{j,k \in J} \eta^4 h(x_j) h(x_k) x_j^{-1}(1+x_j) \ x_k^{-1}(1+x_k) \ p_j^v \otimes p_k^v$$

liefert wegen $g \otimes g \geq g_0 \otimes g_0$ und $g \otimes g \geq 2\eta^2 h(x_i) x_i^{-1}(1+x_i) \ g_0 \otimes p_i^v \geq \eta^2 h(\sinh^2 d_0) x_i^{-1}(1+x_i) \ p_i \otimes p_i$ das folgende Lemma:

Lemma 2.17. *Es gibt Konstanten Λ und $0 < \eta_0 \leq 1$, die nur von n , h , d_0 und $\hat{N}$ abhängen, so daß auf Ω für die Familie Riemannscher Metriken $(g_\eta)_{0 < \eta \leq \eta_0}$*

$$(2.113) \quad -\frac{1}{\eta^2} \Lambda g \otimes g \preceq R^\# \preceq \eta^2 \Lambda g \otimes g$$

gilt.

Den Abschnitt beenden wir mit dem folgenden Ergebnis:

Satz 2.18. *Sei V eine kompakte, total-geodätisch eingebettete Untermannigfaltigkeit der Codimension 2 in einem kompakten komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{CH}^n/\Gamma$ und $\rho \in \text{Iso}(\mathbb{CH}^n/\Gamma)$ eine Rotation, deren Fixpunktmenge V ist. Die Urbilder dieser Untermannigfaltigkeit unter der kanonischen Projektion $pr : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{CH}^n/\Gamma$ seien total-geodätische $\mathbb{CH}_j^{n-1}$, $j \in J$. Dann trägt $\widehat{\Omega} = \mathbb{CH}^n/\Gamma \setminus V$ eine Familie vollständiger, reell-analytischer Riemannscher Metriken $(\widehat{g}_\eta)_{0 < \eta \leq \eta_0}$, die*

$$(2.114) \quad -\frac{1}{\eta^2} \Lambda \leq K_\eta \leq \eta^2 \Lambda$$

mit einer dimensionsabhängigen Konstanten Λ genügt.

2.7. Streckung mit einer C^∞ -Funktion. Im Gegensatz zu den vorangehenden Abschnitten dieses Kapitels betrachten wir hier auf Ω eine Metrik der Form $g = g_0 + \sum_{J \setminus I} g_j$ mit $g_j = \eta^2 h(x_j)(1+x_j) x_j^{-1} p_j^v$, wobei jetzt $h : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ eine C^∞ -Funktion mit $h(0) = 1$, $h' \leq 0$ und $\text{supp } h \leq \frac{d_0}{2}$ ist. Alle bisher aufgetretenen Reihen reduzieren sich damit lokal zu endlichen Summen, und es sind keine Konvergenzbeweise erforderlich. Der Krümmungstensor der C^∞ -Metrik g auf Ω läßt sich direkt aus (2.66) übernehmen. Aufgrund der Definition von U_I und der Bedingung an den Träger von h verschwinden auf $U_I \cap \Omega$ alle Terme, in denen über $J \setminus I$ summiert wird. Ebenso verschwinden $B_{J \setminus I}$, da die einzelnen B_j gemäß Lemma 2.6 gegeben sind, und $G^{-1} - (\mathbb{1} + G_I)^{-1}$, weil $G_{J \setminus I}$ verschwindet. Wir erhalten daher

$$(2.115) \quad \begin{aligned} R^\# &= -\omega_0 \otimes \omega_0 - \frac{1}{1+\sigma} \rho \otimes \rho \\ &\quad - \sum_{i \in I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i)^2 \frac{1}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i \otimes p_i, \end{aligned}$$

wobei

$$(2.116) \quad \begin{aligned} \rho &:= g_0 + \sum_{i \in I} \left(-\eta^2 h'(x_i) + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} \right) (1+x_i) \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i^v \\ &\quad - \sum_{i \in I} (1+x_i) \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i^\xi. \end{aligned}$$

Da p_i^v eine positiv-semidefinite Bilinearform ist und $g_0 - \sum_{i \in I} (1+x_i) \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i^\xi$ für $\eta^2 \leq \frac{1}{N}$ gemäß Lemma C.3 auf Ω positiv-definit ist, ist auch ρ auf Ω positiv-definit, und wir erhalten negative Krümmung für die Metrik g .

Indem wir die in den vorigen Abschnitten erzielten Ergebnisse verwerten, erhalten wir abschließend

Satz 2.19. *Sei $(\bar{V}_i)_{i=1}^N$ eine Familie kompakter, total-geodätisch eingebetteter Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2 in einem kompakten komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{CH}^n/\Gamma$. Die Urbilder dieser Untermannigfaltigkeiten unter der kanonischen Projektion $pr : \mathbb{CH}^n \rightarrow \mathbb{CH}^n/\Gamma$ seien total-geodätische $\mathbb{CH}_j^{n-1}$, $j \in J$, die sich paarweise orthogonal in Codimension 4-Untermannigfaltigkeiten schneiden. Dann*

trägt $\bar{\Omega} := \mathbb{CH}^n / \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^N \bar{V}_i$ eine vollständige Riemannsche Metrik der Klasse C^∞ , deren Schnittkrümmung negativ und gleichmäßig nach unten beschränkt ist.

Bemerkung . Das entsprechende Ergebnis für Quotienten des hyperbolischen Raums wurde in [AS1] bewiesen. Dort wird die Bedingung an den Träger von h von Beginn an ausgenutzt, was eine stark vereinfachte Krümmungsberechnung erlaubt. Dieselbe Rechnung läßt sich – wie in [AS1] schon angedeutet – leicht auf den komplex-hyperbolischen Fall übertragen und bestätigt (2.115). Man sieht an dieser Stelle den Unterschied zwischen der analytischen Streckung und der C^∞ -Streckung aufs deutlichste: Die Voraussetzung an den Träger von h ist keine künstliche Bedingung, sondern für den Gewinn einer Metrik negativer Krümmung zwingend erforderlich. Im C^∞ -Fall gibt es nämlich keinen Spielraum für etwaige, noch so kleine Fernwirkungsterme, denn auf der Ebene zweier Killingfelder geht die Krümmung mit Annäherung an den Divisor gegen 0, während die Fernwirkungsterme aus (2.66) zwar klein sind, aber nicht verschwinden und vom Vorzeichen nicht kontrolliert werden können.

Analog zu [AS1] ließe sich übrigens mit der Koflächenformel zeigen, daß die Mannigfaltigkeiten aus Satz 2.19 endliches Volumen besitzen. Läßt man die Bedingung an den Träger von h fallen, so ist auch diese Rechnung in dieser Form nicht mehr möglich.

3. RIEMANNSCHE METRIKEN AUF DEM BLOW-UP

In [AS2] werden reell-analytische Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Schnittkrümmung konstruiert. Dabei handelt es sich um Blow-ups von kompakten Quotienten des hyperbolischen Raums längs total-geodätischer Untermannigfaltigkeiten der Codimension 2. Diese Blow-ups tragen eine Metrik, die in der universellen Überlagerung $\mathbb{H}^n$ aus der Standardmetrik durch Streckung in Richtung der Killingfelder zu Rotationen um die Urbilder der total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten hervorgegangen ist. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß sich die Konstruktion direkt übertragen läßt, wenn man anstelle des hyperbolischen Raums $\mathbb{H}^n$ den komplex-hyperbolischen Raum $\mathbb{CH}^n$ als Ausgangspunkt wählt, insbesondere deshalb, weil diese Aussage im einfachsten Fall aufgrund der metrischen Äquivalenz von $\mathbb{CH}^1$ und $\mathbb{H}^2$ offensichtlich ist. Im folgenden wollen wir anhand der Krümmungsberechnung in einer vereinfachten, aber grundlegenden Situation aufzeigen, daß sich diese Vermutung schon für $\mathbb{CH}^2$ als falsch erweist, sich also die Konstruktion aus [AS2] nicht unmittelbar übertragen läßt. Statt allgemein den Blow-up von total-geodätischen Untermannigfaltigkeiten in kompakten Quotienten zu betrachten, untersuchen wir den Blow-up zweier sich orthogonal schneidender total-geodätischer $\mathbb{CH}^1$ in $\mathbb{CH}^2$. Es stellt sich heraus (Satz 3.1), daß bei der entsprechend [AS2] definierten Metrik bestimmte Ebenen im Tangentialbündel des Divisors positive Schnittkrümmung tragen. Dieses Auftreten positiver Schnittkrümmung liegt dabei nicht in der Forderung nach reeller Analytizität der Metrik begründet, sondern ist konzeptionell bedingt. Im Anschluß daran werden wir kurz

darauf eingehen, inwiefern der Streckungsansatz zumindest in der vereinfachten Situation modifiziert werden kann, um die für die positiven Schnittkrümmungen verantwortliche Ursache zu beseitigen.

3.1. Blow-up. Wir geben zunächst ein elementares Modell des Blow-ups $M^4 \rightarrow \mathbb{CH}^2$ zweier sich senkrecht schneidender $\mathbb{CH}^1$ in $\mathbb{CH}^2$ an. Dazu sei e_0, e_1, e_2 eine $\tilde{q}$ -ON-Basis von $\mathbb{C}^{2,1}$ mit $\langle\langle e_0, e_0 \rangle\rangle = -1$. Desweiteren sei

$$(3.1) \quad \begin{aligned} E_1 &:= \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, e_2\}, & \mathbb{CH}_1^1 &:= \pi(E_1 \cap M^5), \\ E_2 &:= \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_0, e_1\}, & \mathbb{CH}_2^1 &:= \pi(E_2 \cap M^5), \\ E &:= \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, e_1, e_2\}, & \mathbb{H}^2 &:= \pi(E \cap M^5), \\ E^+ &:= \{w \in E \mid \langle\langle w, e_0 \rangle\rangle < 0\}. \end{aligned}$$

Sind nun $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so ist

$$(3.2) \quad z = \sqrt{1 + \sinh^2 r_1 + \sinh^2 r_2} e_0 + \sinh r_1 e_1 + \sinh r_2 e_2$$

das eindeutig bestimmte $z \in E^+ \cap M^5$ mit $\langle\langle z, e_1 \rangle\rangle = \sinh r_1$ und $\langle\langle z, e_2 \rangle\rangle = \sinh r_2$. Dies ermöglicht die Definition eines C^ω -Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{CH}^2$ sowie die einer C^ω -Surjektion $f = \pi \circ \tilde{f} : S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{CH}^2$ durch

$$(3.3) \quad \tilde{f}(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = \sqrt{1 + \sinh^2 r_1 + \sinh^2 r_2} e_0 + \sinh r_1 e^{i\varphi_1} e_1 + \sinh r_2 e^{i\varphi_2} e_2.$$

Es gilt dabei

$$(3.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = K_1 \circ f, \quad \frac{\partial f}{\partial r_1} = \text{sgn } r_1 \left(\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{1+x_1+x_2} v'_1 \right) \circ f,$$

$$(3.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = K_2 \circ f, \quad \frac{\partial f}{\partial r_2} = \text{sgn } r_2 \left(\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{1+x_1+x_2} v'_2 \right) \circ f.$$

Dabei sind $v'_1 := v_1 - \langle v_1, v_2 \rangle v_2$ und $v'_2 := v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_1$ zur Dualbasis von v_1 und v_2 proportional.

Bezeichnet $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ die diskrete, freie Gruppe von Diffeomorphismen von $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ mit den Erzeugenden $(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) \mapsto (\varphi_1 + \pi, \varphi_2, -r_1, r_2)$ und $(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2 + \pi, r_1, -r_2)$, so faktorisiert f gemäß dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{pr} & (S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2)/\Lambda \\ f \downarrow & & F \downarrow \\ \mathbb{CH}^2 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{CH}^2 \end{array}$$

$M^4 := (S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2)/\Lambda$ ist der *Blow-up* von $\mathbb{CH}^2$ längs $\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1$. Die Abbildung F ist nämlich ein C^ω -Diffeomorphismus zwischen $pr(S^1 \times S^1 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ und $\mathbb{CH}^2 \setminus (\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1)$. Desweiteren gilt für die Fasern eines Punktes

$$(3.7) \quad F^{-1}(p) \cong \begin{cases} \mathbb{RP}^1, & p \in (\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1) \setminus (\mathbb{CH}_1^1 \cap \mathbb{CH}_2^1), \\ \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1, & p \in \mathbb{CH}_1^1 \cap \mathbb{CH}_2^1. \end{cases}$$

3.2. Streckung der Metrik. Wir betrachten auf $\mathbb{CH}^2 \setminus \mathbb{CH}_1^1$ die Metrik

$$(3.8) \quad g_0 + h(x_1) x_1^{-2} \langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle,$$

mit einer C^∞ - bzw. C^ω -Funktion $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $h(0) > 0$. Dieser entspricht mittels f die auf ganz $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ erklärable Riemannsche Metrik

$$g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ 0 & \bar{\bar{g}} \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$(3.9) \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} x_1(1+x_1) + (1+x_1)^2 h(x_1) & x_1 x_2 + (1+x_1)x_2 h(x_1) \\ x_1 x_2 + (1+x_1)x_2 h(x_1) & x_2(1+x_2) + x_2^2 h(x_1) \end{pmatrix},$$

$$(3.10) \quad \bar{\bar{g}} = \frac{(1+x_1)(1+x_2)}{1+x_1+x_2} \begin{pmatrix} 1 & -th_1 th_2 \\ -th_1 th_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei steht th_i als Abkürzung für $\tanh r_i$. Bezüglich dieser Riemannschen Metrik g auf $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ sind die Elemente von Λ Isometrien, so daß sich mittels g eine vollständige Metrik der Klasse C^∞ bzw. C^ω auf dem Blow-up erklären läßt. g ist vollständig, denn es gilt $d_{g_0}(F \cdot, F \cdot) \leq d_g$, falls d_{g_0} und d_g die zu g_0 und g gehörenden Abstandsfunktionen sind. Die Bilder jeder Cauchyfolge auf dem Blow-up unter F konvergieren somit. Daher liegen die Folgenglieder wegen der Eigenschaft (3.7) von F in einer kompakten Menge, und die Cauchyfolge besitzt eine konvergente Teilfolge, konvergiert also.

3.3. Schnittkrümmung. Die Krümmungsberechnung führen wir in der universellen Überlagerung durch. Dazu bezeichnen wir mit $b_1, \dots, b_4$ die Standardbasis auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Wir benötigen desweiteren

$$(3.11) \quad \bar{\bar{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & th_1 th_2 \\ th_1 th_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

In Koordinatenschreibweise $g^{ij} = g^{-1}(b_i, b_j)$ lautet dies

$$(3.12) \quad g^{33} = g^{44} = 1, \quad g^{34} = g^{43} = th_1 th_2.$$

Wir ziehen die schon in (2.42) benutzte Formel für den $(4,0)$ -Krümmungstensor heran. Da der euklidische Krümmungstensor verschwindet, schreiben sich die Komponenten $R_{ijkl} := g(R(b_i, b_j)b_k, b_l)$ in der Form $R_{ijkl} = R'_{ijkl} + R''_{ijkl}$, wobei

$$(3.13) \quad R'_{ijkl} = -\frac{1}{2} \left[d_{b_i, b_l}^2 g(b_j, b_k) - d_{b_j, b_l}^2 g(b_i, b_k) - d_{b_i, b_k}^2 g(b_j, b_l) + d_{b_j, b_k}^2 g(b_i, b_l) \right]$$

und

$$(3.14) \quad R''_{ijkl} = \langle B(b_j, b_l), G^{-1} \cdot B(b_i, b_k) \rangle - \langle B(b_i, b_l), G^{-1} \cdot B(b_j, b_k) \rangle.$$

Mit der Bezeichnung

$$(3.15) \quad B_{ijk} := \langle B(b_i, b_j), b_k \rangle = \frac{1}{2} \left[d_{b_i} g(b_j, b_k) + d_{b_j} g(b_i, b_k) + d_{b_k} g(b_i, b_j) \right]$$

gilt aufgrund der Blockstruktur der Metrik $R''_{ijkl} = R'''_{ijkl} + R''''_{ijkl}$, wobei

(3.16)

$$R'''_{ijkl} = \sum_{\mu, \nu=1}^2 \left(B_{jl\mu} B_{ik\nu} - B_{il\mu} B_{jk\nu} \right) g^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad R''''_{ijkl} = \sum_{\mu, \nu=3}^4 \left(B_{jl\mu} B_{ik\nu} - B_{il\mu} B_{jk\nu} \right) g^{\mu\nu}.$$

Wir werden im folgenden die R_{1221} -Komponente des Krümmungstensors berechnen und sehen, daß sie für $r_1 = 0$ positiv ist, so daß sich vermöge der angegebenen Konstruktion eine Mannigfaltigkeit nicht-positiver Krümmung nicht erzielen läßt. Dazu bemerken wir zunächst, daß $R'_{1221} = 0$ ist, da die Metrik (3.9/3.10) rotations-symmetrisch ist, partielle Ableitungen nach den Winkelkoordinaten also verschwinden. Aus demselben Grund gilt auch $R''_{1221} = 0$, denn in den dort auftretenden B_{ijk} sind sämtliche Indizes kleiner als drei. Es gilt daher

(3.17)

$$R_{1221} = R''''_{1221} = \left((B_{123})^2 - B_{113} B_{223} \right) g^{33} + \left((B_{124})^2 - B_{114} B_{224} \right) g^{44} + \left(2B_{123} B_{124} - B_{223} B_{114} - B_{113} B_{224} \right) g^{34},$$

und es verbleibt, die folgenden Komponenten von B auszurechnen: B_{113} , B_{114} , B_{123} , B_{124} , B_{223} und B_{224} . Wir bedienen uns dabei der Identität

$$(3.18) \quad \frac{\partial x_k}{\partial r_k} = 2th_k(1+x_k)$$

für $k = 1, 2$.

(3.19)

$$B_{113} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial r_1}(b_1, b_1) = -th_1(1+x_1)(1+2x_1) - 2th_1(1+x_1)^2 h(x_1) - th_1(1+x_1)^3 h'(x_1),$$

(3.20)

$$B_{114} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial r_2}(b_1, b_1) = 0,$$

(3.21)

$$B_{123} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial r_1}(b_1, b_2) = -th_1(1+x_1)x_2 - th_1(1+x_1)x_2 h(x_1) - th_1(1+x_1)^2 x_2 h'(x_1),$$

(3.22)

$$B_{124} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial r_2}(b_1, b_2) = -th_2 x_1(1+x_2) - th_2(1+x_1)(1+x_2) h(x_1),$$

(3.23)

$$B_{223} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial r_1}(b_2, b_2) = -th_1(1+x_1)x_2^2 h'(x_1),$$

(3.24)

$$B_{224} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial r_2}(b_2, b_2) = -th_2(1+x_2)(1+2x_2) - 2th_2 x_2(1+x_2)^2 h(x_1).$$

Einsetzen dieser Terme und der aus (3.12) in (3.17) liefert nach einigen Zusammenfassungen

$$(3.25) \quad R_{1221} = -(1+x_1+x_2) \left[x_1 x_2 + x_1(1+x_1)x_2 h'(x_1) - (1+x_1)x_2 h(x_1)^2 \right].$$

Insbesondere erhält man daher für $r_1 = 0$ und $r_2 \neq 0$

$$(3.26) \quad R_{1221} = x_2(1+x_2)h(0)^2 > 0$$

und damit positive Schnittkrümmung.

In analoger Weise zeigt man, daß auch bei der Metrik

$$(3.27) \quad g_0 + h(x_1)x_1^{-2}\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle + h(x_2)x_2^{-2}\langle \cdot, K_2 \rangle \langle K_2, \cdot \rangle$$

stets positive Schnittkrümmungen auftreten. Bei der vorangegangenen Rechnung sind dazu nur die passenden Terme zu ergänzen. Letztendlich ergibt sich auf dem Divisor wieder (3.26). Die Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Satz 3.1. *Seien $\mathbb{CH}_1^1$ und $\mathbb{CH}_2^1$ zwei total-geodätisch eingebettete Codimension 2-Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{CH}^2$, die sich in einem Punkt orthogonal schneiden. Mit K_1 und K_2 seien die Killingfelder zu den Rotationen um diese Untermannigfaltigkeiten bezeichnet. Sei ferner $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine C^∞ - bzw. eine C^ω -Funktion mit $h(0) > 0$. Dann lassen sich die Riemannschen Metriken $g_0 + h(x_1)x_1^{-2}\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle$ und $g_0 + h(x_1)x_1^{-2}\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle + h(x_2)x_2^{-2}\langle \cdot, K_2 \rangle \langle K_2, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{CH}^2 \setminus (\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1)$ zu vollständigen Riemannschen Metriken der Klasse C^∞ bzw. C^ω auf dem Blow-up $M^4 \rightarrow \mathbb{CH}^2$ von $\mathbb{CH}_1^1 \cup \mathbb{CH}_2^1 \subset \mathbb{CH}^2$ fortsetzen. Es treten dabei stets positive Schnittkrümmungen auf.*

3.4. Vergleich mit der analogen Situation in $\mathbb{H}^n$, Modifikation der Streckung. Streckungen der hyperbolischen Metrik in Richtung der Killingfelder zu Rotationen um total-geodätische Codimension 1-Untermannigfaltigkeiten und der Übergang zum Blow-up, der dann eine reell-analytische Metrik nicht-positiver Krümmung trägt, wurden viel allgemeiner in [AS2] abgehandelt. Wir wollen hier jedoch kurz die Situation des vorangehenden Abschnitts mit der dazu direkt analogen Situation im hyperbolischen Raum vergleichen. Dabei versuchen wir herauszustellen, was im komplex-hyperbolischen Fall der Grund für das Scheitern dieser Konstruktion ist, und gehen darauf ein, wie man den Ansatz möglicherweise verbessern kann.

Betrachtet man eine Metrik der Form (3.8) auf $\mathbb{H}^4 \setminus \mathbb{H}^2$, so erhält man in gleicher Vorgehensweise wie zuvor eine Metrik der Gestalt $g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ 0 & \bar{g} \end{pmatrix}$ auf $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$, der Überlagerung des Blow-ups, wobei $\bar{g}$ identisch zu (3.10) ist und

$$(3.28) \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} x_1 + h(x_1) & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Formel entspricht der Spezialisierung von (3.5) in [AS2] auf diesen einfachen Fall. Die nicht-diagonalen Elemente verschwinden im Gegensatz zu (3.9). Dies hat zur Konsequenz, daß B_{123} und B_{124} im hyperbolischen Fall verschwinden. Schlüsselt man die Rechnung, die von (3.19-3.24) zu (3.25) führt, dementsprechend auf, so wird ersichtlich, daß es der zweite Summand von B_{124} in (3.22) ist, der die positive Krümmung im Fall $x_1 = 0$ bewirkt.

Die Idee, dies zu beheben, besteht darin, zu (3.8) einen Term der Gestalt $\alpha(x_1, x_2) (\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_2, \cdot \rangle + \langle \cdot, K_2 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle)$ so hinzuzuaddieren, daß das zugehörige $\bar{g}$ für $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$ die Metrik eines Rechtektorus wird, d.h. daß die nicht-diagonalen Elemente von $\bar{g}$ in diesem Fall verschwinden. Dies gewährleistet z.B. $\alpha(x_1, x_2) = -x_1^{-1}(1+x_2)^{-1}h(x_1)$. Damit gilt:

$$(3.29) \quad g^{\text{mod}} = g_0 + h(x_1)x_1^{-2}\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle - x_1^{-1}(1+x_2)^{-1}h(x_1)(\langle \cdot, K_1 \rangle \langle K_2, \cdot \rangle + \langle \cdot, K_2 \rangle \langle K_1, \cdot \rangle)$$

und

$$(3.30) \quad \bar{g}^{\text{mod}} = \begin{pmatrix} x_1(1+x_1) + (1+x_1)^2h(x_1) - 2x_1(1+x_1)x_2(1+x_2)^{-1}h(x_1) & x_1x_2 - x_1x_2^2(1+x_2)^{-1}h(x_1) \\ x_1x_2 - x_1x_2^2(1+x_2)^{-1}h(x_1) & x_2(1+x_2) - x_2^2h(x_1) \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige B_{124}^{mod} lautet

$$(3.31) \quad B_{124}^{\text{mod}} = -th_2x_1(1+x_2) + th_2x_1x_2(2+x_2)(1+x_2)^{-1}h(x_1).$$

Mit dieser Modifikation verschwindet also dieser Term für $x_1 = 0$, jedoch erweist sich eine allgemeine Schnittkrümmungsabschätzung über die Koordinatenrechnung bzw. die Abschätzung des Krümmungsoperators in der Art von [AS2] als schwierig. Außerdem ist die Verallgemeinerung dieser Modifikation in Dimension ≥ 4 unklar, und das Aufstellen einer Poincare-Reihe in Analogie zu [AS2] unmöglich.

4. KÄHLER-MANNIGFALTIGKEITEN

In diesem Kapitel behandeln wir die Frage, ob durch eine kombinierte Streckung der Standardmetrik des komplex-hyperbolischen Raumes in Gradientenfeld- und Killingfeld-Richtung neue Kähler-Mannigfaltigkeiten gewonnen werden können. Das negative Ergebnis ist in Satz 4.1 festgehalten.

4.1. Allgemeines. Seien M eine Mannigfaltigkeit mit fast-komplexer Struktur J , g_0 und g zwei Hermitesche Strukturen auf M , wobei g_0 zusätzlich eine Kähler-Struktur sei. Wie in Kapitel 2 bezeichne ∇ die kovariante Ableitung bezüglich g_0 und ∇' die bezüglich g . $G^{-1} \cdot B = \Gamma = \nabla' - \nabla$ sei der Differenztensor, die Kählerbedingung für die Metrik g lautet dann $\nabla'J = 0$. Wir übersetzen dies in eine Bedingung an B . Es gilt für beliebige Vektorfelder X und Y auf M :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 0 &= \nabla'_X J \cdot Y \stackrel{g_0 \text{ Kähler}}{=} \nabla'_X J \cdot Y - \nabla_X J \cdot Y \\ &= \nabla'_X (J \cdot Y) - \nabla_X (J \cdot Y) - J \cdot (\nabla'_X J - \nabla_X Y) \\ &= G^{-1} \cdot B(X, J \cdot Y) - J \cdot G^{-1} \cdot B(X, Y). \end{aligned}$$

Da beide Strukturen hermitesch sind, gilt $GJ = JG$, wegen

$$(4.2) \quad \langle GJX, Y \rangle = g(JX, Y) = -g(X, JY) = -\langle GX, JY \rangle = \langle JGX, Y \rangle.$$

Die Kählerbedingung ist deshalb äquivalent zu der Forderung, daß

$$(4.3) \quad B(X, J \cdot Y) = J \cdot B(X, Y)$$

für alle Vektorfelder X und Y auf M ist.

4.2. Hermitesche Streckung der Standardmetrik. Wir betrachten die vereinfachte Situation von $N \mathbb{C}\mathbb{H}^{n-1}$ in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ mit $n \geq 2$, die sich paarweise orthogonal schneiden. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann definieren wir auf $\Omega := \mathbb{C}\mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathbb{C}\mathbb{H}_i^{n-1}$

$$(4.4) \quad g_i^I := h_i(x_i) x_i^{-2} \langle \cdot, J \cdot K_i \rangle \langle J \cdot K_i, \cdot \rangle$$

und außerdem

$$(4.5) \quad g_i^II := g_i^I(J \cdot, J \cdot) = h_i(x_i) x_i^{-2} \langle \cdot, K_i \rangle \langle K_i, \cdot \rangle,$$

wobei wieder mit K_i das Killingfeld zur Rotation um $\mathbb{C}\mathbb{H}_i^{n-1}$ bezeichnet wird und die h_i beliebige Funktionen sind. Um eine Hermitesche Metrik zu erhalten, definieren wir die neue Metrik auf die folgende Weise:

$$(4.6) \quad g := g_0 + \sum_{i=1}^N (g_i^I + g_i^II).$$

Wir bekommen das folgende Ergebnis:

Satz 4.1. *Ist J die komplexe Struktur aus Kapitel 1, g die oben definierte Metrik und $n \geq 2$, so ist (Ω, J, g) genau dann eine Kähler-Mannigfaltigkeit, wenn $g = g_0$ ist, d.h. alle $h_i = 0$, $1 \leq i \leq N$, sind.*

Beweis. Wir definieren B_i^I durch

$$(4.7) \quad 2 \langle B_i^I(X, Y), Z \rangle = \nabla_X g_i^I(Y, Z) + \nabla_Y g_i^I(X, Z) - \nabla_Z g_i^I(X, Y)$$

und B_i^{II} entsprechend. Dann ist das zu g gehörende Tensorfeld B gegeben durch $B = \sum_{i=1}^N B_i$, wobei $B_i := B_i^I + B_i^{II}$. Setzen wir

$$(4.8) \quad \alpha_i(x) := (-\eta^2 h_i'(x) + \eta^2 h_i(x) x^{-1}) x^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{3}{2}},$$

$$(4.9) \quad \beta_i(x) := \eta^2 h_i(x) x^{-\frac{3}{2}} (1+x)^{\frac{3}{2}},$$

$$(4.10) \quad \gamma_i(x) := \eta^2 h_i(x) x^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}},$$

so gilt entsprechend Formel (2.6)

$$(4.11) \quad B_i^I(X, Y) = -\alpha_i(x_i) p_i^v(X, Y) v_i + \beta_i(x_i) p_i^\xi(X, Y) v_i + \gamma_i(x_i) \langle X, Y \rangle v_i.$$

Desweiteren ergibt Formel (2.51)

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \nabla_X g_i^{II}(Y, Z) &= -2\alpha_i(x_i) \langle v_i, X \rangle \langle \xi_i, Y \rangle \langle \xi_i, Z \rangle \\ &\quad - \beta_i(x_i) (\langle \xi_i, X \rangle \langle v_i, Y \rangle \langle \xi_i, Z \rangle + \langle \xi_i, X \rangle \langle v_i, Z \rangle \langle \xi_i, Y \rangle) \\ &\quad - \gamma_i(x_i) (\langle X, J \cdot Y \rangle \langle \xi_i, Z \rangle + \langle X, J \cdot Z \rangle \langle \xi_i, Y \rangle) \end{aligned}$$

und somit

$$(4.13) \quad \begin{aligned} B_i^{II}(X, Y) &= -\alpha_i(x_i) p_i^b(X, Y) \xi_i + (\alpha_i(x_i) - \beta_i(x_i)) p_i^\xi(X, Y) v_i \\ &\quad - \gamma_i(x_i) \langle \xi_i, X \rangle J \cdot Y - \gamma_i(x_i) \langle \xi_i, Y \rangle J \cdot X, \end{aligned}$$

wobei $p_i^b(X, Y) = \langle X, v_i \rangle \langle \xi_i, Y \rangle + \langle X, \xi_i \rangle \langle v_i, Y \rangle$.

Liegt eine Kähler-Mannigfaltigkeit vor, so gilt gemäß Abschnitt 4.1 speziell für ein beliebiges $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}
 0 &= J \cdot B(v_k, v_k) - B(J \cdot v_k, v_k) \\
 &= \sum_{i=1}^N [J \cdot B_i(v_k, v_k) - B_i(J \cdot v_k, v_k)] \\
 (4.14) \quad &= \sum_{i=1}^N \gamma_i(x_i) (\xi_i + \langle \xi_i, \xi_k \rangle \xi_k) \\
 &= \sum_{i=1}^N \gamma_i(x_i) \xi_i + P_k \cdot \sum_{i=1}^N \gamma_i(x_i) \xi_i.
 \end{aligned}$$

Da die ξ_i jedoch linear unabhängig sind, folgt $\gamma(x_i) = 0$ für alle $i \neq k$ und wegen der freien Wahl von k insgesamt $h_i(x_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq N$. $\square$

ANHANG A. DAS $\oslash$ -PRODUKT VON BILINEARFORMEN UND BILINEAREN ABBILDUNGEN

Das $\oslash$ -Produkt zweier Bilinearformen $b_1, b_2 \in L^2 \mathbb{R}^n$, das sogenannte Kulkarni-Nomizu-Produkt, wird allgemein definiert durch

$$\begin{aligned}
 (A.1) \quad b_1 \oslash b_2(X, Y; Z, W) &= \frac{1}{2} (b_1(X, W) b_2(Y, Z) - b_1(Y, W) b_2(X, Z) \\
 &\quad - b_1(X, Z) b_2(Y, W) + b_1(Y, Z) b_2(X, W)), \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Dieses Produkt ist symmetrisch, d.h. es gilt $b_1 \oslash b_2 = b_2 \oslash b_1$, schiefsymmetrisch in beiden Argumentpaaren sowie symmetrisch gegenüber Austausch der Argumentpaare, daher kann man $b_1 \oslash b_2$ als Element von $S^2 \Lambda_2 \mathbb{R}^n$ ansehen vermöge multilinearer Fortsetzung der Gleichung

$$(A.2) \quad b_1 \oslash b_2(X \wedge Y, W \wedge Z) = b_1 \oslash b_2(X, Y; Z, W).$$

Wir übernehmen diese Definition für das Produkt zweier symmetrischer Bilinearformen α_1 und α_2 . Dann erfüllt $\alpha_1 \oslash \alpha_2$ auch die erste Bianchi-Identität, wie sich unmittelbar nachprüfen läßt. Sind insbesondere α_1 und α_2 positiv-definit, so ist auch $\alpha_1 \oslash \alpha_2$ eine positiv-definite Bilinearform auf $\Lambda_2 \mathbb{R}^n \times \Lambda_2 \mathbb{R}^n$. Desweiteren schreiben wir $\alpha_1 \oslash \alpha_2 \leq \alpha_3 \oslash \alpha_4$, falls diese Ungleichung für die zugehörigen quadratischen Formen auf $\Lambda_2 \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Dann gilt $\alpha_1 \oslash \alpha_2 \leq \alpha_1 \oslash \alpha_3$, falls $0 \leq \alpha_1$ und $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ (siehe [AS2]).

Für zwei schiefsymmetrische Bilinearformen β_1 und β_2 erfüllt das gemäß (A.1) definierte Produkt die erste Bianchi-Identität nicht. Bei Krümmungsberechnungen ist es jedoch besser, mit Ausdrücken umzugehen,

die alle Krümmungstensorsymmetrien erfüllen. Wir definieren daher abweichend von (A.1) $\beta_1 \oslash \beta_2$ durch

(A.3)

$$\begin{aligned} \beta_1 \oslash \beta_2(X, Y; Z, W) := & \frac{1}{2} \left(\beta_1(X, W) \beta_2(Y, Z) - \beta_1(Y, W) \beta_2(X, Z) \right. \\ & \left. - \beta_1(X, Z) \beta_2(Y, W) + \beta_1(Y, Z) \beta_2(X, W) \right) \\ & - \beta_1(X, Y) \beta_2(Z, W) - \beta_1(Z, W) \beta_2(X, Y), \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Auch hier stellt das $\oslash$ -Produkt gemäß (A.2) eine symmetrische Bilinearform auf $\Lambda_2 \mathbb{R}^n$ dar. In Anwendungen besteht ein Unterschied zu dem $\oslash$ -Produkt symmetrischer Bilinearformen darin, daß Ungleichungen für die $\beta_1 \oslash \beta_2$ zugeordnete quadratische Form auf $\Lambda_2 \mathbb{R}^n$ in der Regel nicht auf ganz $\Lambda_2 \mathbb{R}^n$ gelten, sondern nur auf der für die Schnittkrümmung relevanten Teilmenge $\{X \wedge Y \mid X, Y \in \mathbb{R}^n\}$. So läßt sich unmittelbar überprüfen, daß

$$(A.4) \quad \beta_1 \oslash \beta_2(X \wedge Y, X \wedge Y) = \beta_1 \oslash \beta_2(X, Y; Y, X) = 3 \beta_1(X, Y) \beta_2(X, Y)$$

und damit

$$(A.5) \quad \beta \oslash \beta(X \wedge Y, X \wedge Y) = 3 \beta(X, Y)^2 \geq 0.$$

Doch ist z.B. $e_1, J \cdot e_1, e_2, J \cdot e_2$ eine ON-Basis von $T_p \mathbb{C}\mathbb{H}^2$, dann ergibt direkte Auswertung

$$(A.6) \quad \omega_0 \oslash \omega_0(e_1 \wedge J \cdot e_2 - e_2 \wedge J \cdot e_1, e_1 \wedge J \cdot e_2 - e_2 \wedge J \cdot e_1) = -2.$$

Da es öfter vorkommt, daß wir auf $\{X \wedge Y \mid X, Y \in \mathbb{R}^n\}$ $\oslash$ -Produkte miteinander vergleichen müssen, führen wir dafür eine eigene Notation ein und schreiben

(A.7)

$$b_1 \oslash b_2 \preceq b'_1 \oslash b'_2 \quad \text{falls} \quad b_1 \oslash b_2(X \wedge Y, X \wedge Y) \leq b'_1 \oslash b'_2(X \wedge Y, X \wedge Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir zeigen jetzt die in Kapitel 1 zitierte Ungleichung

$$(A.8) \quad 0 \preceq \omega_0 \oslash \omega_0 \preceq 3 g_0 \oslash g_0.$$

Dazu gehen wir von einer ON-Basis von $T_p \mathbb{C}\mathbb{H}^n$ der Form $e_{2k} = J \cdot e_{2k-1}$ aus und schreiben $X = \sum_{l=1}^{2n} X^l e_l$ und $Y = \sum_{l=1}^{2n} Y^l e_l$. Zusammenfassung geeigneter Terme liefert dann

(A.9)

$$\begin{aligned} & 3 g_0 \oslash g_0(X, Y; Y, X) - \omega_0 \oslash \omega_0(X, Y; Y, X) \\ &= 3 g_0(X, X) g_0(Y, Y) - 3 g_0(X, Y)^2 - 3 \omega_0(X, Y)^2 \\ &= \frac{3}{2} \sum_{i,k=1}^n \left[(X^{2i-1} Y^{2k} - X^{2k-1} Y^{2i} + X^{2i} Y^{2k-1} - X^{2k} Y^{2i-1})^2 \right. \\ & \quad \left. + (X^{2i-1} Y^{2k-1} - X^{2k-1} Y^{2i-1} + X^{2k} Y^{2i} - X^{2i} Y^{2k})^2 \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

und damit das Behauptete.

Im folgenden wenden wir uns dem $\odot$ -Produkt von symmetrischen bilinearen Abbildungen $B_1, B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich einer symmetrischen Bilinearform $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu und definieren $B_1 \odot_l B_2$ gemäß Definition 5.13 aus [AS2] durch

$$(A.10) \quad B_1 \odot_l B_2(X, Y; Z, W) := \frac{1}{2} \left[l(B_1(X, W), B_2(Y, Z)) - l(B_1(Y, W), B_2(X, Z)) \right. \\ \left. - l(B_1(X, Z), B_2(Y, W)) + l(B_1(Y, Z), B_2(X, W)) \right].$$

Wir schreiben $B_1 \odot_L B_2$ statt $B_1 \odot_{\langle \cdot, \cdot \rangle, L} B_2$ für einen symmetrischen Endomorphismus $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn klar ist, welches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gemeint ist. Unmittelbar aus der Definition ist dann ersichtlich, daß

$$(A.11) \quad B_1 \odot_L B_2 = B_1 \odot_1 L B_2 = L B_1 \odot_1 B_2.$$

Wie bei den zuvor definierten Produkten stellt auch dieses $\odot$ -Produkt gemäß (A.2) eine symmetrische Bilinearform auf $\Lambda_2 \mathbb{R}^n$ dar, und wir verwenden die in (A.7) eingeführte Relation $\preceq$ analog.

Für Abschätzungen solcher Produkte eignet sich dann folgendes Lemma:

Lemma A.1. *Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und bezeichnet $\| \cdot \|$ die Operatornorm bezüglich dieses Skalarprodukts, so gilt für zwei symmetrische bilineare Abbildungen B_1, B_2*

$$(A.12) \quad -2 \|B_1\| \|B_2\| \|L\| \langle \cdot, \cdot \rangle \odot \langle \cdot, \cdot \rangle \preceq B_1 \odot_L B_2 \preceq 2 \|B_1\| \|B_2\| \|L\| \langle \cdot, \cdot \rangle \odot \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Beweis. Die Definitionsgleichung (A.10) ergibt direkt

$$(A.13) \quad |B_1 \odot_L B_2(X \wedge Y, X \wedge Y)| \leq 2 \|B_1\| \|B_2\| \|L\| \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle.$$

Wegen $X \wedge Y = X \wedge (Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle} X)$ und $|X|^2 |Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle} X|^2 = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$ folgt

$$(A.14) \quad |B_1 \odot_L B_2(X \wedge Y, X \wedge Y)| \leq 2 \|B_1\| \|B_2\| \|L\| (\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2)$$

und damit die Behauptung. $\square$

ANHANG B. SPIEGELUNG IN EINEM LOKAL-SYMMETRISCHEN RAUM

Sei V eine total-geodätische Untermannigfaltigkeit der Codimension 1 in einer lokal-symmetrischen Mannigfaltigkeit (M^n, g) , $p \in V$, $e_1, \dots, e_n$ eine ON-Basis von $T_p M$ mit $\text{span}\{e_2, \dots, e_n\} = T_p V$ und $S : T_p M \rightarrow T_p M$, $X \mapsto X - 2 \langle X, e_1 \rangle e_1$ die Spiegelung in $T_p M$ an $T_p V$. Als Abkürzung schreiben wir $\bar{X}$ für $S \cdot X$. Wir werden zeigen, daß S eine Isometrie von $(T_p M, \exp_p^* g)$ ist, d.h.

$$(B.1) \quad \exp_p^* g|_X(Y, Z) = \exp_p^* g|_{\bar{X}}(\bar{Y}, \bar{Z}) \text{ für alle } X \in T_p M, Y, Z \in T_X(T_p M).$$

Dazu genügt es natürlich, den Fall $Y = Z$ zu betrachten. Der Beweis verläuft analog zum Beweis der Aussage „ $\nabla R = 0 \Rightarrow -\text{id}$ ist eine Isometrie von $(T_p M, \exp_p^* g)$ “, jedoch muß zusätzlich die Codazzi-Gleichung bemüht werden.

Sind $X \in T_p M$, $Y \in T_X(T_p M)$ gegeben, so seien $c_X, c_{\bar{X}} : \mathbb{R} \rightarrow M$ Geodätische mit $c_X(0) = c_{\bar{X}}(0) = p$, $\dot{c}_X(0) = X$ und $\dot{c}_{\bar{X}}(0) = \bar{X}$. J_X sei das Jacobifeld längs c_X mit $J_X(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt} J_X(0) = Y$, $J_{\bar{X}}$ das Jacobifeld längs $c_{\bar{X}}$ mit $J_{\bar{X}}(0) = 0$ und $\frac{\nabla}{dt} J_{\bar{X}}(0) = \bar{Y}$. Wir drücken diese Felder in ihren Komponenten bezüglich der parallelen Fortsetzungen $(e_\mu^X(t))_{\mu=1}^n$ längs c_X und $(e_\mu^{\bar{X}}(t))_{\mu=1}^n$ längs $c_{\bar{X}}$ unserer ursprünglichen ON-Basis aus. Dann lauten die Anfangswerte der Jacobifelder $J_X^\mu(0) = J_{\bar{X}}^\mu(0) = 0$, $\frac{d}{dt} J_X^\mu(0) = Y^\mu$ für $\mu = 1, \dots, n$ sowie $\frac{d}{dt} J_{\bar{X}}^\mu(0) = Y^\mu$ für $\mu = 2, \dots, n$ und $\frac{d}{dt} J_{\bar{X}}^1(0) = -Y^1$, und es gilt:

$$(B.2) \quad \exp_p^* g|_X(Y, Y) = g|_{c_X(1)}(J_X(1), J_X(1)) = \sum_{\mu=1}^n J_X^\mu(1)^2,$$

$$(B.3) \quad \exp_p^* g|_{\bar{X}}(\bar{Y}, \bar{Y}) = g|_{c_{\bar{X}}(1)}(J_{\bar{X}}(1), J_{\bar{X}}(1)) = \sum_{\mu=1}^n J_{\bar{X}}^\mu(1)^2.$$

Im folgenden sehen wir uns die Jacobifeld-Gleichung in den eingeführten ON-Basen an und folgern mittels Picard-Lindelöf $J_X^\mu = J_{\bar{X}}^\mu$ für $\mu > 1$ und $J_X^1 = -J_{\bar{X}}^1$. Damit ist dann die ursprüngliche Aussage (B.1) bewiesen. Als Abkürzung bezeichnen wir $g|_p(\cdot, \cdot)$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Zunächst nutzen wir dazu die lokale Symmetrie aus und definieren

$$(B.4) \quad (R_X)_\mu^\nu := \langle R(e_\mu, X)X, e_\nu \rangle = g|_{c_X(t)}(R(e_\mu^X(t), \dot{c}_X(t))\dot{c}_X(t), e_\nu^X(t)),$$

$$(B.5) \quad (R_{\bar{X}})_\mu^\nu := \langle R(e_\mu, \bar{X})\bar{X}, e_\nu \rangle = g|_{c_{\bar{X}}(t)}(R(e_\mu^{\bar{X}}(t), \dot{c}_{\bar{X}}(t))\dot{c}_{\bar{X}}(t), e_\nu^{\bar{X}}(t)).$$

Es gilt dann:

$$(B.6) \quad \begin{aligned} (R_{\bar{X}})_\mu^\nu &= \langle R(e_\mu, X)X, e_\nu \rangle - 2 \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_\mu, e_1)X, e_\nu \rangle \\ &\quad - 2 \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_\mu, X)e_1, e_\nu \rangle + 4 \langle X, e_1 \rangle^2 \langle R(e_\mu, e_1)e_1, e_\nu \rangle \\ &= \begin{cases} \langle R(e_1, X)X, e_1 \rangle & , \text{ falls } \mu = \nu = 1, \\ \langle R(e_1, X)X, e_\nu \rangle - 2 \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_1, X)e_1, e_\nu \rangle & , \text{ falls } \mu = 1, \nu \neq 1, \\ \langle R(e_\mu, X)X, e_1 \rangle - 2 \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_\mu, e_1)X, e_1 \rangle & , \text{ falls } \mu \neq 1, \nu = 1, \\ \langle R(e_\mu, X)X, e_\nu \rangle - 2 \sum_{\lambda=2}^n \langle X, e_1 \rangle \langle X, e_\lambda \rangle \langle R(e_\mu, e_1)e_\lambda, e_\nu \rangle \\ \quad - 2 \sum_{\lambda=2}^n \langle X, e_1 \rangle \langle X, e_\lambda \rangle \langle R(e_\mu, e_\lambda)e_1, e_\nu \rangle & , \text{ falls } \mu \neq 1, \nu \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

An dieser Stelle benötigen wir, daß V total-geodätisch ist, denn aus diesem Grund ist die Weingartenabbildung $A_{e_1} = 0$. Die Codazzi-Gleichung für eine per Inklusion eingebettete Untermannigfaltigkeit lautet in ihrer Standardform

$$(B.7) \quad g(R(X, Y)Z, \xi) = g((\nabla_X A)_\xi \cdot Y - (\nabla_Y A)_\xi \cdot X, Z).$$

Dabei sind X, Y, Z drei tangentielle und ξ ein normales Vektorfeld. Setzen wir speziell $\xi = e_1$, so ist in diesem Fall $(\nabla_X A)_{e_1} \cdot Y = \nabla_X(A_{e_1} \cdot Y) = 0$, und wir erhalten

$$(B.8) \quad g(R(X, Y)Z, e_1) = 0$$

für drei tangentielle Vektorfelder X, Y und Z . Insbesondere verschwinden für $\mu \neq 1$, $\nu \neq 1$ die beiden Summen in (B.6), und es gilt:

$$(B.9)$$

$$\begin{aligned} \langle R(e_1, X)X, e_\nu \rangle &= \sum_{\sigma, \tau=2}^n \langle X, e_\sigma \rangle \langle X, e_\tau \rangle \langle R(e_1, e_\sigma)e_\tau, e_\nu \rangle + \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_1, X)e_1, e_\nu \rangle \\ &= \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_1, X)e_1, e_\nu \rangle, \\ \langle R(e_\mu, X)X, e_1 \rangle &= \sum_{\sigma, \tau=2}^n \langle X, e_\sigma \rangle \langle X, e_\tau \rangle \langle R(e_\mu, e_\sigma)e_\tau, e_1 \rangle + \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_\mu, e_1)X, e_1 \rangle \\ &= \langle X, e_1 \rangle \langle R(e_\mu, e_1)X, e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit:

$$(B.10) \quad (R_{\bar{X}})^\nu_\mu = \begin{cases} (R_X)^\nu_\mu & , \text{ falls } \mu = \nu = 1 \text{ oder } \mu \neq 1, \nu \neq 1, \\ -(R_X)^\nu_1 & , \text{ falls } \mu = 1, \nu \neq 1, \\ -(R_X)^1_\mu & , \text{ falls } \mu \neq 1, \nu = 1. \end{cases}$$

Wir schreiben jetzt die Jacobifeld-Gleichungen für J_X und $J_{\bar{X}}$ in Koordinaten aus. Für $\mu > 1$ lauten diese:

$$(B.11) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} J_X^\nu \right)(t) = - \sum_{\mu=1}^n (R_X)^\nu_\mu J_X^\mu(t),$$

$$\begin{aligned} (B.12) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} J_{\bar{X}}^\nu \right)(t) &= - \sum_{\mu=1}^n (R_{\bar{X}})^\nu_\mu J_{\bar{X}}^\mu(t) \\ &= - \sum_{\mu=2}^n (R_X)^\nu_\mu J_{\bar{X}}^\mu(t) - (R_X)^\nu_1 (-J_{\bar{X}}^1)(t). \end{aligned}$$

Für $\mu = 1$ gilt:

$$(B.13) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} J_X^1 \right)(t) = - \sum_{\mu=1}^n (R_X)^1_\mu J_X^\mu(t),$$

$$\begin{aligned} (B.14) \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} (-J_{\bar{X}}^1) \right)(t) &= \sum_{\mu=1}^n (R_{\bar{X}})^1_\mu J_{\bar{X}}^\mu(t) \\ &= - \sum_{\mu=2}^n (R_X)^1_\mu J_{\bar{X}}^\mu(t) - (R_X)^1_1 (-J_{\bar{X}}^1)(t). \end{aligned}$$

Nun ist unmittelbar ersichtlich, daß $J_X^1, \dots, J_X^n$ und $-J_{\bar{X}}^1, J_{\bar{X}}^2, \dots, J_{\bar{X}}^n$ dasselbe Differentialgleichungssystem zu denselben Anfangswerten lösen. Der Eindeigkeitssteil des Satzes von Picard-Lindelöf liefert daher $J_X^\mu = J_{\bar{X}}^\mu$ für $\mu > 1$ und $J_X^1 = -J_{\bar{X}}^1$. Damit ist die Behauptung bewiesen und S eine Isometrie von $(T_p M, \exp_p^* g)$.

ANHANG C. EXPLIZITE INVERSION VON $\mathbf{1} + G_I$.

Gegeben seien zwei positiv-definite Bilinearformen $g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ und $g = \langle \cdot, G \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$, wobei G den zu g gehörenden positiv-definiten Endomorphismus bezeichnet. Mit $v_1, \dots, v_n$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^n$ gegeben; $w_1, \dots, w_n$ sei die Dualbasis bzgl. $\langle \cdot, G \cdot \rangle$ (d.h. $g(v_\mu, w_\nu) = \delta_{\mu\nu}$), $u_1 := G \cdot w_1, \dots, u_n := G \cdot w_n$ bezeichne die Dualbasis von $v_1, \dots, v_n$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zur Berechnung von $G^{-1} \cdot v_i$ benutzen wir eine bekannte Tatsache über Gram-Matrizen:

$$(C.1) \quad (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j} = (\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j}^{-1} = (\langle G \cdot w_i, G \cdot w_j \rangle)_{i,j}^{-1} \quad \text{und}$$

$$(C.2) \quad (g(v_i, v_j))_{i,j}^{-1} = (\langle v_i, G \cdot v_j \rangle)_{i,j}^{-1} = (g(w_i, w_j))_{i,j} = (\langle u_i, G^{-1} \cdot u_j \rangle)_{i,j}.$$

Damit ergibt sich:

$$(C.3) \quad \begin{aligned} G^{-1} \cdot v_i &= \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \sum_{k=1}^n \langle u_j, u_k \rangle G^{-1} \cdot v_k = \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle G^{-1} \cdot u_j \\ &= \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \sum_{k=1}^n \langle G^{-1} \cdot u_j, u_k \rangle v_k = \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \sum_{k=1}^n (\langle v_j, G \cdot v_k \rangle)_{j,k}^{-1} v_k. \end{aligned}$$

Das eigentliche Problem besteht also darin, die Matrix $(\langle v_j, G \cdot v_k \rangle)_{j,k}$ explizit zu invertieren.

Im folgenden werden wir das zu $g_I = \sum_{i \in I} g_i = \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} (1 + x_i) p_i^v$ gehörende Feld positiv-semidefiniter Endomorphismen $G_I = \sum_{i \in I} G_i = \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} (1 + x_i) P_i^v$ auf Ω näher betrachten sowie das Feld positiv-definiter Endomorphismen $\mathbf{1} + G_I$. Wegen $P_i^v = \langle \cdot, v_i \rangle v_i$ ist unmittelbar klar, daß

$$(C.4) \quad \begin{aligned} G_i \cdot v_k &= \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} (1 + x_i) \langle v_i, v_k \rangle v_i \\ &= \eta^2 h(x_i) x_i^{-\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}} v_i + \delta_{ik} \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} v_i, \end{aligned}$$

$$(C.5) \quad G_I \cdot v_k = \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i) x_i^{-\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}} v_i + \eta^2 h(x_k) x_k^{-1} v_k,$$

$$G_I \cdot w = 0, \quad \text{für } w \in (\text{span}\{v_i \mid i \in I\})^\perp.$$

Daraus folgt $(\mathbf{1} + G_I) \cdot \text{span}\{v_i \mid i \in I\} \subset \text{span}\{v_i \mid i \in I\}$ und somit wegen der Invertierbarkeit, daß $\mathbf{1} + G_I$ ein Automorphismus auf $\text{span}\{v_i \mid i \in I\}$ und die Identität auf $(\text{span}\{v_i \mid i \in I\})^\perp$ ist.

Lemma C.1. *Mit den Bezeichnungen von Kapitel 2 und $\sigma := \sum_{i \in I} x_i \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)}$ gilt auf Ω*

(C.6)

$$\langle \xi_j, (\mathbb{1} + G_I)^{-1} \cdot v_k \rangle = 0,$$

(C.7)

$$\langle \xi_j, (\mathbb{1} + G_I)^{-1} \cdot \xi_k \rangle = \langle \xi_j, \xi_k \rangle,$$

(C.8)

$$\begin{aligned} \langle v_j, (\mathbb{1} + G_I)^{-1} \cdot v_k \rangle &= \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} (1 + x_j)^{-1} \delta_{jk} \\ &+ \frac{1}{1 + \sigma} \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \frac{x_k}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_j^{\frac{1}{2}} (1 + x_j)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Diese drei Terme benötigen wir, um in Abschnitt 2.5 $B_j \otimes (\mathbb{1} + G_I)^{-1} B_k$ auswerten zu können. Während die ersten zwei Terme unmittelbar wegen (C.5) verschwinden, müssen wir zur Auswertung des dritten die zu Beginn gemachte Überlegung eingeschränkt auf $\text{span}\{v_i \mid i \in I\}$ heranziehen, d.h. das Inverse der Matrix $(\langle v_j, (\mathbb{1} + G_I) \cdot v_k \rangle)_{j,k \in I}$ berechnen¹⁵. Im folgenden werden wir daher diesen Ausdruck in einer für diesen Zweck geeigneten Weise umformen.

(C.9)

$$\begin{aligned} \langle v_j, (\mathbb{1} + G_I) \cdot v_k \rangle &= (1 + \eta^2 h(x_k) x_k^{-1}) \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i) x_i^{-\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}} \langle v_j, v_i \rangle \\ &= \delta_{jk} (1 + x_j)^{-1} (1 + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1}) \\ &+ \eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{1}{2}} (1 + x_j)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}} \\ &+ \eta^2 h(x_k) x_j^{\frac{1}{2}} (1 + x_j)^{-\frac{1}{2}} x_k^{-\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}} \\ &+ \left(1 + \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i)\right) x_j^{\frac{1}{2}} (1 + x_j)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1 + x_k)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} (C.10) \quad D &:= \left(\delta_{jk} (1 + x_j)^{-1} (1 + \eta^2 h(x_j) x_j^{-1}) \right)_{j,k \in I}, \quad \alpha := 1 + \sum_{i \in I} \eta^2 h(x_i), \\ T_1 &:= \left(x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}} \right)_{i \in I}, \quad T_2 := \left(\eta^2 h(x_i) x_i^{-\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}} \right)_{i \in I} \end{aligned}$$

läßt sich die Matrix schreiben als $D + T_1 T_2^t + T_2 T_1^t + \alpha T_1 T_1^t$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und T_1, T_2 Spaltenvektoren sind. Damit ist das folgende Lemma anwendbar:

Lemma C.2. *Sei D eine invertierbare $n \times n$ -Diagonalmatrix, $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren und $\alpha \in \mathbb{R}$. Ferner sei $\sigma_{ij} := T_i^t D^{-1} T_j$, $i, j \in \{1, 2\}$.*

¹⁵Von nun an sei eine beliebige Abzählung von I festgehalten, so daß es sinnvoll ist, Matrizen und Vektoren mit Elementen aus I zu indizieren.

Gilt dann $(1+\sigma_{12})^2 - \sigma_{11}(\sigma_{22}-\alpha) \neq 0$, so ist $D + T_1 T_2^t + T_2 T_1^t + \alpha T_1 T_1^t$ invertierbar, und das Inverse ist gegeben durch

$$(C.11) \quad \begin{aligned} & \left(D + T_1 T_2^t + T_2 T_1^t + \alpha T_1 T_1^t \right)^{-1} \\ = & D^{-1} - D^{-1} \frac{1}{(1+\sigma_{12})^2 - \sigma_{11}(\sigma_{22}-\alpha)} \left[(1+\sigma_{12})(T_1 T_2^t + T_2 T_1^t) - \sigma_{11} T_2 T_2^t - (\sigma_{22}-\alpha) T_1 T_1^t \right] D^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Nachrechnen. $\square$

Bemerkung . Die Formel wurde gewonnen unter Rückgriff auf ein in [AS1] angegebenes Ergebnis: Dort wurde mit Hilfe einer geometrischen Reihe eine explizite Formel für $(D + TT^t)^{-1}$ gewonnen. Auf gleiche Art und Weise läßt sich erhalten, daß

$$(C.12) \quad (D + T_1 T_2^t)^{-1} = D^{-1} + \frac{1}{1 + \sigma_{12}} D^{-1} T_1 T_2^t D^{-1}.$$

Hat man nun eine Matrix der Form $D + T_1 T_2^t + T_3 T_4^t$ explizit zu invertieren, so stellt man zunächst fest, daß $T_3 T_4^t (D + T_1 T_2^t)^{-1}$ von der Gestalt $T_3 T_5^t D^{-1}$ ist, wobei T_5 wiederum ein Spaltenvektor ist. Damit läßt sich aber ausnutzen, daß

$$(C.13) \quad (D + T_1 T_2^t + T_3 T_4^t)^{-1} = (D + T_1 T_2^t)^{-1} D (D + T_3 T_5^t)^{-1}.$$

An dieser Stelle läßt sich (C.12) zweimal anwenden, wodurch sich Formel (C.11) ergibt. Es lassen sich im übrigen durch sukzessive Anwendung von (C.12) nicht nur unsere Matrix, sondern sämtliche Matrizen der Gestalt $D + T_1 T_2^t + \dots + T_{2k-1} T_{2k}^t$, $k \in \mathbb{N}$, invertieren.

Wir berechnen die nötigen Daten, um Lemma C.2 anzuwenden:

$$(C.14) \quad \begin{aligned} D^{-1} &= \left(\delta_{jk} (1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \right)_{j,k \in I}, \\ \sigma_{12} &= T_1^t D^{-1} T_2 = \sum_{i \in I} x_i \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)}, \\ \sigma_{11} &= T_1^t D^{-1} T_1 = \sum_{i \in I} x_i \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} = \sum_{i \in I} x_i - \sigma_{12} = 1 + \sum_{i \in I} x_i - (1 + \sigma_{12}), \\ \sigma_{22} &= T_1^t D^{-1} T_2 = \sum_{i \in I} \frac{\eta^4 h(x_i)^2}{x_i + \eta^2 h(x_i)}, \\ \sigma_{22} - \alpha &= -1 - \sum_{i \in I} x_i \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} = -(1 + \sigma_{12}), \\ (1 + \sigma_{12})^2 - (\sigma_{22} - \alpha) \sigma_{11} &= (1 + \sigma_{12}) \left(1 + \sum_{i \in I} x_i \right) > 0. \end{aligned}$$

(C.15)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+\sigma_{12})^2 - \sigma_{11}(\sigma_{22}-\alpha)} \left[(1+\sigma_{12})(T_1 T_2^t + T_2 T_1^t) - \sigma_{11} T_2 T_2^t - (\sigma_{22}-\alpha) T_1 T_1^t \right] \\
&= \frac{1}{1+\sum_{i \in I} x_i} (T_1 + T_2) (T_1 + T_2)^t - \frac{1}{1+\sigma_{12}} T_2 T_2^t \\
&= \frac{1}{1+\sum_{i \in I} x_i} \left(x_j^{-\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{2}} (x_j + \eta^2 h(x_j)) x_k^{-\frac{1}{2}} (1+x_k)^{-\frac{1}{2}} (x_k + \eta^2 h(x_k)) \right)_{j,k} \\
&\quad - \frac{1}{1+\sigma_{12}} \left(\eta^2 h(x_j) x_j^{-\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{2}} \eta^2 h(x_k) x_k^{-\frac{1}{2}} (1+x_k)^{-\frac{1}{2}} \right)_{j,k}.
\end{aligned}$$

(C.16)

$$\begin{aligned}
& D^{-1} \frac{1}{(1+\sigma_{12})^2 - \sigma_{11}(\sigma_{22}-\alpha)} \left[(1+\sigma_{12})(T_1 T_2^t + T_2 T_1^t) - \sigma_{11} T_2 T_2^t - (\sigma_{22}-\alpha) T_1 T_1^t \right] D^{-1} \\
&= \frac{1}{1+\sum_{i \in I} x_i} \left(x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} \right)_{j,k} \\
&\quad - \frac{1}{1+\sigma_{12}} \left(\frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} \right)_{j,k}.
\end{aligned}$$

(C.17)

$$\begin{aligned}
\left(\langle v_j, (\mathbb{I} + G_I) \cdot v_k \rangle \right)_{j,k}^{-1} &= \left(\delta_{jk} (1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \right)_{j,k} \\
&\quad - \frac{1}{1+\sum_{i \in I} x_i} \left(x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} \right)_{j,k} \\
&\quad + \frac{1}{1+\sigma_{12}} \left(\frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} \right)_{j,k}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis verwenden wir nun zusammen mit (C.3).

(C.18)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1} + G_I)^{-1} \cdot v_i &= \sum_{j \in I} \left[\left(x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{2}} + \delta_{ij} (1+x_j)^{-1} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left((1+x_j) \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} v_j - \frac{1}{1 + \sum_{l \in I} x_l} x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k \in I} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{1 + \sigma_{12}} \frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k \in I} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \right) \right] \\
&= \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} v_i - x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k \in I} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \\
&\quad + \frac{1}{1 + \sigma_{12}} \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k \in I} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \\
&\quad + \frac{1}{1 + \sigma_{12}} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{j \in I} x_j \frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \cdot \sum_{k \in I} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \\
&\quad + x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k \in I} \frac{x_k}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \\
&= \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} v_i \\
&\quad + x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 + \sigma_{12}} \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} + \frac{\sigma_{12}}{1 + \sigma_{12}} - 1 \right) \cdot \sum_{k \in I} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \\
&= \frac{x_i}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \left(v_i - \frac{1}{1 + \sigma_{12}} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k \in I} \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}} v_k \right),
\end{aligned}$$

(C.19)

$$\begin{aligned}
\langle v_j, (\mathbf{1} + G_I)^{-1} \cdot v_k \rangle &= \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} (1+x_j)^{-1} \delta_{jk} \\
&\quad + \frac{1}{1 + \sigma_{12}} \frac{x_j}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \frac{x_k}{x_k + \eta^2 h(x_k)} x_j^{\frac{1}{2}} (1+x_j)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $\sigma = \sigma_{12}$, so ist Lemma C.1 bewiesen. $\square$

Als weitere Anwendung von Lemma C.2 erhalten wir die folgende Aussage für m $\mathbb{CH}^{n-1}$ in $\mathbb{CH}^n$, die sich paarweise orthogonal schneiden und alle denselben Punkt enthalten:

Lemma C.3. *Sei $h : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ eine C^∞ -Funktion mit $h(0) = 1$, und sei $\eta^2 < \frac{1}{m}$. Dann ist*

$$\tilde{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle - \sum_{i=1}^m \frac{\eta^2 h(x_i) (1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i^\xi$$

ein Feld positiv-definiten Bilinearformen auf $\mathbb{CH}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathbb{CH}_i^{n-1}$.

Beweis. Es genügt, zu zeigen, daß $\tilde{g} > 0$ auf $\text{span}\{\xi_i \mid 1 \leq i \leq m\}$. Dazu definieren wir

$$(C.20) \quad \tilde{g}_t = \langle \cdot, \cdot \rangle - t \sum_{i=1}^m \frac{\eta^2 h(x_i)(1+x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} p_i^\xi$$

und zeigen, daß $\tilde{g}_t$ nicht ausgeartet ist für alle $t \in [0, 1]$. Da $\tilde{g}_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ positivdefinit ist und die Eigenwerte von $\tilde{g}_t$ stetig von t abhängen, ist auch $\tilde{g} = \tilde{g}_1$ positivdefinit.

Sei also $t \in [0, 1]$ beliebig und $X = \sum_{i=1}^m X^i \xi_i$. Es ist

$$(C.21) \quad \begin{aligned} \tilde{g}_t(X, X) &= \sum_{i=1}^m (X^i)^2 (1+x_i)^{-1} \left(1 - t \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \right) \\ &\quad - t \sum_{j,k=1}^m X^j X^k \frac{\eta^2 h(x_j)}{x_j + \eta^2 h(x_j)} \frac{x_j^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}}}{(1+x_j)^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - t \sum_{j,k=1}^m X^j X^k \frac{\eta^2 h(x_k)}{x_j + \eta^2 h(x_k)} \frac{x_j^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}}}{(1+x_j)^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^m X^j X^k \frac{x_j^{\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}}}{(1+x_j)^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - t \sum_{i=1}^m \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^m X^j A_{jk} X^k, \end{aligned}$$

wobei $A = D + T_1 T_2^t + T_3 T_4^t$ mit

$$(C.22) \quad \begin{aligned} D &= \left(\delta_{jk} (1+x_j)^{-1} \left(1 - t \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \right) \right)_{j,k=1}^m, \quad \alpha = 1 - t \sum_{i=1}^m \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)}, \\ T_1 &= \left(x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \right)_{i=1}^m, \quad T_2 = \left(-t \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} \right)_{i=1}^m. \end{aligned}$$

Da $x_i > 0$ gilt für alle $1 \leq i \leq m$, ist D eine invertierbare Diagonalmatrix. T_1 und T_2 sind Spaltenvektoren. Weiterhin gilt

$$(C.23) \quad \begin{aligned} D^{-1} &= \left(\delta_{jk} (1+x_j) \frac{x_j + \eta^2 h(x_j)}{x_j + (1-t) \eta^2 h(x_j)} \right)_{j,k=1}^m, \\ \sigma_{11} &= T_1^t D^{-1} T_1 = \sum_{i=1}^m x_i \frac{x_i + \eta^2 h(x_i)}{x_i + (1-t) \eta^2 h(x_i)}, \\ \sigma_{12} &= T_1^t D^{-1} T_2 = -t \sum_{i=1}^m x_i \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + (1-t) \eta^2 h(x_i)}, \\ \sigma_{22} &= T_2^t D^{-1} T_2 = t^2 \sum_{i=1}^m x_i \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + (1-t) \eta^2 h(x_i)}, \\ \alpha - \sigma_{22} &= 1 - t \sum_{i=1}^m \frac{\eta^2 h(x_i)}{x_i + \eta^2 h(x_i)} \left(1 + \frac{t \eta^2 h(x_i)}{x_i + (1-t) \eta^2 h(x_i)} \right) = 1 + \sigma_{12}. \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$(C.24) \quad (1 + \sigma_{12})^2 - \sigma_{11}(\sigma_{22} - \alpha) = (1 + \sigma_{12})(1 + \sigma_{12} + \sigma_{11}).$$

Da $\sigma_{11} \geq 0$ und

$$(C.25) \quad 1 + \sigma_{12} \geq 1 - \sum_{i=1}^m \eta^2 h(x_i) > 0$$

sind, ist $(1 + \sigma_{12})^2 - \sigma_{11}(\sigma_{22} - \alpha) > 0$. Lemma C.2 liefert nun die Invertierbarkeit der Matrix A . Somit ist $\tilde{g}_t$ nicht ausgeartet und $\tilde{g}$ positiv-definit. $\square$

ANHANG D. SYMMETRIEFORDERUNG UND FOLGERUNGEN

Um in Abschnitt 2.6 zwei Terme abschätzen zu können, bedarf es einer über Axiom 2.1 hinausgehenden Bedingung an $\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$. Wir übertragen diese und – soweit möglich – die entsprechenden Folgerungen direkt aus [AS2] vom hyperbolischen auf den komplex-hyperbolischen Fall.

Axiom D.1. Zu jedem $j \in J$ gibt es eine nichttriviale Rotation $\rho_j = \vartheta_j(2\pi/m_j) \in \text{Iso}(\mathbb{CH}^n)$ mit $\rho_j|_{\mathbb{CH}_j^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{CH}_j^{n-1}}$ und $\rho_j(\bigcup_{l \in J} \mathbb{CH}_l^{n-1}) = \bigcup_{l \in J} \mathbb{CH}_l^{n-1}$.

Am Ende von Kapitel 1 sind wir darauf eingegangen, wie das Differential $d\rho_j$ einer solchen Rotation auf $T_p \mathbb{CH}^n$ operiert, nämlich als Rotation der Ordnung $m_j = \text{ord } \rho_j$ auf im $P_{j|p}$ und als Identität auf $\ker P_{j|p}$. Dies benötigen wir für das folgende Lemma.

Lemma D.1. Sei $I \subset J$ mit $U_I \neq \emptyset$. Unter den Bedingungen von Axiom 2.1 und Axiom D.1 gilt für ein beliebiges $i \in I$ auf $U_I \cap \mathbb{CH}_i^{n-1}$

$$(D.1) \quad (\mathbf{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i = 0,$$

$$(D.2) \quad P_i B_{J \setminus I}((\mathbf{1} - P_i) \cdot, (\mathbf{1} - P_i) \cdot) = 0.$$

Beweis. Sei $i \in I$. Nach Axiom D.1 gilt $\rho_i(\bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}) = \bigcup_{j \in J} \mathbb{CH}_j^{n-1}$. In Kapitel 1 haben wir gezeigt, daß $\rho_i(\mathbb{CH}_k^{n-1}) = \mathbb{CH}_k^{n-1}$ für alle $k \in I$. Daher ist $\rho_i(\bigcup_{j \in J \setminus I} \mathbb{CH}_j^{n-1}) = \bigcup_{j \in J \setminus I} \mathbb{CH}_j^{n-1}$ und somit $\rho_i^*(g_{J \setminus I}) = g_{J \setminus I}$, was wegen

$$(D.3) \quad \begin{aligned} \langle G_{J \setminus I} d\rho_i \cdot, d\rho_i \cdot \rangle &= g_{J \setminus I}(d\rho_i \cdot, d\rho_i \cdot) = g_{J \setminus I} \\ &= \langle G_{J \setminus I} \cdot, \cdot \rangle = \langle d\rho_i G_{J \setminus I} \cdot, d\rho_i \cdot \rangle \end{aligned}$$

äquivalent ist zu

$$(D.4) \quad d\rho_i G_{J \setminus I} = G_{J \setminus I} d\rho_i.$$

Da $d\rho_i$ eine echte Drehung auf im P_i ist, ist $(\mathbf{1} - d\rho_i)P_i$ ein Automorphismus von im P_i , und es folgt wegen

$$(D.5) \quad \begin{aligned} P_i G_{J \setminus I} (\mathbf{1} - P_i) &= P_i G_{J \setminus I} d\rho_i (\mathbf{1} - P_i) = P_i d\rho_i G_{J \setminus I} (\mathbf{1} - P_i) \\ &= P_i d\rho_i (P_i + \mathbf{1} - P_i) G_{J \setminus I} (\mathbf{1} - P_i) \\ &= d\rho_i P_i G_{J \setminus I} (\mathbf{1} - P_i) \end{aligned}$$

$$P_i G_{J \setminus I} (\mathbf{1} - P_i) = 0.$$

Die erste Gleichung ist damit aufgrund der Symmetrie sämtlicher Endomorphismen bewiesen.

Die Definitionsgleichung für $B_{J \setminus I}$ liefert

$$(D.6) \quad 2 \langle B_{J \setminus I}(X, Y), Z \rangle = \langle \nabla_X G_{J \setminus I} Y, Z \rangle + \langle \nabla_Y G_{J \setminus I} X, Z \rangle - \langle \nabla_Z G_{J \setminus I} X, Y \rangle .$$

Wegen $\rho_i^* \nabla = \nabla$ ist desweiteren

$$(D.7) \quad \begin{aligned} d\rho_i \nabla_X G_{J \setminus I} Y &= d\rho_i \nabla_X (G_{J \setminus I} Y) - d\rho_i G_{J \setminus I} \nabla_X Y \\ &= \nabla_{d\rho_i X} (d\rho_i G_{J \setminus I} Y) - G_{J \setminus I} \nabla_{d\rho_i X} (d\rho_i Y) \\ &= \nabla_{d\rho_i X} G_{J \setminus I} d\rho_i Y \end{aligned}$$

und daher

$$(D.8) \quad \langle d\rho_i B_{J \setminus I}(X, Y), d\rho_i Z \rangle = \langle B_{J \setminus I}(d\rho_i X, d\rho_i Y), d\rho_i Z \rangle ,$$

also

$$(D.9) \quad d\rho_i B_{J \setminus I}(\cdot, \cdot) = B_{J \setminus I}(d\rho_i \cdot, d\rho_i \cdot) .$$

Es folgt

$$(D.10) \quad \begin{aligned} P_i B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) &= P_i B_{J \setminus I}(d\rho_i(\mathbb{1} - P_i) \cdot, d\rho_i(\mathbb{1} - P_i) \cdot) \\ &= P_i d\rho_i B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) \\ &= d\rho_i P_i B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Damit ist die zweite Aussage bewiesen. $\square$

Lemma D.2. *Sei $I \subset J$ mit $U_I \neq \emptyset$. Es gibt Konstanten c_9, c_{10} , die nur von n, h, d_0 und $\hat{N}$ abhängen, so daß auf $U_I \cap \Omega$*

$$(D.11) \quad \|(\mathbb{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i\| \leq \eta^2 c_{10} x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$(D.12) \quad \|P_i B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot)\| \leq \eta^2 c_9 x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}}$$

gilt.

Beweis. Sei $p \in U_I$. Falls $x_i(p) \geq 1$ ist, gilt $1 \leq \sqrt{2} x_i(p)^{\frac{1}{2}} (1 + x_i(p))^{-\frac{1}{2}}$. Wegen Proposition 2.3 und (2.83) gilt

$$(D.13) \quad \|(\mathbb{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i\| \leq \eta^2 \sqrt{2} c_0 x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$(D.14) \quad \|P_i B_{J \setminus I}((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot)\| \leq \eta^2 \sqrt{2} c_8 x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}} .$$

Falls $x_i(p) < 1$ ist, wenden wir den Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung an, indem wir die entsprechend eingeschränkten Tensorfelder längs der minimalen normalen Geodätischen $c : [0, r_i(p)] \rightarrow U_I$ mit $c(0) \in \mathbb{C}\mathbb{H}_i^{n-1}$ und $c(r_i(p)) = p$

integrieren. Dabei sind $P_i = \langle \cdot, \dot{c} \rangle \dot{c} + \langle \cdot, J\dot{c} \rangle J\dot{c}$ und $\mathbb{1} - P_i$ parallele Projektorfelder. Es folgt

$$(D.15) \quad \begin{aligned} (\mathbb{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i|_p &= \int_0^{r_i(p)} \frac{\nabla}{dt} \left((\mathbb{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i \right) dt \\ &= \int_0^{r_i(p)} (\mathbb{1} - P_i) \frac{\nabla}{dt} G_{J \setminus I} P_i dt \end{aligned}$$

(D.16)

$$P_i B_{J \setminus I} ((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot)|_p = \int_0^{r_i(p)} P_i \frac{\nabla}{dt} B_{J \setminus I} ((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot) dt.$$

Wegen $x_i(p) < 1$ ist $2x_i^{\frac{1}{2}}(1+x_i)^{-\frac{1}{2}} = 2 \tanh r_i > r_i$. Da $\|P_i\| \leq 1$, $\|\mathbb{1} - P_i\| \leq 1$ folgt aus Proposition 2.3

$$(D.17) \quad \|(\mathbb{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i\| \leq \|\nabla G_{J \setminus I}\| r_i(p) \leq 2\eta^2 c_1 x_i^{\frac{1}{2}}(1+x_i)^{-\frac{1}{2}},$$

(D.18)

$$\|P_i B_{J \setminus I} ((\mathbb{1} - P_i) \cdot, (\mathbb{1} - P_i) \cdot)\| \leq \|\nabla B_{J \setminus I}\| r_i(p) \leq 3\eta^2 c_2 x_i^{\frac{1}{2}}(1+x_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die letzte Ungleichung benötigt dabei $\|\nabla B_{J \setminus I}\| \leq \frac{3}{2}\eta^2 c_2$, eine Tatsache, die unmittelbar aus der Definitionsgleichung von $B_{J \setminus I}$ und Proposition 2.3 folgt (siehe [AS2]). Beide Fälle zusammen beweisen das Lemma. $\square$

Mit (D.12) haben wir die erste der beiden benötigten Ungleichungen bewiesen. Wir haben dabei an keiner Stelle benutzt, daß die Indexmenge I nur aus einem Element besteht. Für die folgende, zweite Ungleichung werden wir dies jedoch unbedingt benötigen.

Lemma D.3. *Sei $I \subset J$ mit $U_I \neq \emptyset$. Es gilt auf $U_I \cap \Omega$*

$$(D.19) \quad \|(\mathbb{1} - P_i) G^{-1} (1 + G_i) P_i\| \leq \eta^2 c_{10} (1 + \eta^2 c_0) x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Da $I = \{i\}$ ist, kommutieren P_i und $\mathbb{1} + G_i = \mathbb{1} + \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} P_i$, deshalb folgt

$$(D.20) \quad \begin{aligned} G P_i - P_i G &= (\mathbb{1} + G_i) P_i - P_i (\mathbb{1} + G_i) + G_{J \setminus I} P_i - P_i G_{J \setminus I} \\ &= (\mathbb{1} - P_i) G_{J \setminus I} P_i - P_i G_{J \setminus I} (\mathbb{1} - P_i) \end{aligned}$$

und

$$(D.21) \quad \|G P_i - P_i G\| \leq \eta^2 c_{10} x_i^{\frac{1}{2}} (1 + x_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mit

$$(D.22) \quad (\mathbb{1} - P_i) G^{-1} (\mathbb{1} + G_i) P_i = (\mathbb{1} - P_i) G^{-1} (G P_i - P_i G) G^{-1} (\mathbb{1} + G_i)$$

folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Beim Versuch, das vorangehende Lemma oder eine andere brauchbare Abschätzung auch für beliebige Indexmengen I zu erzielen, scheitert man stets daran, daß zwei verschiedene Gradientenfelder nicht orthogonal zueinander sind.

Wir verdeutlichen dies am Beispiel der Indexmenge $I = \{i, k\}$. Dann ist $G_I = \eta^2 h(x_i) x_i^{-1} P_i + \eta^2 h(x_k) x_k^{-1} P_k$ und

$$(D.23) \quad (\mathbb{1} + G_I) P_i - P_i (\mathbb{1} + G_I) = \eta^2 h(x_k) x_k^{-1} (P_i P_k - P_k P_i).$$

Wegen

$$(D.24) \quad (P_i P_k - P_k P_i) \cdot v_k = x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{-\frac{1}{2}} (v_i - \langle v_i, v_k \rangle v_k)$$

ist für $x_i \leq 1$

$$(D.25) \quad \begin{aligned} \|(P_i P_k - P_k P_i)\| &\geq |(P_i P_k - P_k P_i) \cdot v_k| \\ &\geq \left(\frac{1+x_i+x_k}{(1+x_i)(1+x_k)} \right)^{\frac{1}{2}} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{-\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} x_i^{\frac{1}{2}} (1+x_i)^{-\frac{1}{2}} x_k^{\frac{1}{2}} (1+x_k)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die in (D.23) auftretende Singularität von x_k^{-1} läßt sich also auf diese Weise nicht beseitigen. Es scheint sehr gut möglich, daß sich allein aus den Axiomen 2.1 und D.1 im Falle mehrerer sich schneidender $\mathbb{CH}^{n-1}$ keine beschränkte Krümmung erzielen läßt.

LITERATUR

- [AS1] U. Abresch, V. Schroeder, *Graph manifolds, ends of negatively curved spaces, and the hyperbolic 120-cell space*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 299–336.
- [AS2] U. Abresch, V. Schroeder, *Analytic manifolds of nonpositive curvature*, Preprint, Uni-Münster 1992.
- [BBE] W. Ballmann, M. Brin, P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature I*, Ann. of Math. **122** (1985), 171–203.
- [BG] K. Burns, M. Gerber, *Real analytic Bernoulli geodesic flows on S^2* , Erg. Th. Dyn. Syst. **9** (1989), 27–45.
- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.
- [G] M. Gromow, *Manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. **13** (1978), 223–230.
- [GF] H. Grauert, K. Fritzsche, *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, 2.Auflage, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.
- [H] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [HS] Ch. Hummel, V. Schroeder, *Cusp closing in rank 1 symmetric spaces*, Preprint, Zürich 1994.
- [S1] V. Schroeder, *A cusp closing theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 797–802.
- [S2] V. Schroeder, *Analytic manifolds of nonpositive curvature with higher rank subspaces*, Arch. Math. **56** (1991), 81–85.