Errata zu
"Numerische Mathematik"
von Michael Knorrenschild

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag 2003 (1. Aufl.),
ISBN 3-446-22169-7

Die Änderungen sind rot hervorgehoben. Dank an Dr. Thomas Schenk (Aachen), Prof. Dr. Wieland Richter (Soest), Prof. Dr. Georg Engelmann (Köln), Dr. Angela Lilienthal (Gelsenkirchen), Dr. Hans-Jochen Bartsch, Prof. Dr. Bernd Engelmann (Leipzig), Johannes Jaeschke, Prof. Dr. Helmut Paster (München), Theodor Lorch (München), Kristina Bretschneider, Thomas Kisel, Tim Guske, Eva Rieger (alle Stuttgart), Tobias Heilmannseder (München), Sebastian Kraatz (Wilhelmshaven), Peter Proske (Augsburg), Franz Niederl (Graz), Michael Schlosser (Koblenz), Alessandro Lenzen (Aachen), Prof. Dr. Uwe Schnell (Zittau), Marc Finkenzeller (Offenburg), Dr. Karl-Heinz Brakhage (Aachen), Prof. Dr. Stefan Glasauer (Augsburg), Dr. Nadine Conza (Windisch), Anton Feist (Bielefeld), Christian Frei (Basel) und León Kreutz (Bochum) für Beiträge zu dieser Liste.

Alle hier aufgeführten Fehler beziehen sich nur auf die 1. Auflage (2003), die meisten davon sind in den späteren Auflagen bereits behoben.

S. 9

Definition

Eine n-**stellige Gleitpunktzahl** zur Basis B hat die Form

$$x = \pm(0.z_1 z_2 \dots z_n)_B \cdot B^E \quad \text{und den Wert} \quad \pm \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot B^{E-i} \tag{1.1}$$

S. 15

$1 + eps \neq 1$ gilt. Man bezeichnet *eps* auch als *Maschinengenauigkeit*. Es gilt

---

S. 15

Beispiel 1.4

Es soll $\Delta_1 f(x,h) := f(x+h) - f(x)$ für $f(x) = \sin x,\ x = 1$ und

---

S. 16

Lösung: Man erhält

h	$\Delta_1 f(1,h)$	abs. Fehler	rel. Fehler

S. 23

1.12 ...
Was können Sie über den relativen Fehler von $f(\tilde{x})$ sagen, wenn Sie

---

S. 28

n	x_n	x_n	x_n
0	-1	0	1
1	-0.7	0.3	1.3
2	-0.043	0.327	2.497

S. 31

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{0.75^n}{1-0.75}0.3 = 1.2 \cdot 0.75^n \overset{!}{\leq} 10^{-4} \iff n \geq 32.6\ldots$$

[...]
Die a-posteriori-Abschätzung für $n = 9$ lautet

S. 33
Siehe Bild 2.2. Das geht natürlich nur, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist, d. h. wenn die Tangente nicht parallel zur x-Achse liegt. Die Stelle x_1 sollte dann eine bessere

---

S. 34

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots}$$

S. 36 neu 05.09.2020

Aufgaben
[...]
2.6 Das Bauer-Ziege-Wiese-Problem: [...]
abgrasen kann (s. Bild 2.5). Wie groß ist r?

S. 38

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

S. 43

3.5

$$\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 34 & 9 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ -24 \\ 107 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 5 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix}$$

S. 44

3.5 [...]

$$\boldsymbol{A}_4\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -10 & 12 & 17 \\ 14 & -20 & -14 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -44 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 30 \\ -125 \\ 100 \end{pmatrix}$$

S. 45

Beispiel 3.5

[...]

Lösung:

$$\xrightarrow{z_3:=z_3-0.75\,z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2.5 & -2.5 \\ 0 & 2.5 & -4.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3:=z_3-z_2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

[...]

Beispiel 3.6

Das System $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[...]

Lösung: Ohne Pivotisierung erhält man bei 4-stelliger Rechnung

$$(\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2:=z_2+20000\,z_1} \begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 & | & 1 \\ 0 & 20000 & | & 20000 \end{pmatrix}.$$

[...]

$$\begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1\longleftrightarrow z_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ -10^{-4} & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2:=z_2+5\cdot 10^{-5} z_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

S. 46

Die exakte Lösung ist $\boldsymbol{x} = (-0.499975\ldots, 0.99995\ldots)^{\mathrm{T}}$, d. h. das mit
[...]
$\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$.

[...] letzte Zeile:

$$\boldsymbol{L}_4 := \boldsymbol{L}_3\,\boldsymbol{L}_2\,\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \blacksquare$$

S. 47

Lösung: Wir haben in Beispiel 3.7 $\boldsymbol{R}$ schon ausgerechnet. Aus $\boldsymbol{L}_4\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$ erhalten wir sofort $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_4^{-1}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}_4^{-1} = \boldsymbol{L}_1^{-1}\,\boldsymbol{L}_2^{-1}\,\boldsymbol{L}_3^{-1}$. Dabei lassen sich die Matrizen $\boldsymbol{L}_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$ ganz einfach durch Wechseln der Vorzeichen der Unterdiagonalelemente von $\boldsymbol{L}_i$ berechnen. Insbesondere ist auch $\boldsymbol{L}_4^{-1}$ wieder eine links-untere Dreiecksmatrix. Mit $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{L}_4^{-1}$ erhalten wir insgesamt:

S. 51

Definition

Eine Abbildung $\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn die folgenden ...

S. 53

Die ∞-Norm von $\boldsymbol{A}$ ist also die maximale zeilenweise Summe der Absolutbeträge der Elemente („Zeilensummennorm“) und die 1-Norm von $\boldsymbol{A}$ ist

---

S. 54

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8.1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

[...]

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 12.1, \;\; \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 8.1 - 4\cdot 4}\begin{pmatrix} 8.1 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \frac{12.1}{0.2} = 60.5.$$

In der ∞-Norm haben wir also $\text{cond}(\boldsymbol{A}) = 12.1 \cdot 60.5 = 732.05$. Mit (3.4) und (3.5) und $\|\boldsymbol{b}\|_\infty = 1.5$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty &\le 60.5\,\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty \le 6.05 \\ \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} &\le \text{cond}(\boldsymbol{A})\,\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} \le 732.05 \cdot \frac{0.1}{1.5} = 48.8. \end{aligned}$$

Die Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$ des gestörten Systems $\boldsymbol{A}\,\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ wird also von der Lösung $\boldsymbol{x}$ des exakten Systems $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in jeder Komponente um maximal 6.05 abweichen (absoluter Fehler), und der relative Fehler in der ∞-Norm wird maximal 48.8 betragen. Man beachte, dass der relative Fehler nicht auf die Komponenten umgerechnet werden kann, da wir hier mit Vektoren hantieren. Der Fehlerverstärkungsfaktor für den absoluten Fehler in der ∞-Norm ist maximal 60.5, der für den relativen Fehler maximal 732.05. Testen wir das an einem konkreten Fall: Die gestörte rechte Seite sei

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.6 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad \|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty = 0.1, \quad \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = \frac{0.1}{1.5} = 0.0667.$$

S. 55

Wir sehen also, dass in dieser Situation der absolute Fehler um den Faktor 60.5 (der maximal mögliche) verstärkt wurde und der relative Fehler um den Faktor 8.64.

[...]

Beispiel 3.12

[...]

Lösung: [...]

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 12.1, \ \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) = 732.05, \ \|\boldsymbol{b}\|_\infty = 1.5, \ \|\boldsymbol{\Delta b}\| \leq 0.1$$

[...] also $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} = 0.363 < 1$, [...]

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{732.05}{1 - 0.363}\left(\frac{0.006}{12.1} + \frac{0.1}{1.5}\right) \leq 77.2.$$

[...]

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2.003 & 4.003 \\ 3.997 & 8.097 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

S. 56

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10.5 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 4.043 \\ -1.798 \end{pmatrix} \implies \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 6.4574, \ \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = 0.615.$$

Wir sehen also, dass der relative Fehler des Lösungsvektors ca. 62 % beträgt;

[...]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

S. 58

i	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{x}^{(i)}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.22 \\ 3.03 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0475 \\ 2.074 \\ 3.048 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0065 \\ 2.0094 \\ 3.0201 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.997325 \\ 1.99858 \\ 3.00246 \end{pmatrix}$

S. 59

$$x_2^{(n+1)} = 0.4\,x_1^{(n)} - 0.2\,x_3^{(n)} + 2.2 \tag{3.9}$$

S. 59, unten:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n+1)} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

S. 61

[...] das sog. *Zeilensummenkriterium*. Matrizen, die diese Bedingung erfüllen, nennt man auch *diagonaldominant*.
Für die 1-Norm erhalten wir analog:

$$\| \boldsymbol{B} \|_1 = \| \boldsymbol{D}^{-1} (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}) \|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad \blacksquare$$

Hinreichend für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens ist auch das *Spaltensummenkriterium*:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Einen Nachweis findet man z. B. in [21].

S. 62

Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ist:

$$\| \boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}} \|_\infty = \max \{ 0.002675, 0.00142, 0.00246 \} = 0.002675,$$

und ist damit etwa 10mal kleiner als unsere Abschätzung suggeriert.

S. 65

Wir suchen nun eine Nullstelle $\boldsymbol{x}$ der rechten Seite, d. h.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(n)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(n)}) = \boldsymbol{o}$$

Die Idee ist wiederum, dass dieser Vektor $\boldsymbol{x}$ eine genauere Näherung für die

---

S. 67

Bemerkungen: 1. Durch eine Schrittweitendämpfung kann eine Verbesserung der Konvergenz erzielt werden; man spricht dann vom *gedämpften Newton-*

S. 69 neu 08.05.2014

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(0)})\, \boldsymbol{\delta}^{(1)} = \boldsymbol{Df}(4, 2)\, \boldsymbol{\delta}^{(1)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = -\boldsymbol{f}(-2.909, 1.455)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 96 \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(1)} = - \begin{pmatrix} 0.00 \\ -12.98 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\delta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.2951 \\ -0.1475 \end{pmatrix}$$

[...]

Bemerkung: Auch Fixpunktiterationen, wie wir sie in Abschnitt 2.3 kennen gelernt haben, sind für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme einsetzbar. Die Begriffe aus der eindimensionalen Situation übertragen sich entsprechend auf die mehrdimensionale. Anstelle von $F'(x)$ tritt wieder die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{DF}(\boldsymbol{x})$. Ein Fixpunkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ von $\boldsymbol{F}$ ist anziehend, wenn $\|\boldsymbol{DF}(\bar{\boldsymbol{x}})\| < 1$

S. 70

möchte man in einer Weise weiterarbeiten, die mit den Wertepaaren selbst

eine Funktion~~s~~ f, deren Graph genau durch die vorgegebenen Wertepaare

---

S. 71

Satz: Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms

Gegeben sind $n+1$ Wertepaare (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$. Dann gibt es genau

---

S. 72 es gibt kein a_4 im Beispiel

vorgestellten Methoden) zu: $a_0 = -2,\ a_1 = 9,\ a_2 = 9,\ a_3 = -7$. Das

---

S. 74, vorletzte Zeile

die in der oberen Schrägzeile des Differenzenschemas stehen.

S. 76

Algorithmus: Das Neville-Aitken-Schema

$[\ldots]$ für $k = 1, \ldots, n$:
    für $i = 0, \ldots, n-k$:
$[\ldots]$

S. 77

x_i	$f_i = p_{i0}(1.5)$	$p_{i1}(1.5)$	$p_{i2}(1.5)$	$p_{i3}(1.5)$
-1	5			
		$-12.5 = p_{01}(1.5)$		
0	-2		$21.25 = p_{02}(1.5)$	
		$14.5 = p_{11}(1.5)$		$8.125 = p_{03}(1.5)$
1	9		$5.5 = p_{12}(1.5)$	
		$2.5 = p_{21}(1.5)$		
2	-4			

■

S. 80

Beispiel 5.8

[...]

Lösung: Wir erhalten $p(x) = -0.01\, x^6 + 0.15\, x^4 - 0.64\, x^2 + 1 \ldots$

S. 81

ist bis auf Ausnahmen nicht sinnvoll. Eine davon wird in 7.1.3 behandelt

---

S. 84

auch der Spline diese Ableitungen besitzt: $s'(x_0) = y_0'$, $s'(x_n) = y_n'$.

...

Satz: Berechnung der Momente

...

- für den periodischen Spline: $M_0 = M_n$ und

  ...

  wobei $x_{n+1} := x_n + x_1 - x_0,\ f_{n+1} = f_1, \ldots$

S. 89, 2. Zeile

... und $D_1 = 0.25,\ D_2 = 1,\ D_3 = 0.25$.

...

$$s(x) = \begin{cases} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \frac{81}{4\,\pi^3}x^3 - \frac{189}{4\,\pi^2}x^2 + \frac{135}{4\,\pi}x - \frac{27}{4} & x \in [\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases}$$

S. 92

„$0 \stackrel{!}{=}$“ gehört nicht in die beiden folgenden Gleichungen:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, x_i \tag{6.4}$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{6.5}$$

S. 94

$$0 = \frac{\partial E(f)(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

[...]

10. Zeile von unten

metrischen $m \times m$-Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, der gegebenen rechten Seite

---

S. 99

$$0 = \frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{5} (y_i - a\,\mathrm{e}^{b \cdot x_i})\,\mathrm{e}^{b\,x_i}$$

$$0 = \frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{5} (y_i - a\,\mathrm{e}^{b \cdot x_i})\,a\,\mathrm{e}^{b\,x_i}\,x_i.$$

S. 100, drittletzte Zeile

wobei $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(0)})$ die Jacobi-Matrix in $\boldsymbol{x}^{(0)}$ bezeichnet (siehe 4.1). Das Minimie-

---

S. 101

Definition: Gauß-Newton-Verfahren

[...]

- Berechne $\boldsymbol{\delta}^{(n)}$ als Lösung des linearen Ausgleichsproblems:

  $$\text{minimiere } \|\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(n)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)})\, \boldsymbol{\delta}^{(n)} \|_2^2$$

- Setze $\quad \boldsymbol{x}^{(n+1)} := \boldsymbol{x}^{(n)} + \boldsymbol{\delta}^{(n)}.$

[...]

Algorithmus: Gedämpftes Gauß-Newton-Verfahren

Sei $\boldsymbol{x}^{(0)}$ ein Startvektor in der Nähe des Minimums von E.
Das **gedämpfte** **Gauß-Newton-Verfahren** zur näherungsweisen Bestimmung des Minimums lautet:

[...]

löse $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)})^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)})\,\boldsymbol{\delta}^{(n)} = -\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(n)})^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(n)})$

S. 106, 3. und 4. Zeile von unten

bei 10-stelliger Rechnung, $eps = 5\cdot 10^{-10}$: Da für $h < eps$ auf dem Rechner $1+h$ und 1 identisch sind, wird $D_1 f(1,h) = 0$ und damit ist der Fehler

---

S. 108

Zur Herleitung einer genaueren Differenzenformel lesen wir die Taylorformel (7.1) mit $x = x_0 \pm h$ und $n = 2$ und erhalten:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\,h^3 + \frac{f^{(4)}(z_1)}{24}\,h^4$$

S. 110, vorletzte Zeile

zu erhöhen, ist für alle Formeln durchführbar, die eine Fehlerentwicklung nach Potenzen von h besitzen.

S. 111

$$D^*(h) = \bar{D} - \frac{c_2}{2}\,h^2 + \ldots$$

$$D^*(h) = \bar{D} - c_2\,h^{k+1}\,\frac{1}{2\,(2^k-1)} - c_3\,h^{k+2}\,\frac{3}{4\,(2^k-1)} \ldots$$

S. 115

Zu beobachten sind die gleichen Phänomene wie in Beispiel 7.5: Abnehmender Fehler von oben nach unten und links nach rechts im Dreiecksschema.

S. 116

Satz

[...]

$$p_{i0}(0) := D(\frac{h}{2^i}), \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

[...]

$$p_{ik}(0) = p_{i+1,k-1}(0) + \frac{x_{i+k}}{x_{i+k} - x_i}(p_{i,k-1}(0) - p_{i+1,k-1}(0))$$

S. 133

aus $T_{i-1,0}$ und den neu hinzu kommenden Funktionswerten. Mit $n := 2^{i-1}$

[...]

$T_{i0} = [\dots]$

[...]

$$= \frac{1}{2} T_{i-1,0} + \frac{h_{i-1}}{2} \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{2\,k-1}{2} h_{i-1}).$$

S. 149

Hierbei ist s die Stufenzahl, a_{ij}, c_j, b_j sind Konstanten. Die Konsistenz-

---

S. 151, 3. Zeile

8.4 [...]

der Differenzialgleichung berechnet wird, wenn die Bedingung $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$

S. 152, 7. Zeile

rischen Lösung. Implizite Verfahren weisen jedoch Vorteile in der Stabilität

---

S. 153

1.5 Das gibt $2^5 - 1$ verschiedene Exponenten (da die Null doppelt gezählt wurde). Insgesamt gibt es also $2^{20} \cdot (2^5 - 1) = 32505856$ Möglichkeiten. Da wir aber die Zahl 0 noch nicht erfasst haben, sind es insgesamt 32505857 Maschinenzahlen.
Die kleinste positive Maschinenzahl ist dabei $0.1 \cdot 2^{-1111} = 2^{-16}$
$\approx 1.53 \cdot 10^{-5}$, die größte ist $0.11111111111111111111 \cdot 2^{1111}$
$= (1 - 2^{-20}) \cdot 2^{15} = 2^{15} - 2^{-5} = 32767.96875$.

S. 154

1.8 $eps := 1$; while $1. + eps \neq 1.$ do $eps := eps/2$; $eps := eps \cdot 2$; write eps.

S. 155

1.12 $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - 2\,x^2\,\ln x}{x\,(1+x^2)^2}$. Auf $[\frac{1}{3}, 2]$ gilt dann

$$|f'(x)| \leq \frac{1 + x^2 + 2\,x^2\,|\ln x|}{x\,(1+x^2)^2} \leq \frac{1 + 2^2 + 2\cdot 2^2\,\ln 3}{\frac{1}{3}\,(1+\frac{1}{9})^2} = 2.43\,(5 + 8\,\ln 3)$$

Mit $M := 2.43\,(5 + 8\,\ln 3)$ gilt also $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq M \cdot |x - \tilde{x}|$. Damit $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq 0.01$ ist, reicht es aus, wenn $M \cdot |x - \tilde{x}| \leq 0.01$ gilt, also $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{M}\,0.01$.

S. 161

3.10

$$\boldsymbol{R}_5 = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

S. 164

5.6 ...

$$s_2(x) = \begin{cases} -x^3 + 12\,x^2 - 6\,x + 5 & x \in [0,1] \\ -9\,x^3 + 36\,x^2 - 30\,x + 13 & x \in [1,2] \\ 5\,x^3 - 48\,x^2 + 138\,x - 99 & x \in [2,4] \end{cases}$$

S. 165/166

7.2 Diskretisierungsfehler von $D_2 f(x_0, h) \approx \dfrac{1}{6} \cdot |f'''(x_0)|\,h^2$ s. (7.4)
Gleichsetzen ergibt:

$$10^{-n} \cdot |f(x_0)| \cdot \frac{1}{2\,h} \approx \frac{1}{6} \cdot |f'''(x_0)|\,h^2.$$

Umstellen nach h führt auf:

$$h \approx \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-n} \frac{|f(x_0)|}{|f'''(x_0)|}}.$$

Angewandt auf Aufgabe 7.1 erhält man: $h \approx \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-10} \cdot \tan 1} \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$,

S. 170

$$
\begin{aligned}
y_N &= y_{N-1} + \frac{h}{2}\left(f(t_{N-1}) + f(t_N)\right) \\
&= y_{N-2} + \frac{h}{2}\left(f(t_{N-2}) + 2\,f(t_{N-1}) + f(t_N)\right)
\end{aligned}
$$