

EINIGE HOMOTOPIEGRUPPEN DER KLASSISCHEN GRUPPEN AUS GEOMETRISCHER SICHT

Thomas Püttmann

Habilitationsschrift

Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Januar 2004

EINIGE HOMOTOPIEGRUPPEN DER KLASSISCHEN GRUPPEN AUS GEOMETRISCHER SICHT

THOMAS PÜTTMANN

1. EINLEITUNG

In dieser Habilitationsschrift werden bestimmte Homotopiegruppen der Gruppen $SO(n)$, $SU(n)$ und $Sp(n)$ aus einer geometrischen Sichtweise behandelt. Es ist ein klassisches Problem, Elemente dieser Gruppen durch Abbildungen darzustellen, die durch spezielle geometrische Eigenschaften oder aus Symmetriegründen ausgezeichnet sind. Zum Beispiel ist seit langem bekannt (siehe z. B. [Fo]), daß sich Erzeuger der stabilen Homotopiegruppen $\pi_k(SU(n))$ durch eine eingebettete totalgeodätische Sphäre repräsentieren lassen, wenn n gegenüber k hinreichend groß ist. Interessant ist aber vor allem der Bereich an der Grenze zwischen Stabilität und Instabilität und genau hierauf konzentriert sich die vorliegende Arbeit. Es werden hier nicht nur Homotopieklassen in diesem Bereich durch konkrete Abbildungen dargestellt, sondern auf dieser Ebene auch in einigen Fällen die geometrischen Kürzungseffekte angegeben, die die Ordnungen dieser Gruppen verursachen. Die Strukturen dieser konkreten Kürzungen sind aus den vorhandenen algebraischen Berechnungen der Homotopiegruppen nicht ersichtlich und ergänzen diese daher auf interessante Weise.

Das zentrale klassische Problem in diesem Bereich betrifft den Kommutator der Quaternionen. Borel und Serre [Bo-Se] hatten nach mehreren Vorarbeiten (unter anderem von Blakers und Massey [Bl-Ma]) gezeigt, daß $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist und vom Kommutator der Quaternionen erzeugt wird. Es stellte sich dadurch die natürliche Frage, wie die zwölfte Potenz des Kommutators nullhomotop wird. Eine geometrische Lösung dieses Problems hätte ein vertieftes Verstehen des Schiefkörpers der Quaternionen zur Folge. Eine unmittelbare Anwendung einer expliziten Nullhomotopie wären unendlich viele explizite Diffeomorphismen zwischen $\mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^3$ und $\Sigma_k^7 \times \mathbb{S}^3$ für einige der exotischen Sphären Σ_k^7 und damit unendlich viele explizite freie Operationen von $\mathbb{S}^3$ auf $\mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^3$ und von $\text{Spin}(7)$ auf $\text{Spin}(8)$, deren Quotient eine exotische Sphäre Σ_k^7 ist (siehe [Ri]).

Eine der in dieser Arbeit verfolgten Annäherungen an $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ verläuft über die Gruppen $\pi_6(G_2) \approx \mathbb{Z}_3$ und $\pi_6(SU(3)) \approx \mathbb{Z}_6$. Die konkreten Kürzungseffekte in diesen beiden Gruppen auf der Ebene der repräsentierenden Abbildungen wurden im wesentlichen in den Arbeiten [Ch-Ri2] bzw. [Pü-Ri] herausgearbeitet. Sie werden hier in einer vollständigeren Weise dargestellt, und die Erzeuger dieser Gruppen werden systematisch durch das Liften von horizontalen Geodätischen erhalten. Dieses wurde zuvor für $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ in [Du-Me-Ri] durchgeführt und liefert in diesem Fall einen Erzeuger, der vom Kommutator der Quaternionen induziert wird. Durch die Liftungskonstruktion erhält man insbesondere sehr elegante Homotopien zwischen den Erzeugern von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ und $\pi_6(SU(3))$ in $SU(3)$ und zusätzlich noch zwischen diesen beiden und dem Erzeuger von $\pi_6(G_2)$ in G_2 . Insgesamt wird damit in dieser

Arbeit gezeigt, wie die dritte bzw. sechste Potenz des Kommutators der Quaternionen nullhomotop wird, wenn man die Zielmenge $\mathbb{S}^3$ des Kommutators in die größeren Gruppen $SU(3)$ und G_2 einbettet.

Die Homotopiegruppen $\pi_6(\mathbb{S}^3) = \pi_6(Sp(1))$ und $\pi_6(SU(3))$ sind Teile der Folgen $\pi_{4n+2}(Sp(n))$ und $\pi_{2n}(SU(n))$. Explizite Erzeuger aller dieser Gruppen werden hier durch Liftungskonstruktionen gewonnen. Im Falle von $\pi_{2n}(SU(n)) \approx \mathbb{Z}_{n!}$ wird für alle n der zugehörige Kürzungseffekt herausgearbeitet. Die aufgefundenen Nullhomotopien werden benutzt, um iterativ erzeugende Abbildungen der letzten stabilen Homotopiegruppen $\pi_{2n-1}(SU(n))$ der unitären Gruppen zu konstruieren.

Der zweite Zugang zu $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ verläuft über einen Erzeuger von $\pi_7(Sp(2))$. Wir konstruieren die erste explizite Formel für einen solchen Erzeuger. Dabei wird die Ordnung von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ nicht als bekannt vorauszusetzen. Die Formel liefert vielmehr einen neuen Beweis dafür, daß $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist. Sie könnte sich als Schlüssel zu den konkreten Kürzungseffekten in $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ erweisen. Die Abbildung beinhaltet im Prinzip nämlich die volle Information über eine Nullhomotopie eines Elementes von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$, das per Konstruktion die zwölfte Potenz eines Erzeugers repräsentiert. Allerdings muß der Zusammenhang zur zwölften Potenz des Kommutators noch konkret hergestellt werden.

Schließlich werden weitere Homotopiegruppen behandelt: $\pi_4(Sp(2)) \approx \mathbb{Z}_2$ wird durch die Cartaneinbettung $\mathbb{S}^4 \rightarrow Sp(2)$ erzeugt und auf diese Weise erkennt man eine einfache Isotopie zwischen dem Erzeuger und seinem Inversen. Die Homotopiegruppe $\pi_5(SU(3)) \approx \mathbb{Z}$, die in der Quantenchromodynamik im Rahmen des Skyrme-Modells eine Rolle spielt (siehe [Wi]), wird auf verschiedene Weise repräsentiert. Einer dieser Repräsentanten ist eine minimale eingebettete $\mathbb{S}^5$, die ein Orbit unter der Operation $SU(3) \times SU(3) \rightarrow SU(3)$, $(A, B) \mapsto ABA^t$. Diese Einbettung wurde als Erzeuger von $\pi_5(SU(3))$ zuerst in [Pü-Ri] vorgestellt.

In der Arbeit wird oft ausgenutzt, daß die Verknüpfung in der Homotopiegruppe einer zusammenhängenden kompakten Liegruppe durch die Wert-für-Wert-Multiplikation der darstellenden Abbildungen gegeben ist und man damit zu freien Homotopieklassen übergehen kann.

Zum Schluß der Einleitung soll noch ein klassisches Beispiel in die obigen Ergebnisse eingereiht werden. Freudenthal [Fr] hat gezeigt, daß die Einhängung Σh der Hopffaserung $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ die Homotopiegruppe $\pi_4(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_2$ erzeugt. Die in Kapitel 6 angestellten Betrachtungen erlauben auf sehr elegante Art zu sehen, wie Σh homotop zu seinem Inversen ist. Die Sphäre $\mathbb{S}^3$ ist nämlich diffeomorph zu $SU(2)$ und $\pi_4(SU(2))$ ist das erste Glied der oben erwähnten Folge $\pi_{2n}(SU(n))$. Der in Kapitel 6 gewonnene Erzeuger

$$\phi : SU(2) \times [0, \pi] \rightarrow SU(2), \quad (A, t) \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \cdot A^{-1},$$

von $\pi_4(SU(2))$ ist nun nichts anderes als die Einhängung der Hopffaserung, denn für $t = 0$ und $t = \pi$ sind die Werte unabhängig von $A \in SU(2)$, und für festes $t \in]0, \pi[$ kollabiert genau eine Einparameteruntergruppe von $SU(2)$. Durch die Homotopie

$$SU(2) \times [0, \pi] \times [0, \pi/2] \rightarrow SU(2),$$

$$(A, t, s) \mapsto A \cdot \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot A^{-1},$$

die die Diagonalelemente in der mittleren Matrix austauscht, ist nun der Erzeuger ϕ homotop zu ϕ^{-1} .

Der Autor möchte sich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Uwe Abresch und Herrn Professor A. Rigas für ihre langjährige Unterstützung bedanken.

2. BOTT-PERIODIZITÄT UND ERZEUGER DER STABILEN HOMOTOPIEGRUPPEN

Wir beginnen diese Arbeit mit den stabilen Gruppen der klassischen Gruppen, vor allem, der späteren Anwendungen wegen, der unitären Gruppen. Zu Beginn des Kapitels geben wir eine explizite Form des Bott-Periodizitätsisomorphismus für die unitären Gruppen an. Dabei folgen wir im wesentlichen dem Zugang in [Fo]. Mit diesem Periodizitätsisomorphismus erhält man iterativ totalgeodätische eingebettete Erzeuger der stabilen Homotopiegruppen $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(2^{k-1}))$. Obwohl der Begriff der Clifford-Darstellungen in diesem Zugang nicht auftaucht, werden dabei genau die Clifford-Sphären in diesen Darstellungen produziert. Anschließend zeigen wir, daß die Einschränkung des unitären Periodizitätsisomorphismus auf Abbildungen mit Werten in den symmetrischen unitären Matrizen den Isomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_{k+1}(\mathrm{Sp}(n))$ ergibt und ziehen daraus einige Konsequenzen, die im Verlauf der Arbeit genutzt werden. Wir erhalten ebenfalls eine sehr einfache Formel für den Isomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_{k+3}(\mathrm{Sp}(2n))$. Abschließend behandeln wir eine explizite Faktorisierung des Periodizitätsisomorphismus, die im auf Lundell [Lu1] zurückgeht. Diese liefert ein Iterationsverfahren für Erzeuger der letzten stabilen Gruppen $\pi_{2n-1}(\mathrm{U}(n))$.

2.1. Vorbemerkung. Die Homotopiegruppen $\pi_k(\mathrm{O}(n))$ und $\pi_k(\mathrm{SO}(n))$ unterscheiden sich nur im Fall $k = 0$, da $\mathrm{SO}(n)$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathrm{O}(n)$ ist. Die Homotopiegruppen $\pi_k(\mathrm{U}(n))$ und $\pi_k(\mathrm{SU}(n))$ der unitären beziehungsweise speziell-unitären Gruppen stimmen für $k \geq 2$ überein. Dies folgt unmittelbar aus der exakten Homotopiesequenz des Faserbündels

$$\mathrm{SU}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(n) \xrightarrow{\det} \mathrm{U}(1)$$

und der elementaren Tatsache, daß $\pi_k(\mathrm{U}(1))$ für $k \geq 2$ trivial ist.

2.2. Stabilität. Seit ungefähr 1940 ist bekannt, daß die Inklusionsabbildungen

$$\mathrm{O}(n) \rightarrow \mathrm{O}(n+1), \quad \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathrm{U}(n+1), \quad \mathrm{Sp}(n) \rightarrow \mathrm{Sp}(n+1)$$

Isomorphismen zwischen den entsprechenden k -ten Homotopiegruppen induzieren, sofern $k \leq n-2$, $k \leq 2n-1$ bzw. $k \leq 4n+1$ ist. Die Homotopiegruppen in diesen Bereichen werden stabil genannt und vereinfacht mit $\pi_k(\mathrm{O})$, $\pi_k(\mathrm{U})$ und $\pi_k(\mathrm{Sp})$ bezeichnet. Es war fast zwei Jahrzehnte hindurch ein offenes Problem, die stabilen Homotopiegruppen der klassischen Gruppen zu bestimmen. Dies gelang schließlich Raoul Bott 1959:

$k \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_k(\mathrm{U})$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
$\pi_k(\mathrm{O})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
$\pi_k(\mathrm{Sp})$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

2.3. Bott-Periodizität im unitären Fall. Bott konstruierte im unitären Fall eine Abbildung

$$\pi_{k-1}(\mathrm{U}(n)) \rightarrow \pi_{k+1}(\mathrm{SU}(2n)),$$

und wies nach, daß diese Abbildung für $k \leq 2n$ ein Isomorphismus ist. Damit ergeben sich die stabilen Homotopiegruppen der unitären Gruppen aus der trivialen Gruppe $\pi_0(\mathrm{U}(1))$ und der Gruppe $\pi_1(\mathrm{U}(1)) \approx \mathbb{Z}$ (die Umlaufzahl ist die einzige Homotopieinvariante einer Selbstabbildung der Kreislinie). Die Konstruktion des Bottschen Periodizitätsisomorphismus verläuft in zwei Stufen, bei denen die

Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{2n,n}$ der komplexen n -dimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^{2n}$ und die Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_{2n,n}$ der hermiteschen orthonormalen n -Beine in $\mathbb{C}^{2n}$ eine entscheidende Rolle spielen:

- Die Homotopiegruppen $\pi_k(V_{2n,n})$ sind für $k \leq 2n$ trivial. Damit folgt aus der exakten Homotopiesequenz des Bündels $U(n) \longrightarrow V_{2n,n} \longrightarrow G_{2n,n}$, daß $\pi_k(G_{2n,n})$ und $\pi_{k-1}(U(n))$ isomorph sind. Für die explizite Konstruktion des Periodizitätsisomorphismus ist wesentlich, daß die Fasern des Bündels im Totalraum $V_{2n,n}$ nullhomotop sind. Dadurch erhält man einen Schnitt für die Randabbildung $\pi_k(G_{2n,n}) \rightarrow \pi_{k-1}(U(n))$ in der exakten Homotopiesequenz.
- Die Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{2n,n}$ wird mit der Menge der kürzesten Wege von $\mathbb{1}$ zu $-\mathbb{1}$ in $SU(2n)$ identifiziert. Dies liefert in natürlicher Weise einen Homomorphismus $\pi_k(G_{2n,n}) \rightarrow \pi_{k+1}(SU(2n))$. Mittels Morsetheorie folgt, daß dieser Homomorphismus für $k \leq 2n$ ein Isomorphismus ist.

Wir werden diese beiden Stufen des Bottschen Periodizitätsisomorphismus explizit machen. Um das Ergebnis zu formulieren, ordnen wir einer Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow U(n)$ die zueinander homotopen Abbildungen $\mathcal{B}(\theta), \mathcal{B}'(\theta) : \mathbb{S}^{k+1} \rightarrow SU(2n)$,

$$(1) \quad \mathcal{B}(\theta)\left(\begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w \cdot \mathbb{1} & -|x| \overline{\theta(\hat{x})}^t \\ |x| \theta(\hat{x}) & \bar{w} \cdot \mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}'(\theta)\left(\begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w \cdot \mathbb{1} & i|x| \overline{\theta(\hat{x})}^t \\ i|x| \theta(\hat{x}) & \bar{w} \cdot \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

zu. Hierbei bezeichnet $\mathbb{S}^{k+1}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^k$ und $\hat{x} = x/|x|$ den zu x gehörigen Einheitsvektor.

Satz 2.1. *Die Zuordnungen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ stellen für $k \leq 2n$ den Isomorphismus*

$$\pi_{k-1}(U(n)) \longrightarrow \pi_{k+1}(SU(2n))$$

explizit dar.

Beweis. Wir benutzen die Modelle

$$\begin{aligned} V_{2n,n} &= \{Z \in \text{Mat}(2n \times n, \mathbb{C}) \mid \bar{Z}^t Z = \mathbb{1}\}, \\ G_{2n,n} &= SU(2n) \cap \mathfrak{su}(2n) \subset \{A \in SU(2n) \mid A^2 = -\mathbb{1}\}. \end{aligned}$$

Die Gruppe $SU(2n)$ operiert transitiv auf $V_{2n,n}$ und $G_{2n,n}$ durch Linksmultiplikation beziehungsweise Konjugation. Die Faserung $V_{2n,n} \rightarrow G_{2n,n}$ wird durch die äquivariante Abbildung $Z \mapsto i(2ZZ^t - \mathbb{1})$ vermittelt. Die Inklusionsabbildung der Faser $\begin{bmatrix} 0 \\ U(n) \end{bmatrix} \subset V_{2n,n}$ über dem Punkt $i\begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \in G_{2n,n}$ ist durch die Abbildung

$$H : [0, \pi] \times U(n) \rightarrow V_{2n,n}, \quad (t, B) \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t/2)\mathbb{1} \\ \sin(t/2)B \end{bmatrix}$$

homotop zu der konstanten Abbildung auf den Punkt $\begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ 0 \end{bmatrix}$. Mit dieser Abbildung H konstruieren wir jetzt einen Schnitt s für die Randabbildung $\partial : \pi_k(G_{2n,n}) \rightarrow \pi_{k-1}(U(n))$. Dazu ordnen wir einer Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow U(n)$ die folgende Abbildung zu:

$$(2) \quad \begin{aligned} [0, \pi] \times \mathbb{S}^{k-1} &\xrightarrow{\hat{s}(\theta)} V_{2n,n} \longrightarrow G_{2n,n} \\ (t, x) &\mapsto H(t, \theta(x)) \mapsto i \begin{bmatrix} \cos t \mathbb{1} & \sin t \overline{\theta(x)}^t \\ \sin t \theta(x) & -\cos t \mathbb{1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ erhalten wir $i\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$ und für $t = \pi$ erhalten wir $i\begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$ unabhängig von $x \in \mathbb{S}^{k-1}$. Daher induziert die Abbildung (2) eine Abbildung $s(\theta) : \mathbb{S}^k \rightarrow G_{2n,n}$. Die Zuordnung $\theta \mapsto s(\theta)$ liefert offensichtlich einen Schnitt für die Randabbildung ∂ .

Betrachten wir nämlich die Abbildung $\hat{s}(\theta)$, so induziert diese zumindest eine Abbildung $D^k(\pi) \rightarrow V_{2n,n}$, da $\hat{s}(0, x) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ 0 \end{bmatrix}$ unabhängig von $x \in \mathbb{S}^{k-1}$ ist. Die ausgewertete Randabbildung $\partial(s(\theta))$ ist nun nichts anderes als $\hat{s}(\theta)(\pi, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta(x) \end{bmatrix}$.

Die Abbildung $s(\theta)$ läßt sich als Abbildung mit Definitionsmenge $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ folgendermaßen schreiben:

$$s(\theta) : \mathbb{S}^k \rightarrow G_{2n,n}, \quad \begin{bmatrix} b \\ x \end{bmatrix} \mapsto i \begin{bmatrix} b \cdot \mathbb{1} & |x| \overline{\theta(\hat{x})}^t \\ |x| \theta(\hat{x}) & -b \cdot \mathbb{1} \end{bmatrix},$$

wobei $\hat{x}$ den zu $x \in \mathbb{R}^k$ gehörenden Einheitsvektor $x/|x|$ bezeichnet.

In der zweiten Stufe des Bottschen Periodizitätsisomorphismus induziert die Inklusion $G_{2n,n} \rightarrow \mathrm{SU}(2n)$ in natürlicher Weise einen Homomorphismus

$$\pi_k(G_{2n,n}) \longrightarrow \pi_{k+1}(\mathrm{SU}(2n)).$$

Konkret ist dieser auf folgende Art gegeben ist: Man ordnet einer Abbildung $\xi : \mathbb{S}^k \rightarrow G_{2n,n}$ die Abbildung

$$\mathbb{S}^{k+1} \rightarrow \mathrm{SU}(2n), \quad \begin{bmatrix} a \\ y \end{bmatrix} \mapsto a \cdot \mathbb{1} + |y| \xi(\hat{y}),$$

wobei $\hat{y}$ den zu $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ gehörenden Einheitsvektor $y/|y|$ bezeichnet.

Kombiniert man nun die erste und zweite Stufe und faßt a und b zu einer komplexen Zahl $w = a + ib$ zusammen, so wird insgesamt einer Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathrm{U}(n)$ die Abbildung $\mathcal{B}'(\theta) : \mathbb{S}^{k+1} \rightarrow \mathrm{SU}(2n)$ zugeordnet. $\square$

2.4. Totalgeodätische Erzeuger im unitären Fall. Iteriert man den Periodizitätsisomorphismus $\mathcal{B}$ beginnend mit der Parametrisierung

$$\zeta_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathrm{U}(1), \quad z \mapsto z,$$

so erhält man Einbettungen $\zeta_k : \mathbb{S}^{2k-1} \rightarrow \mathrm{U}(2^{k-1})$, die Erzeuger der Gruppen $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(2^{k-1}))$ darstellen und Werte in $\mathrm{SU}(2^{k-1})$ annehmen, falls $k \geq 2$ ist. Im ersten Schritt ergibt sich die gebräuchliche Parametrisierung

$$\zeta_2 : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{SU}(2), \quad \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{bmatrix}$$

von $\mathrm{SU}(2)$ und im zweiten Schritt die Abbildung

$$\zeta_3 : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(4), \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 & 0 & -\bar{z}_2 & -\bar{z}_3 \\ 0 & z_1 & z_3 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & -\bar{z}_3 & \bar{z}_1 & 0 \\ z_3 & \bar{z}_2 & 0 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}.$$

Die Einbettungen ζ_k sind totalgeodätisch und $\mathbb{R}$ -linear, in dem Sinn, daß sie sich zu einer $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung von $\mathbb{R}^{2k}$ in den Raum der komplexen $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ -Matrizen fortsetzen. Indem man mehrere Kopien von ζ_k oder dessen Inverse entlang der Diagonalen in einer passend großen quadratischen Matrix plaziert, läßt sich für genügend großes n jedes Element der Homotopiegruppe $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(n))$ durch totalgeodätische $\mathbb{R}$ -lineare Einbettungen darstellen. Für unterschiedliche Zugänge und weitere Informationen zu diesen Abbildungen verweisen wir auf das Buch [Fo] und die Arbeiten [Eck1], [Eck2], [Lu-To].

Wir stellen nun eine elementare Eigenschaft der Erzeuger ζ_k fest, die wir im weiteren Verlauf noch benötigen werden.

Lemma 2.2. *Für die Erzeuger ζ_k von $\pi_{2k-1}(\mathrm{SU}(2^{k-1}))$ gilt $\zeta_k(\bar{z}) = \overline{\zeta_k(z)}$.*

Beweis. Dies folgt sofort durch Induktion. $\square$

Korollar 2.3. *Eine Abbildung $\mathbb{S}^{2k-1} \rightarrow \mathrm{U}(n)$ mit $k \leq n$ ist homotop zu ihrem Transponierten, falls k ungerade ist, und homotop zu ihrem Komplexkonjugierten, falls k gerade ist.*

Beweis. Es genügt, die geforderten Eigenschaften für die obigen Erzeuger ζ_k von $\pi_{2n-1}(\mathrm{U}(n))$ nachzuweisen. Ist k gerade, so ist die Abbildung $\mathbb{S}^{2k-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2k-1}$, $z \mapsto \bar{z}$ eine orthogonale Transformation des reellen Vektorraums $\mathbb{C}^k \approx \mathbb{R}^{2k}$ mit Determinante 1 und daher homotop zur Identität. Da $\zeta_k(\bar{z}) = \overline{\zeta_k(z)}$ gilt, ist ζ_k homotop zur Abbildung $\bar{\zeta}_k$. Diese Homotopie liefert unmittelbar eine Homotopie zwischen $\zeta_{k+1} = \mathcal{B}(\zeta_k)$ und ζ_{k+1}^t ist, wie man an der Formel für $\mathcal{B}$ oder besser noch der für $\mathcal{B}'$ erkennt. $\square$

2.5. Abbildungen mit Werten in den symmetrischen unitären Matrizen.

Der symmetrische Raum $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ ist durch seine Cartaneinbettung diffeomorph zu der Menge der symmetrischen unitären Matrizen in $\mathrm{U}(n)$. Wendet man den Periodizitätsisomorphismus $\mathcal{B}$ auf eine Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathrm{U}(n)$ mit Werten in $\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{Sym}(n)$, so erhält man offensichtlich eine Abbildung $\mathcal{B}(\theta) : \mathbb{S}^{k+1} \rightarrow \mathrm{SU}(2n)$, deren Werte alle von der Form $\begin{bmatrix} A & -\bar{B} \\ B & A \end{bmatrix}$ sind und damit in $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n)$ liegen.

Lemma 2.4. *Die Einschränkung von $\mathcal{B}$ auf Abbildungen mit Werten in den symmetrischen unitären Matrizen liefert einen Homomorphismus*

$$\pi_{k-1}(\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_{k+1}(\mathrm{Sp}(n)).$$

Dieser Homomorphismus ist für $k \leq n$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir überprüfen im folgenden, daß der obige Homomorphismus für $k \leq n$ mit dem von Bott konstruierten Isomorphismus übereinstimmt (siehe [Bt2]). Entscheidend dafür ist, daß die Abbildung $\mathcal{B}(\theta)$ Werte in einem symmetrischen Raum $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ annimmt, wenn $\theta : \mathbb{S}^{k-2} \rightarrow \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ auf einer speziellen $\mathbb{S}^{k-2} \subset \mathbb{S}^{k-1}$ definiert ist. Schränkt man w auf rein imaginäre Werte ein, so ist $\mathcal{B}(\theta)\left(\begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix}\right)$ in der Fixpunktmenge der Involution $A \mapsto jA^{-1}(-j)$ enthalten. Diese Fixpunktmenge ist das Bild der Cartaneinbettung

$$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(n), \quad A \mapsto AjA^{-1}(-j)$$

des symmetrischen Raumes $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{U}(n)$ die Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n)$, die aus den Matrizen besteht, deren Einträge in $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, j\}$ liegen. $\square$

Das besondere an der Tatsache, daß Abbildungen mit Werten in $\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{Sym}(n)$ durch den Periodizitätsisomorphismus auf Abbildungen mit Werten in $\mathrm{Sp}(2n)$ abgebildet werden, ist, daß die Homotopiegruppen der unitären Gruppen im Bereich $k \leq 2n-1$ stabil sind, während die Homotopiegruppen $\pi_k(\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n))$ in dem viel kleineren Bereich $k \leq n-1$ stabil sind. Auf diese Weise kann man Informationen erhalten, die man aus den isolierten Versionen der einzelnen Isomorphismen nicht bekommt.

Korollar 2.5. *Jede Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{2k-1} \rightarrow \mathrm{U}(n)$ mit geradem $k \leq n$, deren Werte in den symmetrischen unitären Matrizen liegen, ist nullhomotop in $\mathrm{SU}(n)$.*

Beweis. Würde θ ein nicht-triviales Element der stabilen Gruppe $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(n))$ darstellen, so würde auch $\mathcal{B}(\theta)$ nach Satz 2.1 ein nicht-triviales Element in der Gruppe $\pi_{2k+1}(\mathrm{SU}(2n)) \approx \mathbb{Z}$ darstellen. Aber $\mathcal{B}(\theta)$ nimmt Werte in $\mathrm{Sp}(n)$ an, und die stabile Gruppe $\pi_{2k+1}(\mathrm{Sp}(n))$ ist, falls k gerade ist, trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Lemma 2.6. *Ist θ ein Erzeuger von $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(n))$ mit $k = 2m + 1 \leq n$, so stellt $\mathcal{B}(\theta \cdot \theta^t)$ einen Erzeuger von $\pi_{2k+1}(\mathrm{Sp}(n)) \approx \mathbb{Z}$ dar, falls m ungerade ist, und das Quadrat eines Erzeugers, falls m gerade ist.*

Beweis. Gemäß Korollar 2.3, stellt $\theta \cdot \theta^t$ die zweite Potenz des durch θ gegebenen Erzeugers von $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(n))$ dar. Daher repräsentiert $\mathcal{B}(\theta \cdot \theta^t)$ die zweite Homotopieklasse in $\pi_{2k+1}(\mathrm{SU}(2n))$. Weil $\theta \cdot \theta^t$ symmetrisch ist, nimmt $\mathcal{B}(\theta \cdot \theta^t)$ Werte in $\mathrm{Sp}(n)$ an. Aus dem Abschnitt

$$\pi_{2k+1}(\mathrm{Sp}(n)) \rightarrow \pi_{2k+1}(\mathrm{SU}(2n)) \rightarrow \pi_{2k+1}(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)) \rightarrow \pi_{2k}(\mathrm{Sp}(n)).$$

der exakten Homotopiesequenz des homogenen Raums $\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$ folgt nun die Aussage, denn alle auftretenden Gruppen sind stabil: Die ersten beiden sind isomorph zu $\mathbb{Z}$, die letzte trivial, und $\pi_{2k+1}(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n))$ ist trivial, falls m gerade ist, und isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, falls m ungerade ist. $\square$

Korollar 2.7. *Für $k = 4l + 3 \leq n$ gibt es keinen Erzeuger der stabilen Gruppe $\pi_{2k-1}(\mathrm{U}(n))$, der ausschließlich Werte in den symmetrischen unitären Matrizen annimmt.*

2.6. Der Isomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_{k+3}(\mathrm{Sp}(2n))$. Der Bott-Periodizitätsisomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_{k+7}(\mathrm{SO}(8n))$ für $k \leq n - 1$ gliedert sich wie folgt in zwei Teilisomorphismen:

$$\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_{k+3}(\mathrm{Sp}(2n)) \rightarrow \pi_{k+7}(\mathrm{SO}(8n)).$$

Für den ersten dieser Teilisomorphismen geben wir hier noch eine explizite Formel an, da sie ohne Aufwand zu erhalten ist.

Lemma 2.8. *Die Einschränkung von $\mathcal{B}'$ auf Abbildungen mit Werten in den orthogonalen Matrizen stellt für $k \leq n - 1$ den Isomorphismus*

$$\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_{k+1}(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{SO}(2n))$$

explizit dar.

Beweis. Ist $\theta : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathrm{U}(n)$ eine Abbildung mit Werten in $\mathrm{O}(n)$, so nimmt $\mathcal{B}'(\theta)$ ausschließlich Werte in den symmetrischen speziell-unitären Matrizen an. Die Menge der symmetrischen Matrizen in $\mathrm{SU}(n)$ ist das Bild der Cartaneinbettung $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SU}(n)$. Setzt man in $\mathcal{B}'(\theta)(\begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix})$ nur imaginäre Zahlen w ein, so erhält man Werte in $G_{2n,n}^{\mathbb{R}} \subset G_{2n,n}$, wie man dem vorigen Abschnitt entnimmt. Dies bedeutet, daß die Einschränkung von $\mathcal{B}'$ zunächst einen Homomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_k(G_{2n,n}^{\mathbb{R}})$ induziert. Die Aussage folgt damit sofort aus den Ergebnissen in [Bt2]. $\square$

Setzt man die Einschränkungen von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus Lemma 2.8 und Lemma 2.4 zusammen (und wendet einige offensichtliche Homotopien an), so wird insgesamt einer Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathrm{O}(n)$ eine Abbildung $\mathcal{B}_{\mathrm{O},\mathrm{Sp}}(\theta) : \mathbb{S}^{k+3} \rightarrow \mathrm{Sp}(2n)$ zugeordnet vermöge

$$\mathcal{B}_{\mathrm{O},\mathrm{Sp}}(\theta)\left(\begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u \cdot \mathbb{1} & j|x| \overline{\theta(\hat{x})}^t \\ j|x| \theta(\hat{x}) & j\bar{u}(-j) \cdot \mathbb{1} \end{bmatrix}.$$

Hierbei ist u nun eine Quaternion und $\mathrm{Sp}(2n)$ ist die Gruppe der quaternionalen $2n \times 2n$ -Matrizen A mit $\bar{A}^t A = \mathbb{1}$.

Korollar 2.9. *Die Zuordnung $\mathcal{B}_{\mathrm{O},\mathrm{Sp}}$ stellt für $k \leq n-1$ den Isomorphismus*

$$\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_{k+3}(\mathrm{Sp}(2n))$$

explizit dar.

2.7. Erzeuger der letzten stabilen Gruppen $\pi_{2n-1}(\mathrm{U}(n))$. Aufgrund der Stabilität faktorisiert der Isomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{U}(n)) \rightarrow \pi_{k+1}(\mathrm{SU}(2n))$ durch die Homotopiegruppe $\pi_{k+1}(\mathrm{SU}(n+1))$. Um diese Faktorisierung explizit zu erhalten, betrachten wir die folgende Deformation, die sich in Abschnitt 4.3 systematisch ergeben wird: Es sei M die Menge aller Matrizen in $\mathrm{SU}(n+1)$, deren rechter unterer Eintrag verschwindet. Die Abbildung

$$M \times [0, \pi/2] \rightarrow \mathrm{SU}(n+1), \quad \left(\begin{bmatrix} A & b \\ \bar{c}^t & 0 \end{bmatrix}, t \right) \mapsto \begin{bmatrix} A - b\bar{c}^t \sin t & b \cos t \\ \bar{c}^t \cos t & \sin t \end{bmatrix}.$$

ist eine Homotopie zwischen der Inklusion von M und der Abbildung

$$M \rightarrow \mathrm{SU}(n+1), \quad \begin{bmatrix} A & b \\ \bar{c}^t & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A - b\bar{c}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Werten in $\mathrm{SU}(n)$. Diese Homotopie gibt es in gleicher Form auch in $\mathrm{SO}(n+1)$ und $\mathrm{Sp}(n+1)$. Mit Hilfe dieser Homotopie und der Rechtsmultiplikation von Matrizen aus $\mathrm{SU}(n+1)$, deren Einträge nur aus 0 oder ± 1 bestehen, können wir nun in $n-1$ Schritten den Periodizitätsisomorphismus $\mathcal{B}$ wie gewünscht durch $\pi_{k+1}(\mathrm{SU}(n+1))$ faktorisieren. Auf die gleiche Art und Weise läßt sich der durch $\mathcal{B}_{\mathrm{O},\mathrm{Sp}}$ vermittelte Isomorphismus $\pi_{k-1}(\mathrm{O}(n)) \rightarrow \pi_{k+3}(\mathrm{Sp}(2n))$ durch die Gruppe $\pi_{k+3}(\mathrm{Sp}(n+1))$ faktorisieren.

Indem man den faktorisierten Periodizitätsisomorphismus statt des nicht-faktorisierten iteriert, erhält man Erzeuger aller Homotopiegruppen $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$. Diese haben aufgrund des Konstruktionsverfahrens kaum noch Symmetrie (mit Ausnahme des Erzeugers von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$). In Kapitel 5 werden wir ein ganz anderes Iterationsverfahren angeben, das Erzeuger von $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ liefert und den Zusammenhang zu Nullhomotopien in den Gruppen $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ herstellen.

3. GEOMETRISCHE DARSTELLUNG SPEZIELLER STABILER HOMOTOPIEGRUPPEN

Im folgenden werden Darstellungen der stabilen Gruppen $\pi_4(\mathrm{Sp}(2))$, $\pi_5(\mathrm{Sp}(2))$, $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$, $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$ und $\pi_7(\mathrm{Sp}(3))$ gegeben. Geometrische Ausgangspunkt für die ersten beiden Gruppen ist die Cartaneinbettung von $\mathbb{S}^4$ nach $\mathrm{Sp}(2)$, für die anderen drei Gruppen ein isolierter Orbit in $\mathrm{SU}(3)$, der diffeomorph zu $\mathbb{S}^5$ ist. Dieser führt schließlich zu einem expliziten Erzeuger von $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$, der in Kapitel 8 benutzt wird, um einen neuen Beweis dafür zu geben, daß $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist.

3.1. Die stabilen Homotopiegruppen $\pi_4(\mathrm{Sp}(2))$ und $\pi_5(\mathrm{Sp}(2))$. Jeder symmetrische Raum G/H kann totalgeodätisch in die Liegruppe G eingebettet werden. Im Fall von $\mathbb{S}^4 = \mathbb{HP}^1 = \mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1))$ läßt sich unmittelbar nachrechnen, daß die Cartaneinbettung die einfache Gestalt

$$\chi : \mathbb{S}^4 \rightarrow \mathrm{Sp}(2), \quad \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x & -\bar{u} \\ u & x \end{bmatrix}$$

annimmt, wobei wir $\mathbb{S}^4$ als Einheitssphäre in $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ aufgefaßt haben.

Satz 3.1. *Die obige Cartaneinbettung χ erzeugt $\pi_4(\mathrm{Sp}(2)) \approx \mathbb{Z}_2$.*

Beweis. Wir multiplizieren die Werte der Cartanabbildung mit i . Dadurch wird der obere linke Eintrag der 2×2 -Matrix stets rein imaginär, und die Cartaneinbettung läßt sich, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, in die Untergruppe $\mathrm{Sp}(1) = \mathbb{S}^3$ von $\mathrm{Sp}(2)$ deformieren:

$$\begin{bmatrix} x & -\bar{u} \\ u & x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ix & -i\bar{u} \\ iu & ix \end{bmatrix} \mapsto ix + iu \frac{1}{1+ix} i\bar{u} = \frac{i}{1+x^2} (2x + ui\bar{u}).$$

Die Formel ganz rechts stellt in glatter Weise die Einhängung der üblichen Hopffaserung $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathrm{Im} \mathbb{H}$, $q \mapsto qi\bar{q}$ dar. Es ist bekannt, daß diese Einhängung $\pi_4(\mathbb{S}^3)$ erzeugt. Der Beweis ist nun komplett, da die Inklusion $\mathrm{Sp}(1) \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ einen Isomorphismus zwischen den vierten Homotopiegruppen induziert ($\pi_4(\mathrm{Sp}(1))$ ist stabil). $\square$

Korollar 3.2. *Die stabile Gruppe $\pi_5(\mathrm{Sp}(2)) \approx \mathbb{Z}_2$ wird von der Verknüpfung der doppelten Einhängung $\Sigma^2 h : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathbb{S}^4$ der Hopffaserung h mit der Cartaneinbettung $\chi : \mathbb{S}^4 \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ erzeugt.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der wohlbekannten Tatsache, daß $\pi_5(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_2$ von $\Sigma h \circ \Sigma^2 h = \Sigma(h \circ \Sigma h)$ erzeugt wird. $\square$

Die Abbildung

$$\chi^{-1} : \mathbb{S}^4 \rightarrow \mathrm{Sp}(2), \quad \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \mapsto \chi\left(\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}\right)^{-1} = \chi\left(\begin{bmatrix} x \\ -u \end{bmatrix}\right),$$

bildet in natürlicher Weise das zum Erzeuger χ inverse Element der Homotopiegruppe $\pi_4(\mathrm{Sp}(2))$ und folgerichtig bildet die Abbildung

$$(\chi \circ \Sigma^2 h)^{-1} = \chi^{-1} \circ \Sigma^2 h$$

das zum Erzeuger $\chi \circ \Sigma^2 h$ inverse Element der Homotopiegruppe $\pi_5(\mathrm{Sp}(2))$. Da $\pi_4(\mathrm{Sp}(2))$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ ist, ist unmittelbar klar, daß χ und χ^{-1} homotop zueinander sind. Das folgende Lemma liefert eine explizite Isotopie zwischen den beiden Einbettungen.

Lemma 3.3. *Die Diffeotopien*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^4 \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{S}^4, & \left(\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, t\right) &\mapsto \begin{bmatrix} x \\ e^{it}u \end{bmatrix}, \\ F : \mathrm{Sp}(2) \times [0, \pi] &\rightarrow \mathrm{Sp}(2), & (A, t) &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{it} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

induzieren beide die Isotopie $\chi \circ f = F \circ (\chi, \mathrm{id})$ zwischen χ und χ^{-1} .

3.2. Ein minimaler Erzeuger von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$. Zwei spezielle Strukturen sind eng mit dem minimalen Erzeuger von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$ verbunden, der in diesem Abschnitt vorgestellt wird: Das komplexe Kreuzprodukt und die transitive Operation von G_2 auf $\mathbb{S}^6$, deren Standgruppe $\mathrm{SU}(3)$ ist.

Das komplexe Kreuzprodukt zweier Vektoren $z, w \in \mathbb{C}^3$ ist definiert durch

$$z \times w = \begin{bmatrix} \bar{z}_2 \bar{w}_3 - \bar{z}_3 \bar{w}_2 \\ \bar{z}_3 \bar{w}_1 - \bar{z}_1 \bar{w}_3 \\ \bar{z}_1 \bar{w}_2 - \bar{z}_2 \bar{w}_1 \end{bmatrix}.$$

Sind z und w hermitesch senkrechte Einheitsvektoren, so ist $z \times w$ der eindeutig bestimmte Vektor, für den die komplexe 3×3 -Matrix $(z, w, z \times w)$ in $\mathrm{SU}(3)$ enthalten ist. Aus dieser fundamentalen Eigenschaft des Kreuzproduktes folgt unmittelbar

$$(3) \quad (A \cdot z) \times (A \cdot w) = A \cdot (z \times w)$$

für alle $A \in \mathrm{SU}(3)$ und $z, w \in \mathbb{C}^3$.

Mit Hilfe des komplexen Kreuzproduktes läßt sich nun wie folgt eine Einbettung $\eta : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ definieren: Für jedes $z \in \mathbb{S}^5$ setzt man $\eta(z) \cdot \bar{z} = z$ und $\eta(z) \cdot \bar{w} = z \times w$, falls w hermitesch senkrecht zu z ist. Dies führt direkt zu der folgenden Formel für η :

$$\eta(z) = zz^t + \begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}_3 & \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 & 0 & -\bar{z}_1 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Satz 3.4. *Die Einbettung $\eta : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ erzeugt $\pi_5(\mathrm{SU}(3)) \approx \mathbb{Z}$.*

Beweis. Die Komposition von η mit der Projektion $\mathrm{SU}(3) \rightarrow \mathbb{S}^5$, die einer Matrix eine ihrer Spalten zuordnet, liefert eine Selbstabbildung von $\mathbb{S}^5$ mit Abbildungsgrad 2. Gemäß Lemma 5.1 erzeugt η daher $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$. $\square$

Aus der Eigenschaft (3) folgt direkt, daß η äquivariant hinsichtlich der Standardoperation von $\mathrm{SU}(3)$ auf $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{C}^3$ und der durch $(A, B) \mapsto ABA^t$ gegebenen Operation von $\mathrm{SU}(3)$ auf sich selbst ist. Die Orbitstruktur der letzteren Operation läßt sich mittels der Geodätischen

$$c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

in $\mathrm{SU}(3)$ beschreiben. Der Orbit durch $c(0) = \mathbb{1}$ ist diffeomorph zum symmetrischen Raum $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$ und besteht genau aus allen symmetrischen Matrizen in $\mathrm{SU}(3)$. Die Geodätische c schneidet diesen Orbit senkrecht und damit auch die Orbits durch $c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn nach dem Satz von Clairaut ist das Skalarprodukt des Tangentialvektors einer Geodätischen mit einem Killingfeld eine Konstante. Die Orbits durch $c(t)$ sind für $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ diffeomorph zum 7-dimensionalen Alloff-Wallach-Raum $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(2)$. Schließlich ergibt sich

$$c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \eta\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Aufgrund der Äquivarianz von η parametrisiert η somit einen isolierten singulären Orbit durch $c(\frac{\pi}{2})$. Da isolierte Orbits minimale Untermannigfaltigkeiten sind (im in der Geometrie üblichen Sinn, daß sie kritische Punkte für das Volumenfunktional darstellen) [Hs-La], folgt:

Satz 3.5. *Die Einbettung η parametrisiert eine minimale 5-Sphäre in $\mathrm{SU}(3)$.*

Die Einbettung η kann dazu benutzt werden, die Hopffaserung $\mathbb{S}^5 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ zur Selbstabbildung $A \mapsto A \cdot \bar{A}$ von $\mathrm{SU}(3)$ fortzusetzen. Multipliziert man nämlich η und $\bar{\eta}$ Wert für Wert, so erhält man die Abbildung

$$\eta \cdot \bar{\eta} : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3), \quad z \mapsto 2z\bar{z}^t - \mathbb{1}.$$

Dies ist die gebräuchliche totalgeodätische Cartaneinbettung von $\mathbb{CP}^2$ in $\mathrm{SU}(3)$. Daß die Abbildung $\eta \cdot \bar{\eta}$ nullhomotop ist, folgt aus Korollar 2.3 oder alternativ direkt aus der Struktur des Orbitraums der Operation von $\mathrm{SU}(3)$ auf sich selbst durch Konjugation.

Bemerkung 3.6. Der Erzeuger η kann auch durch horizontales Liften der vom Nordpol ausgehenden Geodätischen von $\mathbb{S}^6$ nach G_2 analog zu den Erzeugern von $\pi_6(G_2)$, $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ und $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ in den folgenden Kapiteln gewonnen werden. Durch

diese Liftung erhält man nämlich das Bild von $\text{id}_{\mathbb{S}^6}$ unter der Randabbildung in der exakten Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_6(\mathbb{G}_2) & \longrightarrow & \pi_6(\mathbb{S}^6) & \longrightarrow & \pi_5(\text{SU}(3)) & \longrightarrow & \pi_5(\mathbb{G}_2) \\ \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 \end{array}$$

Dies erfordert allerdings sorgfältige Identifikationen.

3.3. Die stabilen Homotopiegruppen $\pi_7(\text{Sp}(2))$ und $\pi_7(\text{Sp}(3))$. Die Homotopiegruppe $\pi_7(\text{Sp}(2))$ ist die erste stabile Homotopiegruppe in der Serie $\pi_7(\text{Sp}(n))$. Explizite Erzeuger von $\pi_7(\text{Sp}(n))$ waren bisher nur für $n \geq 4$ bekannt. Wir erhalten einen expliziten Erzeuger von $\pi_7(\text{Sp}(2))$. Eine solche Abbildung ist aus verschiedenen Gründen interessant:

- Der von uns erhaltenen Erzeuger liefert einen neuen Beweis für die fundamentale Tatsache, daß $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist (siehe Kapitel 8), und hat direkten Bezug zu dem Problem, wie der Kommutator der Quaternionen in zwölfter Potenz nullhomotop wird (siehe Kapitel 9).
- Die Gruppe $\text{Sp}(2)$ ist das quaternionale Analogon zu $\text{U}(2)$. In $\text{U}(2)$ erzeugt die Untergruppe $\text{SU}(2)$, die diffeomorph zu $\mathbb{S}^3$ ist, die Homotopiegruppe $\pi_3(\text{U}(2))$. Da quaternionen-wertige Determinanten nicht existieren, gibt es keine direkt entsprechende Untergruppe von $\text{Sp}(2)$. Gäbe es diese, so wäre sie reell 7-dimensional. Ein Erzeuger von $\pi_7(\text{Sp}(2))$ ist somit das, was in $\text{Sp}(2)$ an die Stelle der Untergruppe $\text{SU}(2)$ von $\text{U}(2)$ tritt¹.

Wir werden nun zunächst einen Erzeuger von $\pi_7(\text{Sp}(3))$ konstruieren. Dazu verwenden wir den Erzeuger η von $\pi_5(\text{SU}(3))$ und multiplizieren ihn mit seinem Transponierten. Nach Korollar 2.3 ist η^t homotop zu η . Die entstandene Abbildung $\eta \cdot \eta^t$ repräsentiert somit das zweite Element von $\pi_5(\text{SU}(3))$. Ihre Werte sind symmetrisch. Wenden wir nun den expliziten Periodizitätsisomorphismus $\mathcal{B}$ der unitären Gruppen aus Abschnitt 2.3 an, so erhalten wir die durch

$$\xi' \left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{1+|y|^2} (2y \mathbb{1} + j|z|^2 \eta \left(\frac{z}{|z|} \right) \eta \left(\frac{z}{|z|} \right)^t)$$

gegebene Abbildung $\mathbb{S}^7 \rightarrow \text{Sp}(3)$, wobei hier $y \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^3$ mit $|y|^2 + |z|^2 = 1$ sind und wir $\text{Sp}(3)$ als Gruppe der symplektischen 3×3 -Matrizen C mit $C^t C = \mathbb{1}$ ansehen, die vermöge $A + jB \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ in $\text{SU}(6)$ eingebettet ist. Wir haben dabei eine leichte Modifikation an der Formel für $\mathcal{B}(\eta \cdot \eta^t)$ vorgenommen, die eine stetig-differenzierbare Abbildung ergibt.

Lemma 3.7. *Die Abbildung $\xi' : \mathbb{S}^7 \rightarrow \text{Sp}(3)$ erzeugt $\pi_7(\text{Sp}(3))$.*

Beweis. Nach Konstruktion repräsentiert ξ' das zweite Element in $\pi_7(\text{SU}(6))$. Die Aussage folgt nun aus der exakten Homotopiesequenz des Hauptfaserbündels $\text{SU}(6) \rightarrow \text{SU}(6)/\text{Sp}(3)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_7(\text{Sp}(3)) & \longrightarrow & \pi_7(\text{SU}(6)) & \longrightarrow & \pi_7(\text{SU}(6)/\text{Sp}(3)) & \longrightarrow & \pi_6(\text{SU}(6)) \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}_2 & & 0 \end{array}$$

Alle hier auftretenden Homotopiegruppen sind stabil (siehe Kapitel 2). $\square$

¹Der naive Versuch, in der Parametrisierung $\begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}$ von $\text{SU}(2)$ durch zwei komplexe Zahlen mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$ zu quaternionalen Zahlen überzugehen, scheitert sofort an der Nicht-Kommutativität der Quaternionen.

Die Abbildung ξ' nimmt Werte der Gestalt $w \mathbb{1} + jB$ an, wobei B eine komplexe 3×3 -Matrix ist. Wir verketten ξ' nun mit der Deformation

$$pr_{\mathrm{Sp}(2)} : \begin{bmatrix} \bar{v}^t & p \\ A & u \end{bmatrix} \mapsto A - u \frac{1}{1+p} \bar{v}^t$$

von der Menge der Matrizen in $\mathrm{Sp}(3)$, deren oberer rechter Eintrag rein imaginär ist, auf die Untergruppe $\mathrm{Sp}(2)$. Diese Deformation wird (bis auf Multiplikation der Ausgangsmatrix mit $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ von rechts) in Abschnitt 4.3 hergeleitet. Aufgrund der Konstruktion gilt:

Satz 3.8. *Die Abbildung $\xi := pr_{\mathrm{Sp}(2)} \circ \xi' : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ erzeugt $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$.*

In Kapitel 8 werden wir sehen, daß die erste Spalte von ξ eine Selbstabbildung von $\mathbb{S}^7$ mit Abbildungsgrad 12 liefert und auf die Weise einen neuen Beweis von $\pi_6(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_{12}$ erhalten.

4. ERZEUGER SPEZIELLER HOMOTOPIEGRUPPEN DER KLASSISCHEN GRUPPEN DURCH LIFTEN VON GEODÄTISCHEN

Die klassischen Gruppen $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{Sp}(n)$ sind allesamt Hauptfaserbündel über Sphären:

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &\rightarrow \mathrm{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^n, \\ \mathrm{SU}(n) &\rightarrow \mathrm{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}, \\ \mathrm{Sp}(n) &\rightarrow \mathrm{Sp}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3}. \end{aligned}$$

Die geometrischste Art, lokale Trivialisierungen dieser Bündel zu erhalten, besteht darin, die Gruppen mit linksinvarianten Riemannschen Metriken zu versehen, die die Standardmetriken auf den Sphären induzieren, und dann die vom Nordpol der Sphären ausgehenden Geodätischen horizontal zu liften. Im Fall von $\mathrm{Sp}(2)$ wurde dies kürzlich Carlos Duran [Du] durchgeführt, der beobachtet hat, daß die horizontalen Lifts gleichzeitig auch horizontale Lifts der exotischen Gromoll-Meyer-Sphäre sind und auf diese Weise eine explizite Formel für einen exotischen Diffeomorphismus von $\mathbb{S}^6$ erhalten hat. Wir werden hier alle kompakten klassischen Gruppen behandeln. Aus dieser Liftungskonstruktion ergeben sich Erzeuger der Homotopiegruppen $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ und $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ sowie einige explizite Homotopien.

4.1. Das horizontale Liften von Geodätischen. Zunächst betrachten wir die symplektischen Gruppen. Die Gruppe $\mathrm{Sp}(n+1)$ besteht aus allen quaternionalen $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen A mit $\bar{A}^t A = \mathbb{1}$. Diese Gruppe operiert in natürlicher Weise transitiv auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{4n+3}$ in $\mathbb{H}^{n+1}$. Der zugehörige Diffeomorphismus $\mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3}$ wird vermittelt durch die Projektionsabbildung $\mathrm{Sp}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3}$, die einer Matrix ihre erste Spalte zuordnet. Die linksinvariante Riemannsche Metrik auf der Gruppe $\mathrm{Sp}(n+1)$, die vermöge Riemannscher Submersion die Standardmetrik auf $\mathbb{S}^{4n+3}$ induziert, ist durch das $\mathrm{Ad}(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n))$ -invariante Skalarprodukt

$$(4) \quad \left\langle \begin{bmatrix} p & -\bar{u}^t \\ u & U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q & -\bar{v}^t \\ v & V \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^{4n+3}} - \mathrm{Re}(\mathrm{Spur} UV)$$

auf der Liealgebra $\mathfrak{sp}(n+1)$ gegeben. Hierbei sind p, q rein imaginäre Quaternionen, u, v Vektoren in $\mathbb{H}^n$ und U, V Matrizen in $\mathfrak{sp}(n)$. Wir betrachten nun die vom

Nordpol ausgehende Geodätische

$$\gamma(t) = \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{S}^{4n+3}$, wobei $p \in \text{Im } \mathbb{H}$ und $u \in \mathbb{H}^n$ sind und $|p|^2 + |u|^2 = 1$ gilt. Der Vektor $\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}$ liegt also in der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{4n+2}$. Weiter sei für $u \neq 0$

$$(5) \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - \frac{u}{|u|} \frac{\bar{u}^t}{|u|} \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{u}{|u|} e^{tp} \frac{\bar{u}^t}{|u|} \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} p & -e^{tp} \bar{u}^t \\ u & -\frac{u}{|u|} p e^{tp} \frac{\bar{u}^t}{|u|} \end{bmatrix},$$

wobei $e^p = \cos |p| + \frac{p}{|p|} \sin |p|$ die Exponentialabbildung von $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ vom Punkt 1 aus bezeichnet.

Lemma 4.1. *Die Kurve $\tilde{\gamma}$ ist der durch die Bedingung $\tilde{\gamma}(0) = \mathbb{1}$ eindeutig bestimmte horizontale Lift von γ zu einer Abbildung mit Werten in $\text{Sp}(n+1)$. Insbesondere ist $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische und die obige Formel für $\tilde{\gamma}$ setzt sich in eindeutiger Weise analytisch auf den Fall $u = 0$ fort.*

Beweis. Man rechnet direkt nach, daß

$$\tilde{\gamma}(t)^{-1} \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} p & -e^{tp} \bar{u}^t \\ u e^{-tp} & 0 \end{bmatrix}$$

ist, also stets senkrecht zur Lieunteralgebra $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{sp}(n+1)$ ist. Da horizontale Lifts von Geodätischen wieder Geodätische sind, ist die Kurve $\tilde{\gamma}$ eine Geodätische in $\text{Sp}(n+1)$. $\square$

Auf vollkommen analoge Weise erhält man die horizontalen Lifts von Geodätischen in $\mathbb{S}^{2n+1}$ nach $\text{U}(n+1)$ und von Geodätischen in $\mathbb{S}^n$ nach $\text{SO}(n+1)$. Der einzige etwas kompliziertere Fall ist der der speziellen unitären Gruppen. In $\text{SU}(n+1)$ erhält man

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - \frac{z}{|z|} \frac{\bar{z}^t}{|z|} \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{z}{|z|} e^{iyt} \frac{\bar{z}^t}{|z|} \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} iy & -e^{iyt} \bar{z}^t \\ z & -\frac{z}{|z|} iy e^{iyt} \frac{\bar{z}^t}{|z|} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-iyt/n} \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

als den horizontalen Lift der Geodätischen

$$\gamma(t) = \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin t \begin{bmatrix} iy \\ z \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{S}^{2n+1}$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}^n$, $|y|^2 + |z|^2 = 1$. Eine direkte Rechnung zeigt nämlich, daß

$$\tilde{\gamma}(t)^{-1} \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{iyt/n} \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} iy & -e^{iyt} \bar{z}^t \\ z e^{-iyt} & -iy \frac{1}{n} \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-iyt/n} \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

ist, also stets senkrecht zur Lieunteralgebra $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{su}(n+1)$ ist.

4.2. Lokale Trivialisierungen. Die horizontalen Lifts aus (5) liefern in ihrer Gesamtheit die Riemannsche Exponentialabbildung $\widetilde{\exp}$ von $\text{Sp}(n+1)$ in der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ eingeschränkt auf den Horizontalraum der Faserung $\text{Sp}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3}$. Schränkt man diese Exponentialabbildung weiterhin auf den offenen Ball $B^{4n+3}(\pi)$ mit Radius π im Horizontalraum ein, so erhält man offensichtlich einen lokalen Schnitt des Hauptfaserbündels $\text{Sp}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3}$ und damit auf wohlbekannte Weise die folgende lokale Trivialisierung von $\text{Sp}(n+1)$:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(n) \times B^{4n+3}(\pi) &\rightarrow \text{Sp}(n+1) \\ (A, x) &\mapsto \widetilde{\exp}(x) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Das Bild dieser Abbildung besteht aus den Matrizen B in $\mathrm{Sp}(n+1)$, deren erste Spalte nicht der Südpol $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist. Die Umkehrabbildung ist wie folgt gegeben: Einer Matrix B wird zunächst der Vektor $x \in B^{4n+3}(\pi)$ zugeordnet, der unter der Exponentialabbildung von $\mathbb{S}^{4n+3}$ auf die erste Spalte von B abgebildet wird, zum anderen dann die Matrix $(\widetilde{\exp}(x))^{-1} \cdot B \in \mathrm{Sp}(n)$. Auf gleiche Weise erhält man lokale Trivialisierungen der anderen klassischen Gruppen.

4.3. Erste Anwendung: Deformation spezieller Matrizen. Es sei M die Menge aller Matrizen in $\mathrm{Sp}(n+1)$ (oder analog in $\mathrm{U}(n+1)$ oder $\mathrm{SO}(n+1)$), deren oberer linker Eintrag rein imaginär ist. Diese Matrizen lassen sich in die Untergruppe $\mathrm{Sp}(n)$ deformieren, genauer gesagt hat man die Homotopie

$$[0, \pi/2] \times M \rightarrow \mathrm{Sp}(n+1), \quad (t, \begin{bmatrix} p & \bar{v}^t \\ u & A \end{bmatrix}) \mapsto \widetilde{\exp}(t \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p & \bar{v}^t \\ u & A \end{bmatrix}$$

zwischen der Inklusionsabbildung $M \hookrightarrow \mathrm{Sp}(n+1)$ und der Abbildung

$$M \rightarrow \mathrm{Sp}(n+1), \quad \begin{bmatrix} p & \bar{v}^t \\ u & A \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A - \frac{u}{|u|} \left(p + e^{-p\pi/2} \right) \frac{\bar{v}^t}{|v|} \end{bmatrix}.$$

Nun ist die exponentielle Parametrisierung $p \mapsto e^{-p\pi/2}$ der Sphäre $\mathbb{S}^3$ homotop (rel $p=0$ und $|p|=1$) zu der rationalen Parametrisierung (stereographische Projektion)

$$p \mapsto \frac{1-p}{1+p} = \frac{1-|p|^2}{1+|p|^2} - \frac{2p}{1+|p|^2},$$

da die Werte beider Parametrisierungen bei gleichem Argument offensichtlich nie antipodal sind. Wendet man beide gerade beschriebenen Homotopien nacheinander an, so erhält man insgesamt eine Homotopie zwischen der Inklusionsabbildung $M \hookrightarrow \mathrm{Sp}(n+1)$ und der Abbildung

$$M \rightarrow \mathrm{Sp}(n+1), \quad \begin{bmatrix} p & \bar{v}^t \\ u & A \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A - u \frac{1}{1+p} \bar{v}^t \end{bmatrix},$$

d. h. man hat die Matrizen aus M in die Untergruppe $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{Sp}(n+1)$ deformiert. Diese Deformation wird an verschiedenen Stellen in dieser Arbeit benutzt werden.

4.4. Zweite Anwendung: Erzeuger von Homotopiegruppen. Schränkt man die obige Riemannsche Exponentialabbildung $\widetilde{\exp}$ von $\mathrm{Sp}(n+1)$ auf die Sphäre $\mathbb{S}^{4n+2}(\pi)$ im Horizontalraum ein, so nimmt diese aufgrund der Liftungskonstruktion Werte der Form $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ mit $A \in \mathrm{Sp}(n)$ an. Man erhält somit die Abbildung

$$(6) \quad \psi : \mathbb{S}^{4n+2} \rightarrow \mathrm{Sp}(n), \quad \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \mapsto \mathbb{1} - \frac{u}{|u|} (1 + e^{\pi p}) \frac{\bar{u}^t}{|u|},$$

wobei wir hier im Definitionsbereich zur Einheitssphäre übergegangen sind. Analog liefert Einschränkung der Exponentialabbildung von $\mathrm{SU}(n+1)$ auf die Sphäre $\mathbb{S}^{2n}(\pi)$ im Horizontalraum die Abbildung

$$\phi' : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{U}(n), \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto e^{-i\pi y/n} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{z}{|z|} (1 + e^{i\pi y}) \frac{\bar{z}^t}{|z|} \right).$$

Diese nimmt Werte mit Determinante -1 an. Um eine Abbildung mit Werten in $\mathrm{SU}(n)$ zu erhalten, ist es zweckmäßig mit $e^{-i\pi/n}$ zu multiplizieren:

$$(7) \quad \phi : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n), \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto e^{-i\pi(y+1)/n} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{z}{|z|} (1 + e^{i\pi y}) \frac{\bar{z}^t}{|z|} \right).$$

Lemma 4.2. *Die obigen Abbildungen ψ und ϕ erzeugen die Homotopiegruppen $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ beziehungsweise $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$.*

Beweis. Aufgrund der Liftungskonstruktion repräsentieren die Abbildungen ψ und ϕ die Bilder der Identitäten $\text{id}_{\mathbb{S}^{4n+3}}$ und $\text{id}_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ unter den Randabbildungen ∂ in den exakten Homotopiesequenzen der Bündel $\text{Sp}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3}$ und $\text{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ (siehe z. B. [Br], Seite 452):

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbb{Z} \approx \pi_{4n+3}(\mathbb{S}^{4n+3}) &\xrightarrow{\partial} \pi_{4n+2}(\text{Sp}(n)) \longrightarrow \pi_{4n+2}(\text{Sp}(n+1)) \approx 0 \\ \mathbb{Z} \approx \pi_{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) &\xrightarrow{\partial} \pi_{2n}(\text{SU}(n)) \longrightarrow \pi_{2n}(\text{SU}(n+1)) \approx 0, \end{aligned}$$

Hierbei sind die beiden rechten Homotopiegruppen stabil (siehe Kapitel 2). $\square$

Schließlich ergibt Einschränkung der Exponentialabbildung von $\text{SO}(n+1)$ auf die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}(\pi)$ im Horizontalraum die klassische Cartaneinbettung

$$(9) \quad \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{O}(n), \quad x \mapsto \mathbb{1} - 2xx^t$$

von $\mathbb{RP}^{n-1}$. Für $n = 3, 5, 6, 7 \pmod 8$ erzeugt diese Abbildung die Homotopiegruppe $\pi_{n-1}(\text{O}(n))$, da in diesen Fällen die stabile Gruppe $\pi_{n-1}(\text{O}(n+1))$ trivial ist.

4.5. Explizite Homotopien zwischen den Erzeugern. Die Geometrie der Bündel vermittelt explizite Homotopien zwischen den oben gewonnenen Erzeugern.

Lemma 4.3. *Die Abbildungen $\psi : \mathbb{S}^{4n+2} \rightarrow \text{Sp}(n)$ und $\phi' : \mathbb{S}^{4n+2} \rightarrow \text{U}(2n+1)$ sind homotop zueinander als Abbildungen mit Werten in den unitären Matrizen mit Determinante -1 .*

Beweis. Aus der Bündelinklusion

$$\begin{array}{ccc} \text{Sp}(n) & \longrightarrow & \text{SU}(2n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sp}(n+1) & \longrightarrow & \text{SU}(2n+2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^{4n+3} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^{4n+3} \end{array}$$

folgt, daß für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{\text{exp}}_{\text{Sp}}(t \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) \in \widetilde{\text{exp}}_{\text{SU}}(t \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{SU}(2n+1) \end{bmatrix}$$

gilt. Aufgrund dieser Tatsache nimmt die Homotopie

$$H(t, \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) = \widetilde{\text{exp}}_{\text{SU}}(\pi \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) \cdot \widetilde{\text{exp}}_{\text{SU}}(t \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix})^{-1} \cdot \widetilde{\text{exp}}_{\text{Sp}}(t \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix})$$

Werte in $\text{U}(2n+1)$ mit Determinante -1 an. Es gilt nun

$$\begin{aligned} H(0, \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) &= \widetilde{\text{exp}}_{\text{SU}}(\pi \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) = \phi'(\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}), \\ H(\pi, \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) &= \widetilde{\text{exp}}_{\text{Sp}}(\pi \cdot \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}) = \psi(\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}), \end{aligned}$$

und somit ist H die gewünschte Homotopie. $\square$

Korollar 4.4. *Die Abbildungen $\psi : \mathbb{S}^{4n+2} \rightarrow \text{Sp}(n)$ und $\phi : \mathbb{S}^{4n+2} \rightarrow \text{SU}(2n+1)$ sind homotop zueinander in $\text{SU}(2n+1)$.*

Beweis. Geht man von H zu $-H$ über, so erhält man eine Homotopie zwischen $-e^{i\pi/n}\phi$ und $-\psi$ mit Werten in $\text{SU}(2n+1)$. Nun ist $-e^{i\pi/n}\mathbb{1}$ in $\text{SU}(2n+1)$ mit $\mathbb{1}$ durch einen Weg verbindbar und ebenso $-\mathbb{1}$ in $\text{Sp}(n)$ mit $\mathbb{1}$. $\square$

4.6. Die weiteren Elemente der Homotopiegruppen. Um die weiteren Elemente der Homotopiegruppen $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ und $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ darzustellen, bieten sich mehrere Möglichkeiten an. Wir werden hier sehen, daß die zwei natürlichsten davon zum selben Ergebnis führen: Zum einen kann man die Gruppenstruktur im Wertebereich der Erzeuger ausnutzen, indem man von ψ und ϕ zu ψ^m und ϕ^m übergeht, die dann das m -te Element der jeweiligen Homotopiegruppe repräsentieren. Die andere Möglichkeit ergibt sich aus den Sequenzen (8). Das Bild einer Selbstabbildung der Sphäre $\mathbb{S}^{4n+3}$ bzw. $\mathbb{S}^{2n+1}$ mit Abbildungsgrad m unter der Randabbildung ∂ liefert das m -te Element der jeweiligen Homotopiegruppen von $\mathrm{Sp}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$. Da es sich bei $\mathbb{S}^{4n+3}$ und $\mathbb{S}^{2n+1}$ um Sphären ungerader Dimension handelt, bieten sich spezielle Abbildungen mit Abbildungsgrad m an, nämlich die geodätischen Ver- m -fachungen f_m , bei denen man einen Punkt $c(t)$ auf einer vom Nordpol ausgehenden Geodätischen c auf den Punkt $c(mt)$ abbildet (diese Abbildungen sind wohldefiniert, und es ist leicht nachzuweisen, daß sie bei Sphären ungerader Dimension Abbildungsgrad m besitzen, bei Sphären gerader Dimension jedoch Abbildungsgrad 0 oder 1). Die Ver- m -fachung f_m induziert im Fall der symplektischen Gruppen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{S}^{4n+2}(\pi) & \xrightarrow{\times m} & \mathbb{S}^{4n+2}(m\pi) & \xrightarrow{\exp} & \mathrm{Sp}(n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
D^{4n+3}(\pi) & \xrightarrow{\times m} & D^{4n+3}(m\pi) & \xrightarrow{\exp} & \mathrm{Sp}(n+1) \\
\downarrow \exp & & \exp \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{S}^{4n+3} & \xrightarrow{f_m} & \mathbb{S}^{4n+3} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^{4n+3}
\end{array}$$

indem die Abbildung in der obersten Zeile offensichtlich $\partial(f_m) \in \pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ repräsentiert. Für die (speziell) unitären Gruppen ergibt sich ein analoges Diagramm.

Lemma 4.5. *Die Abbildung aus der obersten Zeile in dem vorstehenden Diagramm ist die Abbildung ψ^m .*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Gestalt der horizontalen Geodätischen in Abschnitt 4.1: Berechnen wir in (5) $\tilde{\gamma}(m\pi)$, so ergibt sich unten rechts die $n \times n$ -Matrix

$$\psi^m\left(\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}\right) = \mathbb{1} - \frac{u}{|u|} \frac{\bar{u}^t}{|u|} + (-1)^m \frac{u}{|u|} e^{m\pi p} \frac{\bar{u}^t}{|u|}. \quad \square$$

Die beiden oben beschriebenen Möglichkeiten, das k -te Element der Homotopiegruppen $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ und $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ darzustellen, führen somit auf dasselbe Ergebnis.

5. AN DER GRENZE ZWISCHEN STABILITÄT UND INSTABILITÄT

In diesem Kapitel erläutern wir den Zusammenhang zwischen Erzeugern der letzten stabilen Homotopiegruppen $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ beziehungsweise $\pi_{4n-1}(\mathrm{Sp}(n))$ und nicht-trivialen Nullhomotopien in den nicht-stabilen Homotopiegruppen $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ und $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$. Abschließend geben wir mit Vorgriff auf Kapitel 6 ein Verfahren an, mit dem spezielle Erzeuger von $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ und Nullhomotopien in $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ iterativ gewonnen werden können.

5.1. Die exakten Homotopiesequenzen. Der Zusammenhang zwischen den letzten stabilen Homotopiegruppen $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ bzw. $\pi_{4n-1}(\mathrm{Sp}(n))$ und den nicht-stabilen Homotopiegruppen $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ und $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ wird durch die exakten Homotopiesequenzen vermittelt:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) & \longrightarrow & \pi_{2n-2}(\mathrm{SU}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{2n-2}(\mathrm{SU}(n)) \\ \pi_{4n-1}(\mathrm{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{4n-1}) & \longrightarrow & \pi_{4n-2}(\mathrm{Sp}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{4n-2}(\mathrm{SU}(n)) \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

Dabei haben wir die Werte der stabilen Homotopiegruppen angegeben. Aus den Sequenzen ist sofort klar, daß die Homotopiegruppen $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ und $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$ zyklisch sind. Ihre Ordnungen seien im folgenden mit a_n und c_n bezeichnet. Es gilt:

$$a_n = n!, \quad c_n = \begin{cases} (2n+1)!, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 2 \cdot (2n+1)!, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Der Wert von a_n wurde von Bott [Bt1] bestimmt: Bott zeigte als Verbesserung eines Ergebnisses von Borel und Hirzebruch [Bo-Hi], daß das Bild von $\pi_{2n}(BU)$ in $H_{2n}(BU)$ genau durch $(n-1)!$ teilbar ist. Der Wert von c_n ergibt sich nun unmittelbar aus der Homotopieleiter der Bündelinklusion

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sp}(n-1) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n-1) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n-1)/\mathrm{Sp}(n-1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sp}(n) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^{4n-1} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^{4n-1} & \longrightarrow & * \end{array}$$

wobei die relevante Homotopiegruppe $\pi_{4n-1}(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n))$ des symmetrischen Raums $\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$ stabil ist und damit isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, wenn n gerade ist, und trivial, wenn n ungerade ist.

In Kapitel 6 werden wir eine explizite Nullhomotopie der n -ten Potenz eines a_{n-1} -ten Elements von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ angeben und damit einen elementaren induktiven Beweis dafür geben, daß a_n die Zahl $n!$ teilt.

5.2. Erzeuger der letzten stabilen Gruppen. Wir formulieren die Information, die die exakte Homotopiesequenz liefert, noch einmal um. Dazu bezeichne pr_j die Projektion einer komplexen oder quaternionalen Matrix auf ihre j -te Spalte. Diese Projektion induziert Abbildungen $\mathrm{U}(n) \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ und $\mathrm{Sp}(n) \rightarrow \mathbb{S}^{4n-1}$.

Lemma 5.1. *Eine Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathrm{U}(n)$ ist genau dann ein Erzeuger von $\pi_{2n-1}(\mathrm{U}(n))$, wenn der Abbildungsgrad von $pr_1 \circ \theta$ gleich $\pm a_{n-1}$ ist.*

Lemma 5.2. *Eine Abbildung $\theta : \mathbb{S}^{4n-1} \rightarrow \mathrm{Sp}(n)$ ist genau dann ein Erzeuger von $\pi_{4n-1}(\mathrm{Sp}(n))$, wenn der Abbildungsgrad von $pr_1 \circ \theta$ gleich $\pm c_{n-1}$ ist.*

Wir haben Lemma 5.1 bereits eingesetzt, um nachzuweisen, daß die Einbettung η aus Abschnitt 3.2 ein Erzeuger von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$ ist. In Kapitel 8 werden wir Lemma 5.2 in umgekehrter Richtung benutzen und einen elementaren Beweis dafür geben, daß $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist.

5.3. Spezielle Erzeuger. Es ist nun sinnvoll, zu untersuchen, welche Selbstabbildungen von Sphären durch Erzeuger entstehen, die durch ihre Geometrie oder Symmetrie ausgezeichnet sind, und umgekehrt, ob man mittels ausgezeichneter Selbstabbildungen der Sphären Erzeuger konstruieren kann. Dazu bieten sich die geodätischen Ver- m -fachungen an, bei denen man einen Punkt $c(t)$ auf einer vom Nordpol ausgehenden Geodätischen c auf den Punkt $c(mt)$ abbildet. Diese Abbildungen sind wohldefiniert und verallgemeinern das Potenzieren $x \mapsto x^m$ in $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ und $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{O}$. Es ist leicht nachzuweisen, daß die geodätische Ver- m -fachung bei Sphären ungerader Dimension Abbildungsgrad m besitzen, bei Sphären gerader Dimension jedoch Abbildungsgrad 0 oder 1. Es gibt nun stets Erzeuger von $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ und $\pi_{4n-1}(\mathrm{Sp}(n))$, deren erste Spalten die geodätische Ver- a_{n-1} -fachung von $\mathbb{S}^{2n-1}$ bzw. die geodätische Ver- c_{n-1} -fachung von $\mathbb{S}^{4n-1}$ sind, da zwei Selbstabbildungen der Sphären mit gleichem Abbildungsgrad zueinander homotop sind und man Homotopien liften kann, sofern man eine der beiden Abbildungen an den Enden des Deformationsintervalls liften kann. Die Komponenten der geodätischen Ver- m -fachungen der Sphären sind homogene Polynome in den reellen Koordinaten der Sphären. Eine längere, rein algebraische Rechnung zeigt nun

Lemma 5.3. *Es gibt keinen Erzeuger von $\pi_5(\mathrm{SU}(3)) \approx \mathbb{Z}$, dessen Matrixeinträge aus homogenen Polynomen zweiten Grades mit komplexen Koeffizienten in sechs reellen Veränderlichen bestehen.*

Man kann somit auch nicht erwarten, daß die Erzeuger der anderen hier betrachteten Homotopiegruppen aus homogenen Polynomen zusammengesetzt sind. Wir werden in Abschnitt 3.2 einen Erzeuger η von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$ gewinnen, dessen Komponenten nicht-homogene Polynome sind. Ein homogener polynomialer Erzeuger von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$ hätte die Formel für den Erzeuger von $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$ vereinfacht, die in Abschnitt 3.3 gewonnen wird.

Der Erzeuger η kann benutzt werden, um eine Abbildung $\mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ zu konstruieren, deren erste Spalte die geodätische Verdopplung $\mu_1 : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathbb{S}^5$ ist. In Anhang A wird gezeigt, daß μ_1 und die erste Spalte η_1 von η niemals antipodal sind. Wir können für jedes $z \in \mathbb{S}^5$ daher $\eta(z)^{-1} \cdot \mu_1(z)$ mit dem Nordpol durch eine eindeutige Geodätische verbinden und die Schar dieser Geodätischen mit den in Kapitel 4 bereitgestellten Formeln nach $\mathrm{SU}(3)$ liften. Für die Endpunkte dieser Geodätischen in $\mathrm{SU}(3)$ erhält man

$$\delta(z) = \begin{bmatrix} |z_1|^2 & -\bar{z}_1 z_2 & -\bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_2 \\ z_1 \bar{z}_2 + z_3 & \delta_{22}(z) & \delta_{23}(z) \\ z_1 \bar{z}_3 - z_2 & \delta_{32}(z) & \delta_{33}(z) \end{bmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta_{22}(z) &= 1 - \frac{1}{1+|z_1|^2} (|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3)), \\ \delta_{33}(z) &= 1 - \frac{1}{1+|z_1|^2} (|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3)), \\ \delta_{32}(z) &= \frac{1}{1+|z_1|^2} (-|z_1|^2 z_2 \bar{z}_3 - z_1 \bar{z}_3^2 + \bar{z}_1 z_2^2 + z_2 \bar{z}_3), \\ \delta_{23}(z) &= \frac{1}{1+|z_1|^2} (-|z_1|^2 \bar{z}_2 z_3 + z_1 \bar{z}_2^2 - \bar{z}_1 z_3^2 + \bar{z}_2 z_3). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\delta : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ ist nach Konstruktion nullhomotop, daher gilt

Lemma 5.4. *Die Abbildung $\eta \cdot \delta : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ stellt einen Erzeuger von $\pi_5(\mathrm{SU}(3))$ dar, dessen erste Spalte die geodätische Verdopplung von $\mathbb{S}^5$ ist.*

5.4. Von Erzeugern zu Nullhomotopien.

Lemma 5.5. *Ein Erzeuger $f : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathrm{SU}(n)$ von $\pi_{2n+1}(\mathrm{SU}(n))$, dessen erste Spalte die geodätische Ver- a_n -fachung von $\mathbb{S}^{2n+1}$ vom Nordpol aus ist, induziert eine Nullhomotopie der a_n -ten Potenz des Erzeugers ϕ' von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$.*

Beweis. Es bezeichne wie im Kapitel 4 $\exp$ die Riemannsche Exponentialabbildung der Sphäre $\mathbb{S}^{2n+1}$ vom Nordpol aus und $\widetilde{\exp}$ den horizontalen Lift dieser Abbildung nach $\mathrm{SU}(n+1)$ durch die Einheitsmatrix. Die erste Spalte von $\widetilde{\exp}(a_n t \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix})$ und $f \circ \exp(t \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix})$ stimmen offensichtlich stets überein. Daher ist

$$f(\exp(t \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix})) \in \widetilde{\exp}(a_n t \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{SU}(n) \end{bmatrix}$$

und die Formel

$$\widetilde{\exp}(a_n \pi \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}) \cdot \widetilde{\exp}(a_n t \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix})^{-1} \cdot f(\exp(t \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}))$$

liefert eine Homotopie zwischen der a_n -ten Potenz von ϕ' und der konstanten Abbildung auf den Wert von f am Südpol von $\mathbb{S}^{2n+1}$. $\square$

In analoger Weise induziert ein Erzeuger von $\pi_{4n+3}(\mathrm{Sp}(n))$, dessen erste Spalte die geodätische Ver- c_n -fachung ist, eine Nullhomotopie der c_n -ten Potenz des Erzeugers ψ von $\pi_{4n+2}(\mathrm{Sp}(n))$.

5.5. Von Nullhomotopien zu Erzeugern.

Lemma 5.6. *Ist $H : \mathbb{S}^{2n} \times [0, \pi] \rightarrow \mathrm{SU}(n)$ eine Homotopie zwischen der konstanten Abbildung auf die Einheitsmatrix und der a_n -ten Potenz des Erzeugers ϕ' von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$, so induziert*

$$[0, \pi] \times \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n+1), \quad (t, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}) \mapsto \widetilde{\exp}(a_n t \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, t) \end{bmatrix}^{-1}.$$

eine Abbildung $\mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathrm{SU}(n+1)$, die einen Erzeuger von $\pi_{2n+1}(\mathrm{SU}(n+1))$ darstellt.

Beweis. Für $t = 0$ ist der Wert der Abbildung die Einheitsmatrix unabhängig von $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{2n}$. Für $t = \pi$ ist $\widetilde{\exp}(a_n \pi \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}) = (\phi')^{a_n}(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix})$ (siehe Abschnitt 4.6). Daher wird tatsächlich eine Abbildung $\mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathrm{SU}(n+1)$ induziert. Die erste Spalte dieser Abbildung liefert die geodätische Ver- a_n -fachung der Sphäre $\mathbb{S}^{2n+1}$. $\square$

5.6. Iterative Konstruktion von Erzeugern von $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$. Im folgenden Kapitel werden wir mit Hilfe eines beliebigen Erzeugers der Gruppe $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ eine Nullhomotopie der a_n -ten Potenz des Erzeugers ϕ und damit auch der a_n -ten Potenz des Erzeugers ϕ' erhalten. Durch die beiden vorangegangenen Lemma lassen sich somit iterativ Erzeuger aller Gruppen $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ erhalten.

6. DIE GEOMETRIE DER GRUPPEN $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$

6.1. Das Problem. In Abschnitt 4.4 wurden die Abbildungen

$$\phi : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n), \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto e^{-i\pi(y+1)/n} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{z}{|z|} (1 + e^{i\pi y}) \frac{\bar{z}^t}{|z|} \right).$$

gewonnen, die Erzeuger von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ repräsentieren. Botts Ergebnis, daß diese Homotopiegruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_{n!}$ ist, führt nun zu der grundsätzlichen Frage, wie

die $n!$ -te Potenz von ϕ nullhomotop wird. Auf den ersten Blick ist ein konkreter Kürzungseffekt der obigen Formel für ϕ sicherlich nicht anzusehen, da

$$\phi^m : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n),$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto e^{-im\pi(y+1)/n} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{z}{|z|} (1 - (-1)^m e^{im\pi y}) \frac{\bar{z}^t}{|z|} \right).$$

gilt und sich ϕ^m damit strukturell nicht von ϕ selbst unterscheidet. Im folgenden werden wir aber eine Interpretation des Erzeugers ϕ geben, die die Ordnung $n!$ der Homotopiegruppe $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ in zwei Stufen erkennbar werden läßt. In der ersten Stufe wird der Faktor n sichtbar, in der zweiten der Faktor $(n-1)!$.

6.2. Die Erzeuger von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$. Wir betrachten die n Abbildungen

$$\phi_j : [0, \frac{2\pi}{n}] \times \mathrm{SU}(n) \longrightarrow \mathrm{SU}(n),$$

die durch

$$\begin{aligned} \phi_1(s, A) &= A \cdot \mathrm{diag}(e^{i(n-1)s}, e^{-is}, \dots, e^{-is}) \cdot A^{-1} \\ &\vdots \\ \phi_n(s, A) &= A \cdot \mathrm{diag}(e^{-is}, \dots, e^{-is}, e^{i(n-1)s}) \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

definiert sind.

Lemma 6.1. *Die Abbildung ϕ_j hängt für festes $s \in [0, \frac{2\pi}{n}]$ nur vom Wert der j -ten Spalte der Matrix $A \in \mathrm{SU}(n)$ ab.*

Beweis. Es sei $A \in \mathrm{SU}(n)$ eine Matrix, deren erste Spalte der Vektor $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} &A \cdot \mathrm{diag}(e^{i(n-1)s}, e^{-is}, \dots, e^{-is}) \cdot A^{-1} \\ &= e^{-is} \cdot A \cdot (\mathbb{1} + \mathrm{diag}(e^{ins} - 1, 0, \dots, 0)) \cdot A^{-1} \\ &= e^{-is} (\mathbb{1} + z(e^{ins} - 1)\bar{z}^t). \end{aligned}$$

Für die anderen Abbildungen ist die Rechnung analog und führt exakt zum gleichen Ergebnis. $\square$

Korollar 6.2. *Für festes n induzieren alle ϕ_j die Abbildung*

$$\hat{\phi} : [0, \frac{2\pi}{n}] \times \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathrm{SU}(n), \quad (s, z) \mapsto e^{-is} (\mathbb{1} + z(e^{ins} - 1)\bar{z}^t).$$

Für $s = 0$ und $s = \frac{2\pi}{n}$ sind die Werte von $\hat{\phi}$ unabhängig von $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$. Wegen dieses Zusammenschlagens an den Endpunkten des Intervalls induziert $\hat{\phi}$ eine Abbildung $\mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n)$.

Lemma 6.3. *Die Abbildung $\hat{\phi}$ induziert den Erzeuger ϕ von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$.*

Beweis. Wir identifizieren die runde Sphäre $\mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ mit dem an den Enden zusammengeschlagenen Zylinder $[0, \frac{2\pi}{n}] \times \mathbb{S}^{2n-1}$ vermöge der Abbildung

$$(10) \quad \mathbb{S}^{2n} \rightarrow ([0, \frac{2\pi}{n}] \times \mathbb{S}^{2n-1})/\sim, \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \left(\frac{\pi}{n}(y+1), \frac{z}{|z|} \right).$$

Die Verkettung dieser Identifizierung mit der Abbildung $\hat{\phi}$ liefert wie behauptet den Erzeuger

$$\phi : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n), \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto e^{-i\pi(y+1)/n} \cdot \left(\mathbb{1} - \frac{z}{|z|} (1 + e^{i\pi y}) \frac{\bar{z}^t}{|z|} \right)$$

aus Abschnitt 4.4. $\square$

6.3. Die Nullhomotopie. Im vorigen Abschnitt haben wir den Erzeuger ϕ mit den Abbildungen ϕ_j in Verbindung gebracht. Diese n Abbildungen kommutieren paarweise und ihr Produkt ist die konstante Abbildung auf die Einheitsmatrix:

$$(11) \quad \begin{aligned} \phi_j(s, A) \cdot \phi_k(s, A) &= \phi_k(s, A) \cdot \phi_j(s, A), \\ \phi_1(s, A) \cdot \phi_2(s, A) \cdot \dots \cdot \phi_n(s, A) &= \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Diese Eigenschaften sind wesentlich für die zu sehende Nullhomotopie. Wir definieren nun Abbildungen

$$\Phi_j : [0, \frac{2\pi}{n}] \times \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathrm{SU}(n),$$

indem wir einen beliebigen Erzeuger $\eta : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathrm{SU}(n)$ der stabilen Homotopiegruppe $\pi_{2n-1}(\mathrm{SU}(n))$ in die Abbildungen ϕ_j einsetzen:

$$\begin{aligned} \Phi_1(s, z) &= \phi_1(s, \eta(z)) = \eta(z) \cdot \mathrm{diag}(e^{i(n-1)s}, e^{-is}, \dots, e^{-is}) \cdot \eta(z)^{-1} \\ &\vdots \\ \Phi_n(s, z) &= \phi_n(s, \eta(z)) = \eta(z) \cdot \mathrm{diag}(e^{-is}, \dots, e^{-is}, e^{i(n-1)s}) \cdot \eta(z)^{-1}. \end{aligned}$$

Für die Abbildungen Φ_j gelten natürlich die zu (11) analogen Identitäten. Die Abbildung Φ_j entsteht, indem man die j -te Spalte $\eta_j : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ des Erzeugers η in die Abbildung $\hat{\phi}$ einsetzt. Daher induzieren die Φ_j Abbildungen $\mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n)$. Benutzen wir die Identifikation (10), so sind dies genau die Abbildungen $\phi \circ \Sigma\eta_j$, wobei

$$\Sigma\eta_j : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}, \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ |z|\eta(\frac{z}{|z|}) \end{bmatrix}$$

die Einhängung von η_j ist.

Satz 6.4. *Die n Abbildungen $\phi \circ \Sigma\eta_j : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathrm{SU}(n)$ sind paarweise homotop zueinander und repräsentieren das $(n-1)!$ -te Element von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$. Sie kommutieren paarweise und ihr Produkt ist die konstante Abbildung auf die Einheitsmatrix, d.h., es gilt*

$$\begin{aligned} (\phi \circ \Sigma\eta_j) \cdot (\phi \circ \Sigma\eta_k) &= (\phi \circ \Sigma\eta_k) \cdot (\phi \circ \Sigma\eta_j), \\ (\phi \circ \Sigma\eta_1) \cdot (\phi \circ \Sigma\eta_2) \cdot \dots \cdot (\phi \circ \Sigma\eta_n) &\equiv \mathbb{1}, \end{aligned}$$

wobei die Abbildungen Wert für Wert multipliziert werden.

Dieser Satz liefert uns also eine Nullhomotopie der n -ten Potenz von $\phi \circ \Sigma\eta_1$. Damit haben wir den konkreten Kürzungseffekt gefunden, der für die Ordnung der Homotopiegruppe $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ entscheidend ist. Um eine Nullhomotopie der $n!$ -ten Potenz des Erzeugers ϕ von $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ anzugeben, fehlt nun noch eine Homotopie zwischen $\phi \circ \Sigma\eta_1$ und der $(n-1)!$ -ten Potenz von ϕ . Wie man eine solche Homotopie erhält, ist — im Gegensatz zum oben gefundenen Kürzungseffekt — konzeptionell klar, wenngleich die Herleitung einer expliziten Formel technisch ist. Wir verdeutlichen dies in Anhang A im Fall $n = 3$. Der Fall $n = 2$ ist natürlich eine Ausnahme: Hier ist $\eta_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^3}$.

Beweis von Satz 6.4. Daß die Abbildungen $\phi \circ \Sigma\eta_j$ das $(n-1)!$ -te Vielfache des Erzeugers von ϕ in $\pi_{2n}(\mathrm{SU}(n))$ repräsentieren, ist eine Konsequenz aus Lemma 5.1, aus Kapitel 5: Mit der j -ten Spalte des Erzeugers η setzen wir eine Selbstabbildung von $\mathbb{S}^{2n-1}$ mit Abbildungsgrad $(n-1)!$ in die Abbildung $\hat{\phi}$ ein. Es ist leicht,

Homotopien zwischen den Abbildungen Φ_j anzugeben. So liefert z.B. die Formel

$$\eta(z) \cdot \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \text{diag}(e^{i(n-1)s}, e^{-is}, \dots, e^{-is}) \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot \eta(z)^{-1},$$

für $t = 0$ die Abbildung Φ_1 und für $t = \frac{\pi}{2}$ die Abbildung Φ_2 . Die restlichen Aussagen des Satzes sind offensichtlich. $\square$

Bemerkung 6.5. Durch Induktion nach n liefern die Beweise von Satz 6.4 und Lemma 5.1 zusammen einen elementaren Beweis dafür, daß die Homotopiegruppe $\pi_{2n}(\text{SU}(n))$ eine zyklische Gruppe ist, deren Ordnung $n!$ teilt. Um jedoch umgekehrt zu zeigen, daß $n!$ die Ordnung von $\pi_{2n}(\text{SU}(n))$ teilt, sind kohomologische Argumente wie die aus [Bt1] wohl unvermeidbar.

Bemerkung 6.6. Die Abbildung $\hat{\phi}$ faktorisiert offensichtlich durch eine Abbildung $\check{\phi}$, die auf $[0, \frac{2\pi}{n}] \times \mathbb{CP}^{n-1}$. Dieser $\mathbb{CP}^{n-1}$ repräsentiert die Menge der kürzesten Verbindungskurven von der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ zum Zentrumselement $e^{-2\pi i/n} \cdot \mathbb{1}$. Die Abbildung $\check{\phi}$ wird in Botts Arbeiten [Bt1],[Bt2] und den Folgearbeiten häufig benutzt, jedoch nie als Erzeuger von $\pi_{2n}(\text{SU}(n))$, und diese Eigenschaft ergibt sich auch nicht aus den dortigen Morse-theoretischen Argumenten.

7. DIE GEOMETRIE DER GRUPPE $\pi_6(\text{G}_2)$

In diesem Kapitel werden wir einen minimalen Erzeuger $\rho : \mathbb{S}^6 \rightarrow \text{G}_2$ der Homotopiegruppe $\pi_6(\text{G}_2) \approx \mathbb{Z}_3$ gewinnen, so daß ρ^3 die konstante Abbildung auf das Einselement von G_2 ist. Daß $\pi_6(\text{G}_2)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist, ist seit den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts bekannt [Mi]. Die hier vorgestellte geometrische Darstellung dieser Homotopiegruppe stammt von Chaves und Rigas [Ch-Ri2]. Zur Konstruktion des Erzeugers ρ verwenden wir hier aber einen konzeptionelleren Zugang, nämlich das horizontale Liften von Geodätischen von $\mathbb{S}^7$ bezüglich der Riemannschen Submersion $\text{Spin}(7) \rightarrow \mathbb{S}^7$ mit Fasern G_2 .

7.1. Das G_2 -Prinzipalbündel $\text{Spin}(7) \rightarrow \mathbb{S}^7$. Im folgenden bezeichne $\mathbb{O}$ die Divisionsalgebra der Oktaven. Für $\text{Spin}(8)$ verwenden wir das Modell, das von der Trialität herkommt:

$$\text{Spin}(8) = \{(A, B, C) \in \text{SO}(\mathbb{O})^3 \mid A(x \cdot y) = B(x) \cdot C(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{O}\}.$$

Der natürliche Homomorphismus $\text{Spin}(8) \rightarrow \text{SO}(8)$ ist hierbei gegeben durch die Projektion auf den ersten Faktor. Durch diesen Homomorphismus ergibt sich unmittelbar die kanonische Operation von $\text{Spin}(8)$ auf $\mathbb{S}^7$. Die Untergruppe $\text{Spin}(7) \subset \text{Spin}(8)$ ist nun offensichtlich durch die Bedingung $A(1) = 1$ definiert. Sie operiert transitiv auf den Einheitsoktaven vermöge

$$\text{Spin}(7) \times \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^7, \quad (A, B, C) \cdot x = B(x).$$

Die Standgruppe von $1 \in \mathbb{O}$ bezüglich dieser Operation ist

$$\text{G}_2 = \{(A, A, A) \in \text{Spin}(7)\},$$

die Automorphismengruppe der Oktaven. Somit erhalten wir durch diese Operation von $\text{Spin}(7)$ das G_2 -Prinzipalbündel $\text{Spin}(7) \rightarrow \mathbb{S}^7$.

7.2. Das horizontale Liften von Geodätischen. Es sei nun γ eine Geodätische in den Einheitsoktaven mit $\gamma(0) = 1$ und $\gamma(\pi) = -1$. Um den Lift dieser Geodätischen nach $\text{Spin}(7)$ anzugeben, bezeichnen wir, wie allgemein üblich, die Linksmultiplikation, Rechtsmultiplikation und Konjugation auf $\mathbb{O}$ mit einem festen Element $a \in \mathbb{O}$ mit

$$L_a(x) = ax, \quad R_a(x) = xa, \quad C_a(x) = axa^{-1}.$$

Da die Oktaven eine normierte Divisionsalgebra sind, sind $L_a, R_a, C_a \in \text{SO}(\mathbb{O})$.

Lemma 7.1. *Der horizontale Lift der Geodätischen γ durch das Einselement von $\text{Spin}(7)$ ist gegeben durch*

$$\tilde{\gamma}(3t) = (C_{\gamma(t)}, L_{\gamma(t)} \circ R_{\gamma(t)^2}, L_{\bar{\gamma}(t)^2} \circ R_{\bar{\gamma}(t)}),$$

wobei $\bar{\gamma}(t)$ mit $\gamma(t)^{-1}$ übereinstimmt, da $\gamma(t)$ eine Einheitsoktave ist.

Beweis. Zunächst folgt aus den Moufang-Identitäten

$$L_{aba} = L_a \circ L_b \circ L_a, \quad R_{aba} = R_a \circ R_b \circ R_a,$$

daß der obige Ausdruck für $\tilde{\gamma}(3t)$ in $\text{Spin}(8)$ liegt:

$$a(xy)\bar{a} = a(x(a(\bar{a}y)))\bar{a} = ((axa)(\bar{a}y))\bar{a} = (((axa^2)\bar{a})(\bar{a}y))\bar{a} = (axa^2)(\bar{a}^2 y \bar{a}).$$

Da $C_a(1) = 1$ ist, liegt $\tilde{\gamma}(3t)$ sogar in $\text{Spin}(7)$. Der Ausdruck für $\tilde{\gamma}$ definiert offensichtlich eine Einparameteruntergruppe von $\text{Spin}(7)$ und damit eine Geodätische. Diese wird unter der Projektion $\text{Spin}(7) \rightarrow \mathbb{S}^7$ auf γ abgebildet, da

$$(12) \quad (C_a, L_a \circ R_{a^2}, L_{\bar{a}^2} \circ R_{\bar{a}}) \cdot 1 = a^3.$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß diese Geodätische horizontal ist, d.h., daß $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ senkrecht zur G_2 -Faser über dem Einselement ist. Das Skalarprodukt von zwei Endomorphismen $Y, Z \in \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O})$ ist durch $-\text{Spur}(Y \circ Z)$ gegeben. Ist nun $\dot{\gamma}(0) = p \in \mathbb{S}^6 \subset \text{Im } \mathbb{O}$, so ist

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (L_p - R_p, L_p + 2R_p, -2L_p - R_p) \in \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}).$$

Die Liealgebra von G_2 besteht aus Endomorphismen der Form $(X, X, X) \in \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O})$. Es gilt nun offensichtlich, daß $\text{Spur}(\dot{\tilde{\gamma}}(0) \circ (X, X, X))$ verschwindet, da dies sogar für die Summe der drei Komponenten von $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$ gilt. Damit ist $\tilde{\gamma}$ horizontal. $\square$

7.3. Ein minimaler Erzeuger von $\pi_6(G_2)$. Es bezeichne $\exp : \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \mathbb{S}^7$ die Riemannsche Exponentialabbildung der Einheitsoktaven vom Punkt 1. Für die Geodätische $\gamma(t) = \exp(tp)$ mit $p \in \mathbb{S}^6$ gilt $\gamma(\pi) = -1$. Daher liegt $\tilde{\gamma}(\pi)$ in der G_2 -Faser $\{(A, -A, -A) \in \text{Spin}(7)\}$ über -1 . Die Abbildung $p \mapsto \tilde{\gamma}(\pi)$ repräsentiert nun das Bild der Identität $\text{id}_{\mathbb{S}^7}$ unter der Randabbildung ∂ in der exakten Homotopiesequenz des Bündels $\text{Spin}(7) \rightarrow G_2$:

$$\mathbb{Z} \approx \pi_7(\mathbb{S}^7) \xrightarrow{\partial} \pi_6(G_2) \longrightarrow \pi_6(\text{Spin}(7)) \approx 0.$$

Es folgt, daß die Abbildung $p \mapsto \tilde{\gamma}(\pi)$ einen Erzeuger von $\pi_6(G_2)$ repräsentiert. Nun gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\pi) &= (C_{\gamma(\pi/3)}, L_{\gamma(\pi/3)} \circ R_{\gamma(2\pi/3)}, L_{\gamma(-2\pi/3)} \circ R_{\gamma(-\pi/3)}) \\ &= (C_{\gamma(-2\pi/3)}, -C_{\gamma(-2\pi/3)}, -C_{\gamma(-2\pi/3)}). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Werte der Abbildung $p \mapsto \tilde{\gamma}(\pi)$ noch mit $(\mathbb{1}, -\mathbb{1}, -\mathbb{1})$, so erhalten wir zusammenfassend:

Satz 7.2. *Die Abbildung*

$$\rho : \mathbb{S}^6 \rightarrow G_2, \quad p \mapsto (C_{\exp(-2\pi p/3)}, C_{\exp(-2\pi p/3)}, C_{\exp(-2\pi p/3)})$$

repräsentiert einen Erzeuger von $\pi_6(G_2)$. Da ρ^3 die konstante Abbildung auf $(\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbb{1})$ ist, ist $\pi_6(G_2)$ entweder trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}_3$.

Dieser Satz liefert den geometrischsten Beweis dafür, daß $\pi_6(G_2) \approx \mathbb{Z}_3$ ist. Als zusätzliche Information neben $\pi_6(\text{Spin}(7)) \approx 0$ benötigt man noch, daß die Abbildung $\mathbb{S}^7 \rightarrow \text{SO}(7)$, $a \mapsto C_a$ die Homotopiegruppe $\pi_7(\text{SO}(7)) \approx \mathbb{Z}$ erzeugt [To-Sa-Yo]. Daraus folgt unmittelbar, daß die Abbildung

$$\mathbb{S}^7 \rightarrow \text{Spin}(7), \quad a \mapsto (C_a, L_a \circ R_{a^2}, L_{\bar{a}^2} \circ R_{\bar{a}})$$

einen Erzeuger von $\pi_7(\text{Spin}(7)) \approx \mathbb{Z}$ repräsentiert. Wegen (12) wird dieser Erzeuger unter der Projektion nach $\mathbb{S}^7$ auf das dritte Element der Homotopiegruppe $\pi_7(\mathbb{S}^7)$ abgebildet.

Die Abbildung ρ ist G_2 -äquivariant, wobei G_2 auf sich selbst durch Konjugation operiert. Um dies zu sehen, sei $(A, A, A) \in G_2$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} C_{(\exp(-2\pi A(p)/3))}(x) &= C_{A(\exp(-2\pi p/3))}(x) \\ &= A(\exp(-2\pi p/3)) \cdot x \cdot \overline{A(\exp(-2\pi p/3))} \\ &= A(\exp(-2\pi p/3)) \cdot A(A^{-1}(x)) \cdot \overline{A(\exp(-2\pi p/3))} \\ &= A(\exp(-2\pi p/3) A^{-1}(x)) \cdot \overline{A(\exp(-2\pi p/3))} \\ &= A(\exp(-2\pi p/3) A^{-1}(x)) \cdot A(\exp(2\pi p/3)) \\ &= A(\exp(-2\pi p/3) A^{-1}(x) \exp(2\pi p/3)) \\ &= (A \circ C_{\exp(-2\pi p/3)} \circ A^{-1})(x) \end{aligned}$$

und damit folgt

Satz 7.3. *Die Abbildung $\rho : \mathbb{S}^6 \rightarrow G_2$ ist eine Einbettung und parametrisiert genau einen Orbit unter der Operation von G_2 auf sich selbst vermöge Konjugation.*

Bemerkung 7.4. Es ist leicht zu sehen, daß das Element

$$(C_{\exp(-2\pi p/3)}, C_{\exp(-2\pi p/3)}, C_{\exp(-2\pi p/3)}) \in G_2$$

ein Zentrumselement der Untergruppe $\text{SU}(3) \subset G_2$ ist, die durch die Bedingung $(A, A, A) \cdot p = p$ gegeben ist. Daran sieht man sofort, daß der obige Orbit isoliert ist und damit minimal ist.

8. DIE HOMOTOPIEGRUPPEN $\pi_{n+3}(\mathbb{S}^n)$

8.1. Die Homotopiegruppe $\pi_6(\mathbb{S}^3)$. Die Gruppe $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ spielt eine wichtige Rolle in der Homotopietheorie. Der Zusammenhang dieser Gruppe mit der Nicht-Kommutativität der Quaternionen wird in Kapitel 9 diskutiert. Die Berechnung von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ dauerte mehr als zehn Jahre und motivierte die Entwicklung bahnbrechender Methoden. Borel und Serre [Bo-Se] zeigten schließlich, daß $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist. Diese Tatsache geht in die Berechnung der höheren Homotopiegruppen der Sphären und Liegruppen an vielen Stellen ein (siehe [To]). Ein Beweis wurde

in Abschnitt 5.1 gegeben, ein Standardbeweis der die stabilen Homotopiegruppen der klassischen Gruppen nicht benutzt, findet sich z. B. in [Hu]. Noch ein weiterer Beweis ergibt sich aus Kapitel 7 (siehe [Ch-Ri2]): Zunächst folgt auf geometrische Weise, daß $\pi_6(G_2)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_3$ ist und dann mittels der exakten Homotopiesequenz des Bündels $G_2 \rightarrow V_{7,2}$ aus $\pi_7(V_{7,2}) \approx \mathbb{Z}_4$ die Aussage. Wir werden hier nun noch einen weiteren Beweis erbringen, der den expliziten Erzeuger ξ von $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$ benutzt (zu dessen Konstruktion wir nur Bott-Periodizität, $\pi_4(\mathbb{S}^3)$ und die exakte Homotopiesequenz eingesetzt haben). Dazu bezeichne $pr_1 : \mathrm{Sp}(2) \rightarrow \mathbb{S}^7$ die Projektion, die einer quaternionalen 2×2 -Matrix ihre erste Spalte zuordnet. Die Komposition $pr_1 \circ \xi$ unseres Erzeugers mit dieser Projektion liefert eine Selbstabbildung von $\mathbb{S}^7$.

Satz 8.1. *Der Abbildungsgrad von $pr_1 \circ \xi : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^7$ ist ± 12 .*

Bevor wir diesen Satz beweisen, ziehen wir die gewünschte Schlußfolgerung:

Korollar 8.2. *Die Homotopiegruppe $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$.*

Beweis. Dies folgt aus dem vorigen Satz mit Hilfe der exakten Homotopiesequenz des Bündels $\mathrm{Sp}(2) \rightarrow \mathbb{S}^7$:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_7(\mathrm{Sp}(2)) & \longrightarrow & \pi_7(\mathbb{S}^7) & \longrightarrow & \pi_6(\mathrm{Sp}(1)) & \longrightarrow & \pi_6(\mathrm{Sp}(2)) \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 12} & \mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

In diesem Diagramm sind die Homotopiegruppen $\pi_6(\mathrm{Sp}(2))$ und $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$ stabil (siehe Kapitel 2). $\square$

Beweis von Satz 8.1. Die Hauptarbeit in der Berechnung des Abbildungsgrades liegt im Auffinden eines geeigneten regulären Wertes. Wir werden zeigen, daß der Punkt $\begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^7$ ein regulärer Wert der Abbildung $pr_1 \circ \xi : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^7$ ist und genau zwölf Urbildpunkte mit gleicher Orientierung besitzt. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, daß der Erzeuger ξ aus dem Erzeuger ξ' von $\pi_7(\mathrm{Sp}(3))$ und der Projektion $pr_{\mathrm{Sp}(2)}$ zusammengesetzt wurde. Der Erzeuger ξ' nimmt nun Werte der Form $w \mathbb{1} + j B$ an, wobei B bis auf Skalierung eine symmetrische Matrix in $\mathrm{SU}(3)$ ist. Die Projektion $pr_{\mathrm{Sp}(2)}$ schreibt sich ausführlich

$$w \mathbb{1} + j B \mapsto \begin{bmatrix} j b_{21} & w + j b_{22} \\ j b_{31} & j b_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j b_{32} \\ w + j b_{33} \end{bmatrix} \frac{1}{1 + j b_{31}} [w + j b_{11}, j b_{21}].$$

Damit die erste Spalte den Wert $\begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix}$ annimmt, müssen die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$(13) \quad j b_{21} - j b_{32} \frac{1}{1 + j b_{31}} (w + j b_{11}) = -i,$$

$$(14) \quad j b_{31} - (w + j b_{33}) \frac{1}{1 + j b_{31}} (w + j b_{11}) = 0.$$

Da $|b_{ij}| \leq 1$ für alle $i > j$ und ebenso $|w + j b_{ii}| \leq 1$ für alle i gilt, folgt aus der ersten Gleichung unmittelbar, daß $b_{21} = 0$ ist, und aus der zweiten Gleichung, daß $b_{31} = 0$ ist. Damit liefert die erste Gleichung $\bar{b}_{32} b_{11} = -i$ und $w = 0$. Insgesamt ist die Matrix $B \in \mathrm{SU}(3)$ also von der Gestalt $\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{32} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{bmatrix}$ mit $\bar{b}_{32} b_{11} = -i$. Diese Bedingungen erfüllen nur die drei Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{2\pi i/3}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-2\pi i/3},$$

die tatsächlich alle nach Multiplikation mit j von links durch $pr_1 \circ pr_{\mathrm{Sp}(2)}$ auf $\begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^7$ abgebildet werden. Es verbleibt nun noch zu klären, für welche Argumente $z \in \mathbb{S}^5$ die Abbildung $\eta \cdot \eta^t : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathrm{SU}(3)$ einen dieser drei Werte

annimmt. Hier kommt uns die Äquivarianz von η zugute. Es gilt nämlich, daß $\eta(e^{2\pi i/3}z) = e^{-2\pi i/3}\eta(z)$ ist. Daher genügt es, nur das Urbild der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ unter $\eta \cdot \eta^t$ zu bestimmen. Durch Multiplikation mit den dritten Einheitswurzeln erhält man daraus alle Urbildpunkte. Es verbleibt somit die Gleichung

$$(15) \quad \eta(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \cdot \bar{\eta}(z)$$

für $z \in \mathbb{S}^5$ zu lösen. Diese Matrizengleichung ist äquivalent zu den sechs Bedingungen

$$\begin{aligned} z_1^2 &\in \mathbb{R}, & z_1 z_2 - \bar{z}_3 &\in \mathbb{R}, & z_1 z_3 + \bar{z}_2 &\in \mathbb{R}, \\ z_2^2 &= i \bar{z}_3 \bar{z}_2 + i z_1, & z_3^2 &= i \bar{z}_3 \bar{z}_2 - i z_1, & z_1 z_2 + \bar{z}_3 &= i \bar{z}_1 \bar{z}_3 - i z_2. \end{aligned}$$

Zerlegt man die $z_k = x_k + iy_k$ in Real- und Imaginärteil, so erhält man das folgende reelle polynomiale Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= 0, & x_1 y_2 + x_2 y_1 + y_3 &= 0, & x_1 y_3 + x_3 y_1 - y_2 &= 0, \\ x_2^2 - y_2^2 &= -y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2, & 2x_2 y_2 &= x_1 + x_2 x_3 - y_2 y_3, \\ x_3^2 - y_3^2 &= y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2, & 2x_3 y_3 &= -x_1 + x_2 x_3 - y_2 y_3, \\ x_1 x_2 - y_1 y_2 + x_3 &= x_1 y_3 + x_3 y_1 + y_2, & x_1 y_2 + x_2 y_1 - y_3 &= x_1 x_3 - y_1 y_3 - x_2. \end{aligned}$$

Zunächst nehmen wir an, daß $y_1 = 0$. Aus den anderen beiden Gleichungen der ersten Zeile folgt dann sofort $y_2 = y_3 = 0$. Die weiteren Gleichungen liefern nun $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, im Widerspruch zu $|z|^2 = 1$. Als zweites untersuchen wir nun den verbleibenden Fall $x_1 = 0$ und $y_1 \neq 0$. In diesem Fall reduzieren sich die Gleichungen der ersten Zeile zu $y_2 = x_3 y_1$, $y_3 = -x_2 y_1$ und die rechten mittleren beiden Gleichungen liefern $x_2 y_2 = x_3 y_3$. Durch Einsetzen erhalten wir unmittelbar $x_2 x_3 y_1 = 0$. Falls $x_2 = 0$ und damit $y_3 = 0$ ist, vereinfachen sich die linken mittleren Gleichungen zu $y_2^2 - y_1 + x_3 y_2 = 0$ und $x_3^2 - y_1 - x_3 y_2 = 0$, woraus sich durch Addition $(y_2 + x_3)^2 = 2x_3^2$ ergibt. Somit ist $y_2 = -(1 \pm \sqrt{2})x_3$, und es folgt nun leicht aus der Normierung $y_1 = \sqrt{2} - 1$ und

$$x_3 = 2^{1/4}, \quad y_2 = 2^{1/4}(\sqrt{2} - 1) \quad \text{oder} \quad x_3 = -2^{1/4}, \quad y_2 = -2^{1/4}(\sqrt{2} - 1).$$

Entsprechend verfährt man im Fall $x_3 = 0$ und $y_2 = 0$. Insgesamt erhält man auf diese Weise nur die vier Kandidaten

$$\begin{bmatrix} -(\sqrt{2}-1)i \\ 2^{-1/4} \\ 2^{-1/4}(\sqrt{2}-1)i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -(\sqrt{2}-1)i \\ -2^{-1/4} \\ -2^{-1/4}(\sqrt{2}-1)i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (\sqrt{2}-1)i \\ 2^{-1/4}(\sqrt{2}-1)i \\ 2^{-1/4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (\sqrt{2}-1)i \\ -2^{-1/4}(\sqrt{2}-1)i \\ -2^{-1/4} \end{bmatrix},$$

die die Matrizengleichung (15) tatsächlich lösen. Diese vier Punkte sind invariant unter Linksmultiplikation mit den Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das gesamte Urbild des Wertes $\begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix}$ unter der Abbildung $pr_1 \circ \xi$ besteht somit aus genau 12 Punkten, auf denen die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ einfach-transitiv operiert (hierbei ist $\mathbb{Z}_3 = \{1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}\}$). Da die Elemente dieser Gruppe orientierungserhaltend auf $\mathbb{S}^5$ und damit auch auf $\mathbb{S}^7$ operieren, genügt es, an einem der Urbildpunkte zu verifizieren, daß die Ableitung von $pr_1 \circ \xi$ ein Isomorphismus ist. Da dies ohne Schwierigkeiten abläuft, ersparen wir uns diese Rechnung hier. $\square$

8.2. Die stabilen Homotopiegruppen $\pi_{n+3}(\mathbb{S}^n)$. In diesem Abschnitt werden wir den wesentlichen Kürzungseffekt in der Homotopiegruppe $\pi_{n+3}(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}_{24}$ auffinden. Dieser Kürzungseffekt ergibt sich aus der Geometrie der Liegruppe $\mathrm{Sp}(2)$.

Wir geben zunächst eine Zusammenfassung der Beschreibung der Homotopiegruppen $\pi_{n+3}(\mathbb{S}^n)$ für $n \geq 4$, wie man sie z. B. in [Hu] findet. Die Homotopiegruppe $\pi_7(\mathbb{S}^4)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$. Der $\mathbb{Z}$ -Faktor wird durch die Hopffaserung

$$(16) \quad h : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^4, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} |u|^2 - |v|^2 \\ 2u\bar{v} \end{bmatrix}$$

erzeugt. Hierbei ist $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{H}^2$ und $\mathbb{S}^4 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}$. Der $\mathbb{Z}_{12}$ -Faktor wird durch die Einhängung Σb eines Erzeugers b von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ erzeugt. Die erste stabile Homotopiegruppe $\pi_8(\mathbb{S}^5)$ wird nun nach dem Freudenthalschen Einhängungssatz von einer der Einhängungen Σh und $\Sigma^2 b$ erzeugt. Eine starke Version des Einhängungssatzes zeigt, daß die zweite Potenz von Σh homotop zu $\Sigma^2 b$ oder dessem Homotopieinversen ist. Aus diesem Grund erzeugt Σh die Gruppe $\pi_8(\mathbb{S}^5) \approx \mathbb{Z}_{24}$.

Wir erklären nun den durch $\mathrm{Sp}(2)$ vermittelten Kürzungseffekt. Dazu fassen wir $\mathrm{Sp}(2)$ als Gruppe der quaternionalen 2×2 -Matrizen A mit $\bar{A}^t \cdot A = \mathbb{1}$ auf. Es sei $f : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ eine stetige Abbildung. Die Verknüpfung von f mit den Projektionen auf die erste bzw. zweite Spalte liefert zwei Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^7$. Da diese hinsichtlich des quaternional hermiteschen Skalarprodukts stets senkrecht aufeinander stehen, ist

$$F : \mathbb{S}^7 \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^7, \quad F(x, t) = \cos t \cdot f_1(x) + \sin t \cdot f_2(x).$$

eine explizite Homotopie zwischen ihnen.

Lemma 8.3. *Es sei $h : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^4$ die Hopfabbildung (16) und $f : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ eine stetige Abbildung. Dann ist $h \circ f_2 = -h \circ f_1$ und damit $h \circ F : \mathbb{S}^7 \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^4$ eine Homotopie zwischen $h \circ f_1$ und $-h \circ f_1$.*

Beweis. Sei $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(2)$. Da $\bar{A}^t \cdot A = \mathbb{1}$ und ebenso $A \cdot \bar{A}^t = \mathbb{1}$ ist, gilt $|a| = |d|$, $|b| = |c|$, $a\bar{b} + c\bar{d} = 0$ und daher

$$h\left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} |c|^2 - |d|^2 \\ 2c\bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b|^2 - |a|^2 \\ -2a\bar{b} \end{bmatrix} = -h\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right).$$

Dies beweist die Aussage des Lemmas. $\square$

Die Homotopie des vorangegangenen Lemmas induziert eine Homotopie zwischen den Einhängungen $\Sigma(h \circ f_1)$ und $\Sigma(-h \circ f_1)$. Nun ist $-\mathrm{id}_{\mathbb{S}^7}$ homotop zu $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^7}$. Zusammen ergeben diese beiden Homotopien

Korollar 8.4. *Die Abbildung $\Sigma(h \circ f_1) : \mathbb{S}^8 \rightarrow \mathbb{S}^5$ ist homotop zu*

$$-\mathrm{id} \circ \Sigma(-h \circ f_1) = \Sigma^{-1}(h \circ f_1),$$

d. h. zu ihrem natürlichen Homotopieinversen, das durch Umkehrung des Einhängungsparameters im Bild gegeben ist.

Dieser geometrische Kürzungseffekt in der stabilen Homotopiegruppe $\pi_8(\mathbb{S}^5)$ ist offensichtlich optimal: Ist $f : \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$ ein Erzeuger der Homotopiegruppe $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$, z.B. der Erzeuger ξ aus Abschnitt 3.3, so ist f_1 eine Selbstabbildung von $\mathbb{S}^7$, deren Abbildungsgrad die Ordnung von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ und somit 12 ist. Die Verknüpfung $\Sigma(h \circ f_1)$ stellt damit die zwölfte Potenz des Erzeugers Σh von $\pi_8(\mathbb{S}^5)$ dar und ist homotop zu ihrem Homotopieinversen, was genau der Ordnung 24 entspricht.

Bemerkung 8.5. Der hier angegebene Kürzungseffekt verallgemeinert den entsprechenden Effekt in $\pi_4(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_2$. Dort läßt sich der hier verwendete Erzeuger von $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$ durch den Standard-Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{S}^3$ und $\mathrm{SU}(2)$ ersetzen.

Bemerkung 8.6. In Abhängigkeit vom verwendeten Erzeuger f von $\pi_7(\mathrm{Sp}(2))$ erhält man natürlich unterschiedliche Abbildungen $\Sigma(h \circ f_1)$, die das zwölfte Element in $\pi_8(\mathbb{S}^5)$ repräsentieren. Besonders geeignet wäre ein Erzeuger f , für den f_1 die geodätische Verzwölfachung von $\mathbb{S}^7$ ist. Eine Formel für einen solchen Erzeuger ist bisher nicht bekannt.

9. DER KOMMUTATOR DER QUATERNIONEN

Die von Hamilton entdeckten Quaternionen $\mathbb{H}$ bilden bekanntermaßen eine nicht kommutative Divisionsalgebra. Die Abweichung von der Kommutativität kann durch den Kommutator in der Gruppe $\mathbb{S}^3$ der Einheitsquaternionen gemessen werden, d.h., durch die Abbildung

$$c : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{S}^3, \quad (q_1, q_2) \mapsto q_1 q_2 q_1^{-1} q_2^{-1}.$$

In diesem letzten Kapitel werden wir auf das klassische Problem eingehen, wie die zwölften Potenz c^{12} des Kommutators nullhomotop wird. Dazu werden wir zunächst den Zusammenhang zwischen c und dem in Abschnitt 4.4 angegebenen Erzeuger der Homotopiegruppe $\pi_6(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_{12}$ herstellen, der auf Duran und Rigas [Du-Me-Ri] zurückgeht.

9.1. Eine Homotopieäquivalenz. Die erste einfache, aber fundamentale Beobachtung ist die, daß der Kommutator c konstant den Wert 1 liefert, falls $q_1 = 1$ ist oder $q_2 = -1$ ist (natürlich auch dann, wenn $q_1 = -1$ oder $q_2 = 1$ ist — der Grund für die hier getroffene Wahl wird später ersichtlich). Mit anderen Worten faktorisiert c durch das Smashprodukt

$$\mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3 = (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) / (\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3),$$

wobei hier $\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3$ die Einpunktvereinigung $\{1\} \times \mathbb{S}^3 \cup \mathbb{S}^3 \times \{-1\}$ bezeichnet. Das Smashprodukt $\mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3$ ist die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und als solche homöomorph zu $\mathbb{S}^6$. Um den Bezug zwischen dem Kommutator c und dem in Abschnitt 4.4 beschriebenen Erzeuger von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ herzustellen, eignet sich jedoch besser als dieser Homöomorphismus die Abbildung

$$\iota : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3, \quad \left[\begin{smallmatrix} p \\ u \end{smallmatrix} \right] \mapsto [(u/|u|, e^{\pi p})].$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{S}^6$ die Einheitssphäre in $\mathrm{Im} \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und e^p die Exponentialabbildung von $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ vom Punkt 1 aus. Man beachte, daß ι wohldefiniert ist, da das Zusammenschlagen des ersten $\mathbb{S}^3$ -Faktors zum Tragen kommt, falls $u = 0$ und damit $|p| = 1$ ist. Außerdem ist ι stetig, da $d(\iota(\left[\begin{smallmatrix} p \\ u \end{smallmatrix} \right]), \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3) \rightarrow 0$ ist, falls $u \rightarrow 0$. Hierzu sei bemerkt, daß das Smashprodukt $\mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3$ eine kanonische Abstandsfunktion $\bar{d}$ von der Standardmetrik d auf $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ erbt:

$$\bar{d}([x], [y]) = \min\{d(x, y), d(x, \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3) + d(y, \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3)\}.$$

Diese Abstandsfunktion $\bar{d}$ induziert die Quotiententopologie auf $\mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3$.

Lemma 9.1. *Die Abbildung $\iota : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß ι surjektiv ist: Sind $q_1, q_2 \in \mathbb{S}^3$ mit $q_1 \neq 1$ und $q_2 \neq -1$, so besitzt die Gleichung $\iota\left(\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}\right) = [(u/|u|, e^{\pi p})] = [(q_1, q_2)]$ genau eine Lösung. Falls $q_1 = 1$ oder $q_2 = -1$ ist, besitzt die letzte Gleichung genau Lösungen der Form $\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$, $u \geq 0$. Dies ist eine zweidimensionale Scheibe D^2 in $\mathbb{S}^6$. Unsere Abbildung ι faktorisiert also wie folgt in zwei Abbildungen:

$$\mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6/D^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3.$$

Hierbei ist die zweite Abbildung stetig und bijektiv und somit ein Homöomorphismus. Daß die erste Abbildung eine Homotopieäquivalenz ist, läßt sich leicht mit Hilfe einer Homotopie $f : \mathbb{S}^6 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^6$ sehen, für die $f_0 = \text{id}_{\mathbb{S}^6}$, $f_t(D^2) \subset D^2$ ist und $f_1(D^2)$ nur aus einem Punkt besteht (siehe z.B. [Br]). $\square$

Die Komposition der Homotopieäquivalenz $\iota : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3$ mit dem Kommutator $c : \mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ liefert nun die Abbildung

$$c \circ \iota : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \mapsto \frac{u}{|u|} e^{\pi p} \frac{\bar{u}}{|u|} e^{-\pi p}.$$

Durch die elementare Homotopie

$$\mathbb{S}^6 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad \left(\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}, t\right) \mapsto \frac{u}{|u|} e^{\pi p} \frac{\bar{u}}{|u|} e^{-\pi t p}.$$

ist $c \circ \iota$ homotop zur Abbildung

$$b : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \mapsto \frac{u}{|u|} e^{\pi p} \frac{\bar{u}}{|u|}.$$

Diese Abbildung b ist die Abbildung $\psi : \mathbb{S}^6 \rightarrow \text{Sp}(1)$ aus Lemma 4.2, wo, der Arbeit [Du-Me-Ri] folgend, gezeigt wurde, daß $b = \psi$ die Homotopiegruppe $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ erzeugt.

Korollar 9.2. *Der Kommutator $c : \mathbb{S}^3 \wedge \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ erzeugt $\pi_6(\mathbb{S}^3) \approx \mathbb{Z}_{12}$.*

Diese Tatsache läßt sich auch auf algebraischem Weg zeigen (siehe [Ja]). Die obige Darstellung zeigt den Zusammenhang zwischen dem geometrisch gewonnen Erzeuger und dem algebraisch gewonnenen.

9.2. Auf dem Weg zur Nullhomotopie. Wir wenden uns nun abschließend dem Problem zu, wie die zwölfte Potenz c^{12} des Kommutators nullhomotop wird. Nach der obigen Diskussion ist dies gleichwertig zu dem Problem, wie b^{12} nullhomotop wird. Gewisse Aspekte der Ordnung 12 haben wir in den vorigen Kapiteln gesehen: Wie in Abschnitt 4.5 und Kapitel 7 beschrieben, liefern die Bündelinklusionen

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sp}(1) & \longrightarrow & \text{SU}(3) & \longrightarrow & \text{G}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sp}(2) & \longrightarrow & \text{SU}(4) & \longrightarrow & \text{Spin}(7) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^7 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^7 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{S}^7, \end{array}$$

eine explizite Homotopie zwischen dem Erzeuger $b = \psi$ von $\pi_6(\text{Sp}(1)) \approx \mathbb{Z}_{12}$ und dem Erzeuger ϕ von $\pi_6(\text{SU}(3)) \approx \mathbb{Z}_6$ in $\text{SU}(3)$, sowie explizite Homotopien zwischen b , ϕ und dem Erzeuger ρ von $\pi_6(\text{G}_2) \approx \mathbb{Z}_3$ in G_2 . Wir haben nun in dieser Arbeit explizite Nullhomotopien von ϕ^6 und ρ^3 aufgefunden und damit das Problem gelöst, wie der Kommutator der Quaternionen in der sechsten bzw. dritten Potenz nullhomotop wird, wenn man $\mathbb{S}^3 = \text{Sp}(1)$ als Untergruppe von $\text{SU}(3)$ bzw. G_2 auffaßt und Homotopien mit Werten in diesen größeren umgebenden Gruppen erlaubt. Entscheidend für die Kürzungseffekte in $\pi_6(\text{SU}(3))$ und $\pi_6(\text{G}_2)$ waren jeweils die

Operationen der Gruppen $SU(3)$ und G_2 durch Konjugation auf sich selbst. Die Abbildung ρ parametrisiert einen Orbit unter dieser Operation und ρ^3 ist einfach die konstante Abbildung auf die Einheitsmatrix. Im Falle von $\pi_6(SU(3))$ multiplizieren sich drei homotope Abbildungen $\phi \circ \Sigma\eta_1$, $\phi \circ \Sigma\eta_2$ und $\phi \circ \Sigma\eta_3$ zur konstanten Abbildung auf die Einheitsmatrix. Wenn es gelänge, eine entsprechende Konfiguration von Abbildungen $\mathbb{S}^6 \rightarrow Sp(1)$ zu finden, würde dies sicher die beste Lösung für das Problem liefern, wie b^{12} und damit c^{12} nullhomotop werden. Bislang haben wir eine solche Konfiguration noch nicht gefunden.

Betrachten wir das Problem von einem anderen Standpunkt aus, so steckt die Information, wie ein zwölftes Element der Homotopiegruppe $\pi_6(\mathbb{S}^3)$ nullhomotop wird, in unserem Erzeuger ξ von $\pi_7(Sp(2))$. Allerdings konnten wir bisher nicht in überzeugender Weise angeben, wie der Repräsentant der zwölften Klasse von $\pi_6(\mathbb{S}^3)$, der durch ξ beschrieben wird, homotop zu c^{12} oder b^{12} ist.

ANHANG A. EINE HOMOTOPIE ZWISCHEN ZWEI ABBILDUNGEN $\mathbb{S}^6 \rightarrow SU(3)$

In diesem Anhang werden wir auf das in Kapitel 6 angesprochene Problem zurückkommen, wie die sechste Potenz des Erzeugers ϕ von $\pi_6(SU(3)) \approx \mathbb{Z}_6$ nullhomotop wird. Um diese Nullhomotopie vollständig zu beschreiben, fehlte noch eine Homotopie zwischen dem Quadrat ϕ^2 des Erzeugers von $\pi_6(SU(3))$ und der Abbildung $\phi \circ \Sigma\eta_1 : \mathbb{S}^6 \rightarrow SU(3)$. Hierbei ist $\Sigma\eta_1 : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6$ die Einhängung von

$$\eta_1 : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathbb{S}^5, \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 + \bar{z}_3 \\ z_1 z_3 - \bar{z}_2 \end{bmatrix},$$

der erste Spalte des in Abschnitt 3.2 beschriebenen Erzeugers von $\pi_5(SU(3))$. Da η_1 und damit auch $\Sigma\eta_1$ Abbildungsgrad 2 besitzen, ist theoretisch sofort klar, daß ϕ^2 und $\phi \circ \Sigma\eta_1$ homotop sind. Die Konstruktion einer solchen Homotopie erfordert prinzipiell mehrere Standardschritte, die schwerlich zu einer expliziten Formel führen. In unserem Fall läßt sich das übliche Verfahren auf zwei wesentliche Schritte verkürzen, die beide zu einer expliziten Formel führen.

Die erste nützliche Beobachtung ist die, daß die Abbildung η_1 homotop zur geodätischen Verdopplung von $\mathbb{S}^5$ vom Punkt $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ aus ist, d.h., zu der Abbildung

$$\mu_1 : \mathbb{S}^5 \rightarrow \mathbb{S}^5, \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 \\ 2(\operatorname{Re} z_1) z_2 \\ 2(\operatorname{Re} z_1) z_3 \end{bmatrix}.$$

Der Grund für diese Homotopie ist einfach, daß entsprechende Werte von η_1 und μ_1 niemals antipodal sind. Genauer gilt, daß der sphärische Abstand zwischen $\eta_1(z)$ und $\eta_2(z)$ gleich $\arccos(|z_1|^2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist. Die einfachste Formel

$$\mathbb{S}^5 \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{S}^5, \quad (z, t) \mapsto \begin{bmatrix} z_1^2 - (|z_2|^2 + |z_3|^2) \sin t \\ z_1 z_2 + \bar{z}_1 z_2 \sin t + \bar{z}_3 \cos t \\ z_1 z_3 + \bar{z}_1 z_3 \sin t - \bar{z}_2 \cos t \end{bmatrix}.$$

für eine explizite Homotopie zwischen η_1 und μ_1 erhält man jedoch nicht, indem man entsprechende Werte durch die eindeutige Geodätische zwischen ihnen ineinander überführt.

Die Homotopie zwischen η_1 und μ_1 induziert eine Homotopie zwischen $\phi \circ \Sigma\eta_1$ und $\phi \circ \Sigma\mu_1$. Hierbei läßt sich $\Sigma\mu_1$ schreiben als

$$\Sigma\mu_1 : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6, \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{2-y^2} y \\ \mu_1(z) \end{bmatrix}.$$

Da μ_1 Abbildungsgrad 2 besitzt, besitzt auch $\Sigma\mu_1$ Abbildungsgrad 2.

Der entscheidende Schritt zur Konstruktion einer Homotopie zwischen ϕ^2 und $\phi \circ \Sigma\mu_1$ besteht nun darin, ϕ^2 in eine Abbildung $\phi \circ f$ zu deformieren, wobei $f : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6$ eine Abbildung ist, die man wiederum einfach in $\Sigma\mu_1$ deformieren können

sollte. Hierbei beachte man, daß ϕ^2 und ϕ nicht dasselbe Bild in $SU(3)$ besitzen, so daß eine Deformation der Identität von $\mathbb{S}^6$ allein dieses Problem nicht lösen kann.

Wir betrachten die beiden Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{S}^6 \times [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{S}^6$,

$$f_1\left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, r\right) = \begin{cases} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r-1+y \\ \sqrt{1+\frac{2(r-1)}{1+y}} z \end{bmatrix}, & \text{falls } y \geq 1-2r, \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{falls } y \leq 1-2r, \end{cases}$$

$$f_2\left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, r\right) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{falls } y \geq 2r-1, \\ \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r-1-y \\ \sqrt{1+\frac{2(r-1)}{1-y}} z \end{bmatrix}, & \text{falls } y \leq 2r-1 \end{cases}$$

und die Homotopie

$$\mathbb{S}^6 \times [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow SU(3), \quad \left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, r\right) \mapsto \phi(f_1(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, r)) \cdot \phi(f_2(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, r)).$$

Für $r = 1$ ergibt sich $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \phi(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}) \cdot \phi(\begin{bmatrix} -y \\ z \end{bmatrix})$. Diese Abbildung ist offensichtlich homotop zu ϕ^2 . Für $r = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Abbildung $\phi \circ f$, wobei $f : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6$ durch

$$f\left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2y-1 \\ 2\sqrt{\frac{y}{1+y}} z \end{bmatrix}, & \text{falls } y \geq 0, \\ \begin{bmatrix} -2y-1 \\ 2\sqrt{\frac{-y}{1-y}} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ -z_2 \\ -z_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \text{falls } y \leq 0 \end{cases}$$

definiert ist. Diese Abbildung f hat Abbildungsgrad 2. Es verbleibt noch, eine Homotopie zwischen f und $\Sigma\mu_1$ zu finden. Dazu verwenden wir die Transformation

$$A : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6, \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\operatorname{Re} z_1 \\ y+i\operatorname{Im} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

die in $SO(7)$ liegt und daher homotop zur Identität von $\mathbb{S}^6$ ist. Folgerichtig ist

$$A^{-1} \circ \Sigma\mu_1 \circ A : \mathbb{S}^6 \rightarrow \mathbb{S}^6, \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{y^2 - |z_2|^2 - |z_3|^2 - (\operatorname{Im} z_1)^2}{\sqrt{2 - (\operatorname{Re} z_1)^2}} \operatorname{Re} z_1 + 2iy \operatorname{Im} z_1 \\ 2yz_2 \\ 2yz_3 \end{bmatrix}$$

homotop zu $\Sigma\mu_1$. Es ist aber nun direkt offensichtlich, daß einander entsprechende Werte von $A^{-1} \circ \Sigma\mu_1 \circ A$ und f niemals antipodal sind. Daher ist $\Sigma\mu$ homotop zu f .

ANHANG B. TABELLEN DER HOMOTOPIEGRUPPEN DER KLASSISCHEN GRUPPEN

In den folgenden Tabellen der ersten Homotopiegruppen der klassischen Gruppen $SO(n)$, $SU(n)$ und $Sp(n)$ trennt die schwarze Linie den stabilen vom nicht-stabilen Bereich. In der Tabelle der Homotopiegruppen der unitären Gruppe bedeutet ein c bzw. ein t unter $\pi_k(SU(n))$, daß jede Abbildung $\mathbb{S}^k \rightarrow U(n)$ homotop zum Komplexkonjugierten bzw. Transponierten ist. Für umfangreichere Tabellen sei auf [Lu2] verwiesen.

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	$\mathbb{Z}_t$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
2	0	0	0	0	0	0
3	0	$\mathbb{Z}_c$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
4	0	$\mathbb{Z}_2$ $t \ c$	0	0	0	0
5	0	$\mathbb{Z}_2$ $t \ c$	$\mathbb{Z}_t$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
6	0	$\mathbb{Z}_{12}$ c	$\mathbb{Z}_6$ c	0	0	0
7	0	$\mathbb{Z}_2$ $t \ c$	0	$\mathbb{Z}_c$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
8	0	$\mathbb{Z}_2$ $t \ c$	$\mathbb{Z}_{12}$ t	$\mathbb{Z}_{24}$ t	0	0
9	0	$\mathbb{Z}_3$ c	$\mathbb{Z}_3$ c	$\mathbb{Z}_2$ $t \ c$	$\mathbb{Z}_t$	$\mathbb{Z}$
10	0	$\mathbb{Z}_{15}$ c	$\mathbb{Z}_{30}$ c	$\mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_2$ c	$\mathbb{Z}_{120}$ c	0

TABELLE 1. Die ersten Homotopiegruppen $\pi_k(U(n))$

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
4	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
5	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
6	$\mathbb{Z}_{12}$	0	0	0	0	0
7	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
8	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0	0
9	$\mathbb{Z}_3$	0	0	0	0	0
10	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{120}$	0	0	0	0
11	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
12	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
13	$\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

TABELLE 2. Die ersten Homotopiegruppen $\pi_k(Sp(n))$

$k \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$\mathbb{Z}$	$2 \cdot \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
4	0	$\mathbb{Z}_2$	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	0
5	0	$\mathbb{Z}_2$	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
6	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$2 \cdot \mathbb{Z}_{12}$	0	0	0	0	0
7	0	$\mathbb{Z}_2$	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
8	0	$\mathbb{Z}_2$	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$2 \cdot \mathbb{Z}_2$	$3 \cdot \mathbb{Z}_2$	$3 \cdot \mathbb{Z}_2$

TABELLE 3. Die ersten Homotopiegruppen $\pi_k(\mathrm{O}(n))$

LITERATUR

- [Bl-Ma] A. L. Blakers, W. S. Massey, *The homotopy groups of a triad*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **35** (1949), 322–328.
- [Bo-Hi] A. Borel, F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces. II.*, Amer. J. Math. **81** (1959), 315–382.
- [Bo-Se] A. Borel, J.-P. Serre, *Groupes de Lie et puissances reduites de Steenrod*, Amer. J. Math. **75**, (1953), 409–448.
- [Bt1] R. Bott, *The space of loops on a Lie group*, Michigan Math. J. **5** (1958), 35–61.
- [Bt2] R. Bott, *The stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math. **70** (1959), 313–337.
- [Bt-Mi] R. Bott, J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.
- [Br] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer, New York, 1993.
- [Ch-Ri1] L. M. Chaves, A. Rigas, *Complex reflections and polynomial generators of homotopy groups*, J. Lie Theory **6** (1996), 19–22.
- [Ch-Ri2] L. M. Chaves, A. Rigas, *On a conjugate orbit of G_2* , Math. J. Okayama Univ. **33** (1991), 155–161.
- [Du] C. E. Duran, *Pointed Wierdersehen metrics on exotic spheres and diffeomorphisms of S^6* , Geom. Dedicata **88** (2001), 199–210.
- [Du-Me-Ri] C. E. Duran, A. Mendoza, A. Rigas, *Blakers-Massey elements and exotic diffeomorphisms of S^6 and S^{14}* , erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.
- [Eck1] B. Eckmann, *Hurwitz-Radon matrices revisited: from effective solution of the Hurwitz matrix equations to Bott periodicity* in “The Hilton symposium 1993” (Montreal, PQ), 23–35, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 6, AMS, Providence, RI, 1994.
- [Eck2] B. Eckmann, *Hurwitz-Radon matrices and periodicity modulo 8*, Enseign. Math. **35** (1989), 77–91.
- [Eck3] B. Eckmann, *Topology, algebra, analysis—relations and missing links*, Notices Amer. Math. Soc. **46** (1999), 520–527.
- [Fo] A. T. Fomenko, *Variational principles of topology. Multidimensional minimal surface theory*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 42, Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [Fr] H. Freudenthal, *Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I. Große Dimensionen*, Compositio math. **5** (1937), 299–314.
- [Hs-La] W. Y. Hsiang, H. B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differ. Geom. **5** (1971), 1–38.
- [Hu] S. T. Hu, *Homotopy theory*, Pure and Applied Mathematics VIII, Academic Press, New York, 1959.
- [Ja] I. M. James, *On H-spaces and their homotopy groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **11** (1960), 161–179.

- [Ka] H. Kachi, *Homotopy groups of homogeneous space $SU(n)/SO(n)$* , J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **13** (1978), 27–34.
- [Ke1] M. Kervaire, *Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$* , Proc. Natl. Acad. Sci. USA **44** (1958), 280–283.
- [Ke2] M. Kervaire, *Some nonstable homotopy groups of Lie groups*, Illinois J. Math. **4** (1960), 161–169.
- [Ke3] M. Kervaire, *On the Pontryagin classes of certain $SO(n)$ -bundles over manifolds*, Amer. J. Math. **80** (1958), 632–638.
- [Lu1] A. T. Lundell, *A Bott map for non-stable homotopy of the unitary group*, Topology **8** (1969) 209–217.
- [Lu2] A. T. Lundell, *Concise tables of James numbers and some homotopy of classical groups and associated homogeneous spaces*, in: Algebraic Topology (San Feliu de Guixols, 1990), 250–272, Lecture Notes in Math. 1509, Springer, Berlin, 1992.
- [Lu-To] A. T. Lundell, Y. Tosa, *Explicit construction of nontrivial elements for homotopy groups of classical Lie groups*, J. Math. Phys. **31** (1990), 1494–1502.
- [Mi] M. Mimura, *The homotopy groups of Lie groups of low rank*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 131–176.
- [Mi-To] M. Mimura, H. Toda, *Topology of Lie groups I, II*, Translations of Mathematical Monographs, 91. AMS, Providence 1991.
- [Pae] G. F. Paechter, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$. I.*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **7** (1956), 249–268.
- [Pü-Ri] T. Püttmann, A. Rigas, *Presentations of the first homotopy groups of the unitary groups*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 648–662.
- [Ri] A. Rigas, *S^3 -bundles and exotic actions*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 69–92.
- [St] N. E. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press 1951.
- [To] H. Toda, *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of Mathematics Studies, No. 49, Princeton 1962.
- [To-Sa-Yo] H. Toda, Y. Saito, T. Yokota, *A note on the generator of $\pi_7(SO(n))$* , Mem. Coll. Sci. Uni. Kyoto Ser. A **30** (1957), 227–230.
- [Wi] E. Witten, *Global aspects of current algebra*, Nucl. Phys. B **223** (1983), 422–423.

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM, FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, D-44780 BOCHUM, GERMANY
E-mail address: `puttmann@math.ruhr-uni-bochum.de`