Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. (HA; 2 Pkte.) Bestimmen Sie zwei nichttriviale Lösungen für $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$.

10. (HA; 3 Pkte.)
    (a) Betrachten Sie $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$. Welche Differentialgleichung ergibt sich für u, wenn $y = -\frac{1}{a(x)}\frac{u'}{u}$?
    (b) Führen Sie die Transformation aus (b) für $xy' = x + y^2$ durch.

11. (HA; 3 Pkte.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} \neq 0,$$

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : Ax + By + C = 0\}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ die durch

$$g(x, y) = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$$

gegebene Funktion.

Zeigen Sie:

Dann existieren $p, q \in \mathbb{R}$, eine offene dichte Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass $h\left(\frac{x-p}{y-q}\right) = g(x, y)$ für alle $(x, y) \in V$.

12. (ÜA) (Verallg. Banachscher Fixpunktsatz)
    (a) Sei V ein vollständiger normierter Vektorraum, $0 < \lambda < 1$ und $\theta : V \to V$ eine Selbstabbildung sodass $||\theta^n(v)|| \leq \lambda||v||$ für alle $v \in V$ (wobei $\theta^n = \theta \circ \ldots \circ \theta$).
    Zeigen Sie:
    θ hat genau einen Fixpunkt.
    (b) Finden Sie eine lineare Abbildung $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sodass es ein $\lambda \in]0, 1[$ gibt mit $||\theta^2(v)|| \leq \lambda||v||$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, aber kein $\mu \in]0, 1[$ mit $||\theta(v)|| \leq \mu||v|| \; \forall v \in \mathbb{R}^2$.

13. (ÜA) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion.

Zeigen Sie:

Jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y, x)$ ist unendlich oft differenzierbar.

Zu bearbeiten bis: 06.11.07