Prof. Dr. Jörg Winkelmann WS 2008/2009

Übungen zur Vorlesung Linearen Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1.

Man berechne den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, K)$$

für den Fall $K = \mathbf{R}$ und für den Fall $K = \mathbf{F}_5$.

Aufgabe 2.

Sei P_3 der Raum der reellen Polynome von Grad höchstens drei. Sei $D : P_3 \to P_3$ die lineare Abbildung, die jedem Polynom seine Ableitung zuordnet.
Man bestimme die Abbildungsmatrix von D bezüglich der Basis, die durch die Legendre-Polynome (siehe Blatt 11) gegeben ist.

Aufgabe 3.

Sei P_3 der Raum der reellen Polynome von Grad höchstens drei. Sei $E : P_3 \to \mathbf{R}^4$ die "Auswertungsabbildung" die einem Polynom $P \in P_3$ seine Werte in $0, 1, 2, 3$ zuordnet, also

$$E(P) = (P(0), P(1), P(2), P(3)).$$

Man bestimme die Abbildungsmatrix bezüglich der "Standard-Basis" $(1, x, x^2, x^3)$ und zeige, dass $E : P_3 \to \mathbf{R}^4$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe $(*)$.

Freiwillige Zusatzaufgabe. Sei K ein Körper, V ein dreidimensionaler Vektorraum, und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung sodass $f \circ f = 0$ aber $f \neq 0$.
Man bestimme die Dimensionen von Kern und Bild von f und zeige, daß es eine Basis B von V gibt bezüglich der f durch die Matrix

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Abgabe: Dienstag, den 20. 1. 2009, vor der Vorlesung.

Hinweise: Bitte Namen und Übungsgruppe auf jedem Blatt. Maximal 3 Namen zusammen.
Für jede Aufgabe ein separates Blatt. Verschiedene Aufgaben *nicht* zusammenheften.