PA 57: Eine *Pseudosphäre* entsteht, wenn man die Kurve

$$\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^3, \quad \vartheta \mapsto \begin{pmatrix} \cosh^{-1} \vartheta \\ 0 \\ \vartheta - \tanh \vartheta \end{pmatrix}$$

um die z-Achse rotieren lässt.

a) Skizzieren Sie die Kurve γ und die Pseudosphäre.

b) Geben Sie die zugehörige Hyperflächenparametrisierung F an.

c) Berechnen Sie die Gaußkrümmung der Pseudosphäre.

PA 58: Wir betrachten das durch die Gleichung $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ gegebene Hyperboloid.

a) Zeigen Sie: Das Hyperboloid entsteht, wenn man eine windschiefe Gerade um die z-Achse dreht.

b) Berechnen Sie die Gaußkrümmung des Hyperboloids.

c) Kann man kleine Stücke des Hyperboloids längentreu auf die euklidische Ebene abbilden?

PA 59: Wir betrachten die obere Halbebene $U = \mathbb{R}\times\,]0,\infty[$ mit der Riemannschen Metrik

$$g_{|\binom{\lambda}{r}}(u,v) = \left\langle \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, v \right\rangle = r^2 u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Man schreibt dafür auch kurz $g = dr^2 + r^2 d\lambda^2$.

a) Zeigen Sie: $d_u g_{|\binom{\lambda}{r}}(v,w) = 2ru_2v_1w_1$.

b) Zeigen Sie: $w_1 = \frac{1}{r^2} g_{|\binom{\lambda}{r}}\left(\binom{1}{0}, w\right)$ und $w_2 = g_{|\binom{\lambda}{r}}\left(\binom{0}{1}, w\right)$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Bestimmungsformel

$$2g(\Gamma(u,v),w) = d_u g(v,w) + d_v g(u,w) - d_w g(u,v),$$

dass die Christoffelform Γ durch

$$\Gamma(u,v) = \frac{1}{r}(u_1v_2 + u_2v_1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - ru_1v_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

gegeben ist.

d) Zeigen Sie: $c(t) = \binom{\lambda_0}{t}$ ist eine Geodätische, d. h. es gilt

$$\ddot{c}(t) + \Gamma_{|c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0.$$

e) Berechnen Sie den Paralleltransport des Vektors $\binom{0}{1}$ längs der Kurve

$$\gamma : [0,2\pi] \to U, \quad t \mapsto \binom{t}{r_0},$$

indem Sie die Differentialgleichung

$$0 = \dot{X}(t) + \Gamma_{|\binom{\lambda}{r}}(\dot{c}(t), X(t))$$

lösen.

HA 29: Sei $F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine reguläre Hyperflächenparametrisierung.

a) Zeigen Sie: Ist $x_0 \in U$ ein Punkt, so dass der Abstand zwischen $F(x_0)$ und einem Punkt p lokal maximal ist, so ist die zweite Fundametalform $\alpha_{|x_0}$ positiv oder negativ definit. Genauer gilt:

$$\alpha_{|x_0}(v,v) \leq -\tfrac{1}{|F(x_0)-p|}\, g_{|x_0}(v,v) \quad \text{oder} \quad \alpha_{|x_0}(v,v) \geq \tfrac{1}{|F(x_0)-p|}\, g_{|x_0}(v,v)$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$. *Anleitung:* Differenzieren Sie die Funktion

$$f(x) = \langle F(x) - p, F(x) - p \rangle$$

auf U zweimal. Die erste Ableitung liefert Ihnen den Einheitsnomalenvektor $N_{|x_0}$ bis aufs Vorzeichen. Siehe auch PA 10 für den Fall $n = 1$.

b) Folgern Sie, dass im Fall $n = 2$ für die Gaußkrümmung $K_{|x_0} > 0$ gilt.

c) Folgern Sie, dass es keine kompakten Minimalflächen gibt.

HA 30: Die *Scherkfläche* ist gegeben durch den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = \ln \tfrac{\cos x}{\cos y}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Scherkfläche eine Minimalfläche ist.

b) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f um $0 \in \mathbb{R}^2$ und das Verhalten von f am Rand des Definitionsbereichs.

c) Skizzieren Sie die Fläche.

d) Seien $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $F(-x,y) = S \circ F(x,y)$ ist und folgern Sie, dass der Teil der y-Achse, der im Definitionsgebiet von F liegt, bzw. sein Bild unter F eine Geodätische ist.

e) Zeigen Sie analog, dass der Teil der x-Achse, der im Definitionsgebiet von F liegt, eine Geodätische ist.