MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 8-
04.12.07

Gewöhnliche Differentialgleichungen

30. (HA) Seien $a, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch. Gegeben sei außerdem die Differentialgleichung $y' + ay = f$. Unter welchen Voraussetzungen an a und f hat diese Gleichung
    (a) genau eine 2π-periodische Lösung?
    (b) nur 2π-periodische Lösungen?
    (c) gar keine 2π-periodische Lösung?

    Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $f \equiv 0$.

31. (HA) Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x} = \frac{e^x \cos t}{t^2} + \frac{2}{t}$, $x(\pi) = 0$.
    (a) Bestimmen Sie eine Funktion F mit $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = e^{-x}t^2$ und $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = -\cos t - 2e^{-x}t$.
    (b) Ist x eine Lösung des AWPs, so gilt $F(x(t),t) \equiv const$.
    (c) Bestimmen Sie die Lösung des AWPs.

32. (ÜA) Diese Aufgabe schließt an Aufgabe 28 an. Es seien wieder $a, b > 0$ und $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$. Weiter sei y Lösung von $\dot{y}(t) = ay(t) - by^2(t) + s(t)y(t)$, $y(0) > 0$ mit maximalem Vorwärtsexistenzintervall $[0, t_{max}[$. Wie gesehen, gilt $t_{max} = \infty$. Zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a}{b}$.

33. (ÜA) Zeigen Sie, dass die Menge G der 2×2-Matrizen mit zwei verschiedenen Eigenwerten offen und dicht in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

Zu bearbeiten bis: 11.12.07