

## Absolute und relative Häufigkeiten, Mittelwert, Streuung

---

**Aufgabe 89** – Übungsgruppenexperiment:

a) Ermitteln Sie, wie viele Frauen und wie viele Männer sich in Ihrer Übungsgruppe befinden, und geben Sie die relativen Häufigkeiten der Frauen und Männer an.

b) Wie alt sind die Teilnehmer in Ihrer Übungsgruppe? Ermitteln Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten.

$a$		16	17	18	19	20	21	22	23	24						
$n(a)$																
$h(a)$																

Bestimmen Sie das mittlere Alter  $\bar{a} =$       und die Standardabweichung  $s =$       Welche Teilnehmer fallen aus der Standardumgebung des Mittelwerts?

c) Verdeutlichen Sie die Daten durch ein Histogramm und einen Boxplot.

d) Wie alt sind die Frauen in Ihrer Übungsgruppe? Ermitteln Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten.

$a_w$		16	17	18	19	20	21	22	23	24						
$n(a_w)$																
$h(a_w)$																

Bestimmen Sie das mittlere Alter  $\bar{a}_w =$       und die Standardabweichung  $s_w =$       Welche Frauen fallen aus der Standardumgebung des Mittelwerts?

d) Wie alt sind die Männer in Ihrer Übungsgruppe? Ermitteln Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten.

$a_m$		16	17	18	19	20	21	22	23	24						
$n(a_m)$																
$h(a_m)$																

Bestimmen Sie das mittlere Alter  $\bar{a}_m =$       und die Standardabweichung  $s_m =$       Welche Männer fallen aus der Standardumgebung des Mittelwerts?

e) Ist das mittlere Alter in Ihrer Übungsgruppe unabhängig vom Geschlecht? Können Sie  $\bar{a}$  aus  $\bar{a}_w$  und  $\bar{a}_m$  unter Verwendung von Aufgabenteil a) ausrechnen? Wie ist das bei  $s$ ?

## Ergebnisse und Ereignisse

---

**Aufgabe 90:** Geben Sie die Ergebnismenge der folgenden Experimente an:

- a) Ziehen einer Karte aus einem Skatblatt.
- b) Anzahl der Neutronen in einem natürlich vorkommenden Kohlenstoffatom.
- c) Der Wurf eines Würfels gefolgt vom Wurf einer Münze.
- d) Der dreifache Wurf einer Münze.

**Aufgabe 91:** Ein Würfel wird dreimal geworfen. Geben Sie die Ereignisse

$A$  = Die Augensumme aller Würfe beträgt höchstens fünf

$B$  = Im zweiten Wurf fällt eine Drei

$C$  = Die Augensumme beträgt genau 16

durch Auflisten aller in dem Ereignis enthaltenen Ergebnisse an. Welche der Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind unvereinbar?

## Statistische Abhängigkeit und Unabhängigkeit

---

**Aufgabe 92:** Gegeben ist das folgende digitale Bild:

	■	■			■	■	■			■	■	■	■	
■			■					■		■				
	■	■				■	■			■	■	■	■	
■			■					■						■
	■	■			■	■	■			■	■	■	■	

- Wie viele Bildpunkte gibt es insgesamt?
- Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten der schwarzen und weißen Punkte.

Wir betrachten jetzt Paare von Bildpunkten. Es ist hierbei möglich, dass derselbe Punkt zweimal in einem Paar vorkommt. Sie können sich vorstellen, dass Sie zur Festlegung eines Paares zweimal nacheinander mit einem Stift einen Punkt des Bildes antippen.

- Wie viele Paare von Bildpunkten gibt es insgesamt?
- Wie groß ist die relative Häufigkeit der Farbkombinationen  $(s,s)$ ,  $(s,w)$ ,  $(w,s)$ ,  $(w,w)$  unter allen Punktpaaren? Hierbei bedeutet zum Beispiel  $(s,w)$ , dass der erste Punkt schwarz und der zweite Punkt weiß ist.

Wir betrachten jetzt nur *horizontal benachbarte* Bildpunkte.

- Wie viele Paare von horizontal benachbarten Bildpunkten gibt es?
- Wie groß ist nun die relative Häufigkeit der Kombinationen  $(s,s)$ ,  $(s,w)$ ,  $(w,s)$ ,  $(w,w)$ ?
- Ist die Farbe zweier benachbarter Bildpunkte statistisch unabhängig?
- Wie groß ist die relative Häufigkeit der schwarzen Bildpunkte unter allen Punkten, deren linker Nachbarpunkt weiß ist?
- Erklären Sie das Ergebnis anschaulich.

## Wahrscheinlichkeiten

---

**Aufgabe 93:** VfL Bochum spielt gegen Bayern München. Die WAZ schätzt die Chancen auf 3:5, die Süddeutsche glaubt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Bochumer Sieg  $2/5$  beträgt. Wer hält Bochum für besser?

**Aufgabe 94:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- zufällig einen Monat auszuwählen, dessen Name mit „J“ beginnt,
- ein Herz-Ass aus einem gut gemischten Skatblatt zu ziehen,
- einen König aus einem gut gemischten Skatblatt zu ziehen,
- zuerst ein Herz-Ass und dann einen König zu ziehen,
- wenn ein Würfel dreimal nacheinander geworfen wird, die Kombination  $(3, 3, 1)$  zu erhalten,
- wenn drei Würfel auf einmal geworfen werden, als Ergebnis zwei Dreien und eine Eins zu erhalten,
- bei einem Wurf mit drei Würfeln die Augensumme 9 zu erhalten?
- bei einem Wurf mit drei Würfeln nicht die Augensumme 9 zu erhalten?

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

---

**Aufgabe 95:** Bei Familien mit drei Kindern ist die Ergebnismenge für die Geschlechter

$$\Omega = \{(j,j,j), (j,j,m), (j,m,j), (j,m,m), (m,j,j), (m,j,m), (m,m,j), (m,m,m)\}.$$

Wir nehmen an, dass die Geburt eines Jungen und die eines Mädchens gleich wahrscheinlich sind.

a) Geben Sie die Ereignisse

$E_1$  = Die Familie hat mindestens einen Jungen

$E_2$  = Alle Kinder sind Jungen

durch Auflisten der darin enthaltenen Ergebnisse an.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Familie zwei Jungen hat, falls sie schon wenigstens einen hat.

c) Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$E_3$  = Die Familie hat Kinder beiden Geschlechts

$E_4$  = Die Familie hat höchstens ein Mädchen

unabhängig sind.

## Zufallsgrößen, Erwartungswert, Varianz

---

**Aufgabe 96:** In einem Spiel mit zwei Spielern werden in jedem Spielzug zwei Münzen geworfen. Fällt zweimal Wappen, bekommt Spieler 1 zwei Punkte. Fällt einmal Wappen und einmal Zahl, bekommt Spieler 1 einen Punkt. Fällt zweimal Zahl, bekommt Spieler 2 vier Punkte.

a) Spielen Sie zu zweit zwanzig Züge dieses Spiels und protokollieren Sie den Spielstand. Würden Sie das Spiel als fair bezeichnen?

b) Sei  $X$  die Zufallsgröße *Punkte Spieler 1 - Punkte Spieler 2*. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = 1)$  und  $P(X \geq 1)$  an.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung bei diesem Spiel. Ist das Spiel fair?

**Aufgabe 97:** Beim Skatspiel sind den Karten verschiedene Werte zugeordnet: Ass 11, Zehn 10, König 4, Dame 3, Bube 2, Neun 0, Acht 0, Sieben 0. Diese Zuordnung kann man als Zufallsgröße  $X$  interpretieren.

a) Beschreiben Sie das zugrunde liegende Zufallsexperiment.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße  $X$ .

c) Ein Spieler zieht zufällig nacheinander zwei Karten mit Zurücklegen. Welchen Wert kann er erwarten?

d) Ein Spieler zieht zufällig nacheinander zwei Karten ohne Zurücklegen. Welchen Wert kann er erwarten?

e) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße  $3(X - 1, 75)$ .

## Tschebyschew-Ungleichung

---

**Aufgabe 98:** Eine Firma stellt Fettsäuren her. Der Erwartungswert beträgt 18 Kohlenstoffatome pro Kette, die Standardabweichung beträgt 2 Kohlenstoffatome pro Kette. Geben Sie eine obere Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Kette in ihrer Länge um vier oder mehr von den 18 Kohlenstoffatomen abweicht.

## Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung

---

**Aufgabe 99:** Eine Münze wird sechsmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

- a) dass sechsmal Wappen fällt?
- b) dass mindestens einmal Zahl fällt?
- c) dass genau zweimal Wappen fällt?
- d) dass wenigstens dreimal Wappen fällt?

**Aufgabe 100:** a) In Deutschland besitzt etwa jeder zwanzigste Mensch die Blutgruppe AB. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von zwanzig Menschen vier die Blutgruppe AB besitzen?

b) Bei der gezielten Herstellung eines Moleküls beträgt die Wahrscheinlichkeit 8%, dass das gewünschte Molekül tatsächlich hergestellt wurde. Wie viele Moleküle müssen produziert werden, so dass mit 90% Wahrscheinlichkeit wenigstens ein gewünschtes Molekül darunter ist?

c) Wie oft muss man einen Würfel werfen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% wenigstens zweimal eine 6 fällt?

**Aufgabe 101:** Zeichnen Sie den Graphen der Binomialverteilung für  $n = 6$  und  $p = 0,8$ .

**Aufgabe 102:** Etwa 5% aller Menschen in Deutschland sind farbenblind. Wie groß sind der Erwartungswert und die Standardabweichung, wenn 300 Personen darauf untersucht werden, ob Sie farbenblind sind?

## Hypergeometrische Verteilung

---

**Aufgabe 103:** In einer Lieferung von 30 Transistoren sind sechs defekt.

- a) Wie groß ist der Anteil der defekten Transistoren in Prozent?
- b) Der Lieferung werden zufällig drei Transistoren entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass keiner bzw. mindestens einer davon defekt ist.
- c) Benutzen Sie für die Rechnungen in b) alternativ die Näherung der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung. Wie groß ist der Unterschied?

**Aufgabe 104:** Beim Skat erhält Spieler A zufällig zehn Karten.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter zwei Buben sind?
- b) Wie viele Asse darf Spieler A erwarten?