Regularisierungen von Algebro - Differentialgleichungen bei elektrischen Netzwerken *

von
Michael Knorrenschild ‡

Differentialgleichungen mit algebraischen Nebenbedingungen (DAEs) können formal als sogenannte reduzierte Gleichungen (“ε=0”) von singulär gestörten gewöhnlichen Differentialgleichungen (“ε>0”) aufgefaßt werden. Hier soll aufgezeigt werden, daß dies bei vielen aus der Analyse elektrischer Netzwerke stammenden DAEs nicht nur formal so ist, sondern durchaus auch physikalische Hintergründe hat. Wir geben an, wie man aus der reduzierten Gleichung eine physikalisch sinnvolle singulär gestörte rekonstruiert.

1. DAEs und elektrische Netzwerke

Definition 1: (“*Algebro - Differentialgleichung, DAE*”)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $f \in \mathrm{C}^1([a,b] \times D, \mathbb{R}^{\mathrm{m}})$, $g \in \mathrm{C}^1([a,b] \times D, \mathbb{R}^{\mathrm{n-m}})$.

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), z(t)) \\ 0 &= g(t, y(t), z(t)) \qquad \text{für } t \in [a,b] \end{aligned}$$

heißt *Algebro-Differentialgleichung* oder *DAE* (*Differential-Algebraic Equation*).
Die Gleichung heißt *Index-1-DAE* genau dann, wenn für alle $t \in [a,b]$, $(y,z) \in D$ die Inverse der Funktionalmatrix $g_z(t,y,z)$ existiert.

Wie entstehen nun DAEs bei der Analyse elektrischer Netzwerke?

Gegeben sei ein Netzwerk $\mathcal{N}$, das aus (spannungskontrollierten) Widerständen, Kapazitäten und Stromquellen besteht.
$\mathcal{N}$ sei vollständig in Zweige zerlegt, die jeweils genau eines dieser Bauelemente enthalten. Wir interessieren uns dabei für die Spannungen in den einzelnen Zweigen. Der Vektor $(y(t), z(t))^T$ soll die Spannungen in den Zweigen zum Zeitpunkt t enthalten, und zwar sollen in $y(t)^T$ die aus Zweigen mit einer Kapazität und in $z(t)^T$ die aus Zweigen mit einem Widerstand stehen.
Die Anwendung der Knotenregel führt dann auf eine Gleichung der Form

$$\begin{array}{llcll} (1a) & C(t)y'(t) & = & f(t, y(t), F(z(t))) & y(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \\ (1b) & 0 & = & g(t, y(t), F(z(t))) & z(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n-m}} \end{array}$$

* Vortrag an der Universität Hamburg, Juni 1987

‡ Adresse (Juli 1990): Dept. of Math., Simon Fraser University, Burnaby, B. C., V5A 1S6, Canada

$C(t)$ ist dabei eine $m \times m$-Matrix, deren Elemente Kapazitäten sind. Wir nehmen im folgenden an, daß $C(t)$ für alle in Frage kommenden t regulär ist. Weiter ist

$$F(z(t)) := (k_1(z_1(t)), ..., k_{n-m}(z_{n-m}(t)))^T,$$

wobei die Kennlinien der Widerstände durch die Funktionen k_i gegeben sind (z_i sind die Komponenten von z).

2. Aufstellung des regularisierten Systems nach physikalischen Überlegungen

Unser Ziel ist nun die Konstruktion von Funktionen $f(.,\varepsilon), g(.,\varepsilon)$ stetig in ε, so daß $f(.,0) = f$ und $g(.,0) = g$ gilt und für die Lösung $(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))^T$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(2a) \qquad C(t)y'(t) = f(t, y(t), F(z(t)), \varepsilon)$$

$$(2b) \qquad \varepsilon \cdot z'(t) = g(t, y(t), F(z(t)), \varepsilon)$$

gilt: $\lim_{\varepsilon \to 0+} y_\varepsilon(t) = y_0(t)$, $\lim_{\varepsilon \to 0+} z_\varepsilon(t) = z_0(t)$ gleichmäßig auf $[c, d]$ mit $a < c < d \leq b$ (bei gewissen Einschränkungen an die Anfangswerte); hierbei ist $(y_0(t), z_0(t))^T$ die Lösung von (1).
(2) bezeichnen wir als *eine Regularisierung von (1).*

Wie kann das nun physikalisch sinnvoll geschehen?

An dieser Stelle hilft uns die Erkenntnis weiter, daß die Kirchhoffschen Gesetze einen **Idealzustand** beschreiben, der in der Realität nie so gegeben ist. Vielmehr werden dabei z. B. gewisse physikalische Eigenschaften der im Netzwerk verwendeten Materalien vernachlässigt.
Wir konzentrieren unsere Aufmerksamkeit hier auf folgendes Phänomen:

Jede Potentialdifferenz (z. B. zwischen benachbarten Leitern) erzeugt ein schwaches elektrisches Feld, verhält sich also, als ob eine Kapazität $C = \varepsilon$ (Grössenordnung ca. 10^{-12} Farad laut [1], S. 60) parallel geschaltet ist.

Insbesondere bei geringen Abmessungen eines Netzwerks (integrierte Schaltkreise!!) wird dieser Effekt eine Rolle spielen.
Weitere "parasitäre" Effekte wären z. B. Innenwiderstände und Temperaturabhängigkeiten; von denen soll hier abgesehen werden.

Wir sehen also, daß ein genaueres Modell für einen Widerstand ein Widerstand parallel geschaltet mit einer sehr kleinen Kapazität wäre. Das legt folgendes Vorgehen nahe:
Das durch (1) beschriebene Netzwerk $\mathcal{N}$ wird durch Einfügen einiger parasitärer Kapazitäten zu einem erweiterten Netzwerk $\tilde{\mathcal{N}}$, das dann (hoffentlich!) durch eine Gleichung vom Typ (2) beschrieben wird. Diese Erweiterung geschieht, indem zu jedem einzelnen Widerstand eine Kapazität der Größenordnung ε parallel geschaltet wird. Die Netzwerkgleichung (1) muß aber nun modifiziert werden, und zwar so:

Sei der Widerstand kontrolliert durch die Spannung $z_i, \;\; i \in \{1, \ldots, n-m\}$ und die Kennlinie gegeben durch den Graphen der Funktion k_i. Dann muß in (1) $k_i(z_i(t))$ durch $k_i(z_i(t)) + \varepsilon z_i'(t)$ ersetzt werden. Insgesamt führt das auf die Ersetzung von $F(z)$ in (1) durch $F(z) + \varepsilon z'$. Man erhält also:

$$C(t)y'(t) = f(t, y(t), F(z(t)) + \varepsilon z'(t)) \tag{3a}$$

$$0 = g(t, y(t), F(z(t)) + \varepsilon z'(t)) \tag{3b}$$

3. Mathematische Analyse von Regularisierungen

Aussagen über den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (1) und (2) werden durch Anwendung des folgenden Satzes ermöglicht.

Satz 1: (Levin,Levinson) [2]

Vor.: *die Gleichung*

$$\begin{array}{llcll} (4a) & y'(t) & = & f(t, y(t), z(t), \varepsilon) & y(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \\ (4b) & 0 & = & g(t, y(t), z(t), \varepsilon) & z(t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n-m}} \end{array}$$

habe für $\varepsilon = 0$ zum Anfangswert y_a, z_a eine Lösung $(y_0(t), z_0(t))$ auf $[a, b]$ mit $y_0(a) = y_a, z_0(a) = z_a$;
für alle $t \in [a, b]$ gelte: λ Eigenwert von $g_z(t, y_0(t), z_0(t), 0) \Rightarrow Re(\lambda) < 0$

Beh.: *Es gibt $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$ mit*
(1) besitzt für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ zu jedem Anfangswert $\tilde{z}_a$ mit $\|\tilde{z}_a - z_a\| < \delta$ eine Lösung $(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ mit $y_\varepsilon(a) = y_a, z_\varepsilon(a) = \tilde{z}_a$ und
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} y_\varepsilon(t) = y_0(t), \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} z_\varepsilon(t) = z_0(t)$ gleichmäßig auf $[c, d]$ mit $a < c < d \leq b$.

Bemerkung: Einfachste Beispiele zeigen, daß die Voraussetzung an die Eigenwerte von g_z nicht ohne Schaden gestrichen werden kann.

Damit gewinnen wir für (3) sofort folgenden

Satz 2:

Vor.: *(1) habe zum Anfangswert y_a, z_a eine Lösung $(y_0(t), z_0(t))$ auf $[a, b]$ mit $y_0(a) = y_a, z_0(a) = z_a$; $C(t)$ sei regulär auf $[a, b]$; die Kennlinien k_i der Widerstände seien streng monoton steigend und stetig differenzierbar*

Beh.: *Es gibt $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$ mit*
(3) besitzt für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ zu jedem Anfangswert $\tilde{z}_a$ mit $\|\tilde{z}_a - z_a\| < \delta$ eine Lösung $(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ mit $y_\varepsilon(a) = y_a, z_\varepsilon(a) = \tilde{z}_a$ und
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} y_\varepsilon(t) = y_0(t), \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} z_\varepsilon(t) = z_0(t)$ gleichmäßig auf $[c, d]$ mit $a < c < d \leq b$.

Beweis:
Wir setzen einfach $y_\varepsilon(t) = y_0(t)$ und definieren z_ε als Lösung des Anfangswertproblems

$$\varepsilon z_\varepsilon'(t) = -F(z_\varepsilon(t)) + F(z_0(t)), \qquad z_\varepsilon(a) = \tilde{z}_a$$

Daraus ersieht man sofort, daß $y_\varepsilon, z_\varepsilon$ (3) erfüllen. Die Konvergenzeigenschaft ist für y_ε trivial und für z_ε folgt sie aus Satz 1, denn die Matrix $-F'(z_0(t))$ hat nur negative Eigenwerte wegen

$$F'(z_0(t)) = diag(k_1'(z_{01}(t)), \ldots, k_{n-m}'(z_{0n-m}(t))$$

und $k_i' > 0$ nach Vor.. ■

Bemerkung:
Unter den Voraussetzungen von Satz 2 und der Annahme, daß es sich bei (1) um eine Index-1-DAE handelt, sieht man, daß die Regularisierung aus der DAE eine implizite, gewöhnliche Differentialgleichung macht. In (3) kann man dann (lokal) nach $y'(t), z'(t)$ auflösen (Satz über implizite Funktionen); der Index ist damit um 1 reduziert worden.

Eine unschöne Einschränkung in dem bis hierhin dargestellten Zugang besteht darin, daß die eingefügten parasitären Elemente alle die gleiche Größe haben. Glücklicherweise bleibt die Aussage von Satz 2 aber auch im allgemeineren Fall gültig:

Satz 3: (Multiparameterversion von Satz 2)

Vor.: *wie in Satz 2;*

$$(5a) \qquad C(t)y'(t) = f(t, y(t), F(z(t)) + \mathcal{E}z'(t))$$
$$(5b) \qquad 0 = g(t, y(t), F(z(t)) + \mathcal{E}z'(t))$$

mit $\mathcal{E} = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-m}), \quad \varepsilon_i > 0.$

Beh.: *Es gibt* $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$ *mit*
(5) besitzt für $0 < \|\mathcal{E}\| \leq \varepsilon_0$ *zu jedem Anfangswert* $\tilde{z}_a$ *mit* $\|\tilde{z}_a - z_a\| < \delta$ *eine Lösung* $(y_\mathcal{E}(t), z_\mathcal{E}(t))$ *mit* $y_\mathcal{E}(a) = y_a, z_\mathcal{E}(a) = \tilde{z}_a$ *und*
$\lim_{\mathcal{E}\to 0} y_\mathcal{E}(t) = y_0(t), \lim_{\mathcal{E}\to 0} z_\mathcal{E}(t) = z_0(t)$ *gleichmäßig auf* $[c, d]$ *mit* $a < c < d \leq b$.

Beweis:
Einfach den Beweis von Satz 2 noch einmal lesen und dabei beachten, daß die zur Definition von $z_\mathcal{E}$ verwendeten Gleichungen komponentenweise entkoppelt sind, also unabhängig voneinander betrachtet werden können. ■

Wir wollen uns nun von den Netzwerken lösen, um allgemeinere Regularisierungen zu erhalten. (Im folgenden sei stets o. B. d. A. $C(t) = I$.) Zunächst eine Einparameter-Regularisierung:

Satz 4:

Vor.: *(4) habe zum Anfangswert* y_a, z_a *eine Lösung* $(y_0(t), z_0(t))$ *auf* $[a,b]$ *mit* $y_0(a) = y_a, z_0(a) = z_a$; $F \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n-m}} \times \mathrm{I\!R}, \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n-m}})$ *mit*
$F(.,\varepsilon)$ *bijektiv für alle* $\varepsilon \in \mathrm{I\!R}$;
für alle $t \in [a,b]$ *gelte:* λ *Eigenwert von* $F'(z_0(t),0) \Rightarrow Re(\lambda) > 0$

(6a) $$y'(t) = f(t, y(t), F^{-1}(F(z(t),\varepsilon) + \varepsilon z'(t), \varepsilon))$$

(6b) $$0 = g(t, y(t), F^{-1}(F(z(t),\varepsilon) + \varepsilon z'(t), \varepsilon))$$

Beh.: *Es gibt* $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$ *mit*
(6) besitzt für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *zu jedem Anfangswert* $\tilde{z}_a$ *mit* $\|\tilde{z}_a - z_a\| < \delta$ *eine Lösung* $(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ *mit* $y_\varepsilon(a) = y_a, z_\varepsilon(a) = \tilde{z}_a$ *und*
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} y_\varepsilon(t) = y_0(t)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} z_\varepsilon(t) = z_0(t)$ *gleichmäßig auf* $[c,d]$ *mit* $a < c < d \leq b$.

Beweis:
Analog zum Beweis von Satz 2. ■

Unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich auch eine Multiparameter- Version beweisen.

Definition 2:
Eine $n \times n$-Matrix (a_{ij}) heißt *strikt diagonaldominant* genau dann, wenn

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Satz 5: (Multiparameterversion von Satz 4)

Vor.: *(4) habe zum Anfangswert* y_a, z_a *eine Lösung* $(y_0(t), z_0(t))$ *auf* $[a,b]$ *mit* $y_0(a) = y_a, z_0(a) = z_a$; $F \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n-m}} \times \mathrm{I\!R}, \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n-m}})$ *mit*
$F(.,\varepsilon)$ *bijektiv für alle* $\varepsilon \in \mathrm{I\!R}$;
für alle $t \in [a,b]$ *sei die Matrix* $F'(z_0(t),0)$ *strikt diagonaldominant;*
für $i = 1, \ldots, n-m$ *sei* $\varepsilon_i := k_i \cdot \varepsilon$, *wobei* $k_i > 0$; $K := diag(k_1, \ldots, k_{n-m})$;

(7a) $$y'(t) = f(t, y(t), F^{-1}(F(z(t),\varepsilon) + \varepsilon K \cdot z'(t), \varepsilon))$$

(7b) $$0 = g(t, y(t), F^{-1}(F(z(t),\varepsilon) + \varepsilon K \cdot z'(t), \varepsilon))$$

Beh.: *Es gibt* $\delta > 0, \varepsilon_0 > 0$ *mit*
(7) besitzt für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *zu jedem Anfangswert* $\tilde{z}_a$ *mit* $\|\tilde{z}_a - z_a\| < \delta$ *eine Lösung* $(y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ *mit* $y_\varepsilon(a) = y_a, z_\varepsilon(a) = \tilde{z}_a$ *und*
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} y_\varepsilon(t) = y_0(t)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} z_\varepsilon(t) = z_0(t)$ *gleichmäßig auf* $[c,d]$ *mit* $a < c < d \leq b$.

Beweis:
Aus der strikten Diagonaldominanz in Verbindung mit dem Satz von Gerschgorin folgt: für alle $t \in [a,b]$ gilt: λ Eigenwert von $F'(z_0(t),0) \Rightarrow Re(\lambda) > 0$.
Das gleiche gilt für die Matrix $K^{-1} \cdot F'(z_0(t),0)$, denn diese ist auch wieder strikt diagonaldominant. Der Rest des Beweises läuft analog zum Beweis von Satz 2. ■

Bemerkungen:

1. Die Aussage von Satz 5 bleibt offensichtlich auch für den Fall parasitärer Elemente $k_i\varepsilon,\ k_i > 0$ mit variablem $k_i = k_i(t)$ richtig.
2. Die hier an einer Klasse von Netzwerken vorgestellte Regularisierung läßt sich in analoger Weise auch für Netzwerke, die nur Induktivitäten, Spannungsquellen, und (stromkontrollierte) Widerstände enthalten, durchführen.
3. Ein Spezialfall der hier behandelten Regularisierungen ist die Methode, in (1) $z(t)$ durch $z(t) + \varepsilon z'(t)$ zu ersetzen: $F(z) = z$. Behandelt man ebenso die y–Variablen, so führt dies im Falle, daß f und g linear sind, auf die sogenannte "pencil–regularization", siehe z. B. [3].
4. Die Methode der Einfügung parasitärer Elemente wird bereits in [4] verwendet, um Netzwerkgleichungen in Normalform (d. h. als gewöhnliche Differentialgleichung) zu formulieren (ohne Konvergenzanalyse). Eine mathematische Analyse der Netzwerkgleichungen nach Einfügen von parasitären Elementen (Konvergenz!) findet man für den Index-1-Fall und unter der Annahme $\varepsilon_i/\varepsilon_j = const.$ schon in [5].

Literatur:

[1] : C. A. Desoer; E. S. Kuh: Basic Circuit Theory; McGraw Hill,1969

[2] : J. J. Levin; N. Levinson: Singular Perturbations of Nonlinear Systems of Differential Equations and an associated Boundary Layer Equation
J. Ration. Mech. Anal. (heißt jetzt "Ind. J. Math.") 3 (1954), 247-270

[3] : S. L. Campbell: Regularizations for Linear Time Varying Singular Systems
Automatica 20 (1984), 365-370

[4] : L. O. Chua; R. A. Rohrer: On the Dynamic Equations of a Class of Nonlinear RLC Networks
IEEE Transactions on Circuit Theory 12 (1965), 475-489

[5] : L. O. Chua; G. R. Alexander: The Effects of Parasitic Reactances on Nonlinear Networks
IEEE Transactions on Circuit Theory 18(1971), 520-532