Übungen zur Vorlesung Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1.

Sei K ein Körper,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

und $D = ad - bc$.
Man zeige: A ist genau dann invertierbar wenn $D \neq 0$ und in diesem Fall gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{D} & \frac{-b}{D} \\ \frac{-c}{D} & \frac{a}{D} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

Man berechne den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, K)$$

für den Fall $K = \mathbf{R}$ und für den Fall $K = \mathbf{F}_5$.

Aufgabe 3.

Sei P_3 der Raum der reellen Polynome von Grad höchstens drei.
Sei B die durch die "Legendre-Polynome" $(1,\, x,\, \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\, \frac{1}{2}(5x^3 - 3x))$ gegebene Basis und B' die durch die "Tschebyschow-Polynome" $(1,\, x,\, 2x^2 - 1,\, 4x^3 - 3x)$ gegebene Basis.
Man bestimme die Übergangsmatrix für den Basiswechsel von B nach B'.

Aufgabe $(*)$.

Freiwillige Zusatzaufgabe.
Sei K ein Körper und $A \in M(m \times n, K)$.
Man zeige, dass es eine Matrix $B \in M(n \times m, K)$ mit $ABA = A$ und $BAB = B$ gibt.
Ist B eindeutig?

Abgabe: Dienstag, den 13. 1. 2009, vor der Vorlesung.

Hinweise: Bitte Namen und Übungsgruppe auf jedem Blatt. Maximal 3 Namen zusammen.
Für jede Aufgabe ein separates Blatt. Verschiedene Aufgaben *nicht* zusammenheften.