Errata zu
“Numerische Mathematik” von Michael Knorrenschild

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag 2008 (3. Aufl.),
ISBN: 978-3-446-41261-1

Die Änderungen sind rot hervorgehoben. Dank an Franz Niederl (Graz), Michael Schlosser (Koblenz), Alessandro Lenzen (Aachen), Prof. Dr. Uwe Schnell (Zittau), Marc Finkenzeller (Offenburg), Dr. Karl-Heinz Brakhage (Aachen), Prof. Dr. Stefan Glasauer (Augsburg), Dr. Nadine Conza (Windisch), Anton Feist (Bielefeld), Christian Frei (Basel), Andreas Zeh-Marschke (Eggenstein-Leopoldshafen) und León Kreutz (Bochum) für Beiträge zu dieser Liste.

S. 18 update 22.07.2019

$$\frac{x\,y - \tilde{x}\,\tilde{y}}{x\,y} = \frac{x-\tilde{x}}{x} + \frac{y-\tilde{y}}{y} - \frac{x-\tilde{x}}{x} \cdot \frac{y-\tilde{y}}{y}.$$

S. 32

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{0.75^n}{1-0.75}0.3 = 1.2 \cdot 0.75^n \overset{!}{\leq} 10^{-4} \iff n \geq 32.6\ldots$$

S. 33

Siehe Bild 2.2. Das geht natürlich nur, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist, d. h. wenn die Tangente nicht parallel zur x-Achse liegt. Die Stelle x_1 sollte dann eine bessere

---

S. 37 neu 05.09.2020

Aufgaben

[...]

2.6 Das Bauer-Ziege-Wiese-Problem: [...]
abgrasen kann (s. Bild 2.5). Wie groß ist r?

S. 44

3.5 [. . .]

$$\boldsymbol{A}_4\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -10 & 12 & 17 \\ 14 & -20 & -14 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -44 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 30 \\ -125 \\ 100 \end{pmatrix}$$

S. 46

Beispiel 3.5

[...]

Lösung:

$$\xrightarrow{z_3:=z_3-0.75\,z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2.5 & -2.5 \\ 0 & 2.5 & -4.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3:=z_3-z_2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

S. 56

Beispiel 3.12

[...]

Lösung: [...]

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 12.1,\ \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = 732.05,\ \|\boldsymbol{b}\|_\infty = 1.5,\ \|\boldsymbol{\Delta b}\| \le 0.1$$

[...] also $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} = 0.363 < 1$, [...]

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \frac{732.05}{1-0.363}\left(\frac{0.006}{12.1} + \frac{0.1}{1.5}\right) \le 77.2.$$

[...]

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2.003 & 4.003 \\ 3.997 & 8.097 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

S. 57

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10.5 \\ -5 \end{pmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 4.043 \\ -1.798 \end{pmatrix} \implies \|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 6.4574,\ \frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = 0.615.$$

Wir sehen also, dass der relative Fehler des Lösungsvektors ca. 62 % beträgt;

S. 59

$$x_2^{(n+1)} = 0.4\,x_1^{(n)} - 0.2\,x_3^{(n)} + 2.2 \tag{3.9}$$

S. 60, unten:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n+1)} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

S. 62

[...] das sog. *Zeilensummenkriterium*. Matrizen, die diese Bedingung erfüllen, nennt man auch *diagonaldominant*.

Für die 1-Norm erhalten wir analog:

$$\|\boldsymbol{B}\|_1 = \|\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{R})\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad \blacksquare$$

Hinreichend für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens ist auch das *Spaltensummenkriterium*:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad \text{für alle } j = 1,\ldots,n.$$

Einen Nachweis findet man z. B. in [21].

S. 63

Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ist:

$$\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \max\{\, 0.002675,\ 0.00142,\ 0.00246 \,\} = 0.002675,$$

und ist damit etwa 10mal kleiner als unsere Abschätzung suggeriert.

S. 66, 5.te Zeile in 4.2 neu 17.10.2014

Eine entsprechende Linearisierung ist ebenfalls für $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ möglich.

S. 67 neu 17.10.2014

Algorithmus: Newton-Verfahren

Gesucht sind Nullstellen von $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

S. 70

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(0)})\,\boldsymbol{\delta}^{(1)} = \boldsymbol{Df}(4,2)\,\boldsymbol{\delta}^{(1)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = -\boldsymbol{f}(-2.909, 1.455) \\ \Longleftrightarrow\ &\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 96 \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0.00 \\ -12.98 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.2951 \\ -0.1475 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

S. 72

Satz: Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms

Gegeben sind $n+1$ Wertepaare (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$. Dann gibt es genau

---

S. 81

Beispiel 5.8

[...]

Lösung: Wir erhalten $p(x) = -0.01\,x^6 + 0.15\,x^4 - 0.64\,x^2 + 1 \ldots$

S. 85

Satz: Berechnung der Momente

...

- für den periodischen Spline: $M_0 = M_n$ und

  ...

  wobei $x_{n+1} := x_n + x_1 - x_0,\; f_{n+1} = f_1, \ldots$

S. 90, 2. Zeile

$\ldots$ und $D_1 = 0.25,\; D_2 = 1,\; D_3 = 0.25$.

...

$$s(x) = \begin{cases} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \frac{81}{4\,\pi^3}x^3 - \frac{189}{4\,\pi^2}x^2 + \frac{135}{4\,\pi}x - \frac{27}{4} & x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases}$$

S. 109

Zur Herleitung einer genaueren Differenzenformel lesen wir die Taylorformel (7.1) mit $x = x_0 \pm h$ und $n = 2$ und erhalten:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\,h^3 + \frac{f^{(4)}(z_1)}{24}\,h^4$$

S. 153, 3. Zeile

8.4 [...]
der Differenzialgleichung berechnet wird, wenn die Bedingung $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$

S. 155

1.5 Das gibt $2^5 - 1$ verschiedene Exponenten (da die Null doppelt gezählt wurde). Insgesamt gibt es also $2^{20} \cdot (2^5 - 1) = 32505856$ Möglichkeiten. Da wir aber die Zahl 0 noch nicht erfasst haben, sind es insgesamt 32505857 Maschinenzahlen.

S. 166

5.6 ...

$$s_2(x) = \begin{cases} -x^3 + 12\,x^2 - 6\,x + 5 & x \in [0,1] \\ -9\,x^3 + 36\,x^2 - 30\,x + 13 & x \in [1,2] \\ 5\,x^3 - 48\,x^2 + 138\,x - 99 & x \in [2,4] \end{cases}$$

S. 167/168 update 30.10.2011

7.2 Diskretisierungsfehler von $D_2 f(x_0, h) \approx \frac{1}{6} \cdot |f'''(x_0)|\, h^2$ s. (7.4)
Gleichsetzen ergibt:

$$10^{-n} \cdot |f(x_0)| \cdot \frac{1}{2\,h} \approx \frac{1}{6} \cdot |f'''(x_0)|\, h^2.$$

Umstellen nach h führt auf:

$$h \approx \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-n} \frac{|f(x_0)|}{|f'''(x_0)|}}.$$

Angewandt auf Aufgabe 7.1 erhält man: $h \approx \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-10} \cdot \tan 1} \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$,