MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 7-
27.11.07

Gewöhnliche Differentialgleichungen

26. (HA) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$(*) \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) \end{cases} \text{ sowie die Funktionen } U(x) = -\int_0^x f(v)dv, H(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x).$$

Zeigen Sie:

(a) $\nabla H(x,y) \perp \begin{pmatrix} y \\ f(x) \end{pmatrix}$

(b) Die Funktion H ist längs Lösungen des Systems $(*)$ konstant.

(c) Zeigen Sie, dass Lösungskurven die x-Achse stets senkrecht schneiden.

27. (HA) Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich des zweiten Arguments stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \sin|x(t)| f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

28. (ÜA) Es seien $a, b > 0$, $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$. Weiter sei y Lösung von $\dot{y}(t) = ay(t) - by^2(t) + s(t)y(t), y(0) > 0$ mit maximalem Vorwärtsexistenzintervall $[0, t_{max}[$. Zeigen Sie: $t_{max} = \infty$ (*Hinweis:* Diskutieren Sie zunächst den Fall $s \equiv 0$ ohne das AWP explizit zu lösen.)

29. (ÜA, St.ex.)

(a) Lösen Sie das System $\dot{x}(t, x_0) = Ax(t, x_0), x(0, x_0) = x_0$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $\Phi(t)$ die Matrix (*Fundamentalmatrix*) mit den Spalten $x(t, e_1), x(t, e_2), x(t, e_3)$ wobei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\Phi(t) = I + \sin(t)A + (1 - \cos t)A^2.$$

Zu bearbeiten bis: 04.12.07