MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BAYREUTH
Prof. J. Winkelmann, M. Seehafer

WS 07/08
-Blatt 2-
23.10.07

Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. (HA) Bestimmen Sie Lösungen zu folgenden Anfangswertproblemen

   (a) $y' = \frac{x^2}{y}$, $y(1) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

   (b) $y' = \frac{1}{x}\sqrt{1-y^2}$, $y(1) = 0$

   (c) $y' = (x+y+5)^2$, $y(0) = -5$

   (d) $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{y}{x})$, $y(1) = 2$.

6. (HA) Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \omega^2 y = f, \quad f \text{ stetig differenzierbar}, \quad \omega > 0.$$

   (a) Gehen Sie mit dem Ansatz $y(t) = \int_{t_0}^{t} k(t-s)f(s)ds$ mit einer gewissen Funktion k in die Gleichung ein. Leiten Sie ein AWP (Anfangswertproblem) für k ab und lösen Sie dieses.

   (b) Bestimmen Sie mit der gewonnenen Darstellungsformel die Lösung des AWPs

$$\ddot{y}(t) = -y(t) + \frac{1}{6}\cos^3 t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

7. (ÜA) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y)$ monoton ist.

8. (ÜA) Es sei $C_0 \in \mathbb{R}$ und es seien $a, f\colon [0, x_0] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Es gelte $a \geq 0$ und

$$f(x) \leq C_0 + \int_0^x f(\xi)a(\xi)d\xi. \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass dann

$$f(x) \leq C_0 \exp\left(\int_0^x a(\xi)d\xi\right)$$

   gilt (Hinweis: Multiplizieren Sie (1) mit $a(x)\exp\left(-\int_0^x a(\xi)d\xi\right)$.)

Zu bearbeiten bis: 30.10.07

Bearbeiten Sie im eigenen Interesse alle Aufgaben. Nur die mit (HA) markierten Aufgaben sind für den Scheinerwerb relevant und werden korrigiert.